Числа

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Множества чисел. Натуральные числа и метод математической индукции. Факториал. Бином Ньютона. Биномиальные коэффициенты. Треугольник Паскаля. Действительные числа. Модуль действительного числа. Виды промежутков. Верхняя и нижняя грани множества. Алгоритм.

Анимация бинома Ньютона, определений верхней и нижней грани, процесса вычисления квадратного корня.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Множества чисел в системе *Mathematica*. Применение этой системы для вычисления биномиальных коэффициентов, упрощения выражений с ними, проверки тождеств, построения треугольника Паскаля. Вычисление модуля в системе *Mathematica*, решение неравенств, проверка тождеств, содержащих модуль.

4 января 2012 г.

Лекция будет посвящена в основном повторению и систематизации некоторых понятий, изучавшихся вами в школе. Кое-что, правда, будет углублено, а кое-что добавлено.

1 Множества чисел

Я напомню, что в школе вами изучались следующие множества чисел:

$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ – расширенное множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ – множество целых чисел;

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$ – множество рациональных чисел, или множество обыкновенных дробей;

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел.

Нетрудно заметить, что эти множества можно расположить в следующую цепочку включений:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

так что, например, рациональные числа являются частью действительных чисел. Эта цепочка также символизирует развитие понятия числа в математике.

Система *Mathematica* различает все виды чисел и умеет с ними работать[1)].

Сначала обратимся к натуральным числам. Их множество бесконечно, но устроено довольно просто: чтобы получить следующее натуральное число, надо к предыдущему прибавить единицу. На этой конструкции множества натуральных чисел и основан один из методов доказательства теорем, который будет использоваться в этом курсе и к которому мы сейчас переходим.

2 Метод математической индукции

В математике часто используют утверждения, которые зависят от натурального n. Например, говорят, что

$$\frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1}. \tag{1}$$

Как проверить такое утверждение? Проверить его для каждого n невозможно, потому что множество натуральных чисел бесконечно. Однако можно представить себе ситуацию, что, например, для $n = 2$ мы неравенство *проверили*, и оно выполнилось, а затем мы отказались от непосредственной проверки и для следующего $n = 3$ неравенство *доказали*, используя тот факт, что оно справедливо при $n = 2$. Затем точно так же *доказали* справедливость неравенства при $n = 4$, основываясь на его справедливости при $n = 3$. Вообще-то процесс тоже бесконечный, но предположим, что нам посчастливилось: мы заметили, что наши доказательства ничем существенным не различаются. Просто в первом случае все время говорилось о числе $n = 3$, а во втором — о числе $n = 4$. Так почему бы нам ни обозначить число $n = 3$ какой-нибудь буквой и повторить доказательство, используя вместо числа эту букву? Ведь тогда получится, что мы автоматически доказали все неравенства, переходя от $n = 2$ и до бесконечности! Собственно, так и возникает идея метода математической индукции. А теперь перейдем к строгим определениям.

Доказательство правильности некоторого утверждения $P(n)$, $n \in N$, ***методом математической индукции*** заключается в том, что последовательно выполняют этапы доказательства, приведенные ниже.

1. Доказывают (проверяют) справедливость $P(s_1), \ldots, P(s_r)$, $s_1 < \ldots < s_r$.

2. Предполагают, что $P(n)$ выполняется для некоторого $n = k$, $k \geq s_r$, и, используя это предположение и доказанное в п.1, доказывают справедливость $P(k+1)$.

3. Считают доказанным $P(n)$ для любого n.

П. 2 заменяет доказательство $P(n)$ для каждого $n > s_r$ доказательством того, что каждое «следующее» утверждение $P(k+1)$ справедливо, если справедливо «предыдущее» утверждение $P(k)$. Поскольку справедливость «первых» утверждений доказана в п. 1, то, следовательно, справедливы все утверждения $P(n)$, $n = s_1, \ldots, n = s_r$, $n > s_r$.

Пример 1. *Доказать* (1).

Решение. 1) Очевидно, что (1) выполняется для $n = 2$: $\frac{1}{2} < 2$ и для $n = 3$: $\frac{3}{8} < 1$.

2) Предположим, что (1) справедливо для каждого $n = k$, $k \geq 3$, т. е. пусть выполняется
$$\frac{k}{2^k} < \frac{2}{k-1}, \ k \geq 3.$$
Докажем, что (1) выполняется для $n = k+1$. Действительно, в соответствии с предыдущим предположением
$$\frac{k+1}{2^{k+1}} = \frac{k}{2^k 2} \cdot \frac{k+1}{k} < \frac{2}{(k-1)\,2} \cdot \frac{k+1}{k} = \frac{2}{k} \cdot \frac{k+1}{2\,(k-1)} \leq \frac{2}{k},$$
так как
$$\frac{k+1}{2\,(k-1)} = \frac{k-1+2}{2\,(k-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k-1} \leq 1$$
для $k \geq 3$.

3) Таким образом, неравенство (1) справедливо для всех $n \geq 2$.

3 Символ суммирования

Чтобы математические формулы были более компактными, мы будем использовать для записи сумм произвольных величин так называемый ***символ суммирования*** Σ:
$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \stackrel{\triangle}{=} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$
Выражение в левой части равенства читается как «сумма по k от 1 до n». Переменная k называется ***переменной суммирования***.

СВОЙСТВА СИМВОЛА СУММИРОВАНИЯ

1° *Переменной суммирования может быть любая буква:*
$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \cdots .$$

2° *Замена сложения одинаковых слагаемых умножением:*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha = \alpha n.$$

3° *Общий множитель можно выносить за знак суммы:*

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda \alpha_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

4° *От перемены мест слагаемых сумма не изменяется:*

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \beta_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k.$$

5° *Такое же правило для двойного суммирования:*

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} \alpha_{ks} = \sum_{s=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ks}.$$

Например,

$$(\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13}) + (\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23}) =$$
$$= (\alpha_{11} + \alpha_{21}) + (\alpha_{12} + \alpha_{22}) + (\alpha_{13} + \alpha_{23})\,.$$

4 Факториал и бином Ньютона

Факториалом натурального числа n называется число

$$n! \triangleq 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

По определению считают, что $0! \triangleq 1$, $1! \triangleq 1$. Факториалы быстро возрастают с ростом n. Например, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5\,040$, $8! = 40\,320$, $9! = 362\,880$, $10! = 3\,628\,800$.

Важное значение в математических формулах, делая их компактными, имеют числа, которые называют ***биномиальными коэффициентами***:

$$C_n^k \triangleq \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Они имеют почти очевидные свойства:

$$C_n^0 = C_n^n = 1,\ C_n^1 = C_n^{n-1} = n,\ C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k. \tag{2}$$

Доказательство. По определению биномиальных коэффициентов

$$C_n^{k-1}+C_n^k=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}^{\backslash k}+\frac{n!}{k!\,(n-k)!}^{\backslash n-k+1}=$$
$$=n!\frac{k+n-k+1}{k!\,(n-k+1)!}=\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}=C_{n+1}^k.$$

$\square$

Биномиальные коэффициенты для $n=2$:

$$C_2^0=1,\ C_2^1=2,\ C_2^2=1;$$

для $n=3$:

$$C_3^0=1,\ C_3^1=3,\ C_3^2=3,\ C_3^3=1.$$

Они совпадают с коэффициентами в формулах квадрата и куба суммы двух чисел, соответственно:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=\sum_{k=0}^{2}C_2^k a^k b^{2-k}, \tag{3}$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=\sum_{k=0}^{3}C_3^k a^k b^{3-k}. \tag{4}$$

Возникает вопрос, можно ли с помощью биномиальных коэффициентов записать в развернутом виде выражение $(a+b)^n$? Оказывается, можно и для этого существует

Теорема 1 (Бином Ньютона). *Для любого натурального n выполняется*

$$\boxed{(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}.}$$

Доказательство. Докажем эту формулу методом математической индукции. Для $n=1$ формула справедлива, так как $a+b=a+b$. Для $n=2$ и $n=3$ справедливость формулы вытекает из тождеств (3) и (4). Пусть формула бинома Ньютона справедлива для $n=m\geq 3$: $(a+b)^m=\sum_{k=0}^m C_m^k a^k b^{m-k}$. Докажем ее справедливость для $n=m+1$. Действительно, применяя формулу (2), получаем

$$(a+b)^{m+1}=(a+b)^m(a+b)=\sum_{k=0}^{m}C_m^k a^k b^{m-k}(a+b)=$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{k+1} b^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k+1} = \\
&= C_m^m a^{m+1} b^0 + \sum_{k=0}^{m-1} C_m^k a^{k+1} b^{m-k} + C_m^0 a^0 b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_m^k a^k b^{m-k+1} = \\
&= C_m^m a^{m+1} b^0 + \sum_{s=1}^{m} C_m^{s-1} a^s b^{m-s+1} + C_m^0 a^0 b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_m^k a^k b^{m-k+1} = \\
&= C_m^0 a^0 b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \left(C_m^{k-1} + C_m^k\right) a^k b^{m-k+1} + C_m^m a^{m+1} b^0 = \\
&= C_m^0 a^0 b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_{m+1}^k a^k b^{m-k+1} + C_m^m a^{m+1} b^0 = \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^k b^{m-k+1}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Биномиальные коэффициенты удобно находить с помощью треугольника Паскаля

n															
0								1							
1							1		1						
2						1		2		1					
3					1		3		3		1				
4				1		4		6		4		1			
5			1		5		10		10		5		1		
6		1		6		15		20		15		6		1	
7	1		7		21		35		35		21		7		1

В этом треугольнике каждый биномиальный коэффициент, кроме единиц, равен сумме двух ближайших соседних верхних элементов таблицы. Следующая формула анимирована. Щелкая по ней мышкой, убеждаемся, что коэффициенты многочленов определяются с помощью треугольника Паскаля.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

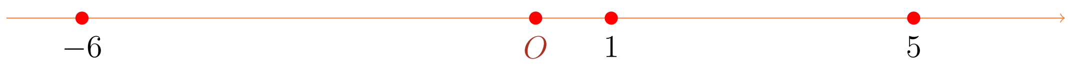
Как система *Mathematica* вычисляет факториал и работает с биномиальными коэффициентами можно узнать в Приложении[2)].

5 Действительные числа

Наибольшую трудность при изучении вызывают действительные числа; но они же будут на первых порах наиболее необходимы при изучении курса высшей математики. В учебниках можно найти различные определения действительного числа. Мы будем считать ***действительным числом*** любую десятичную дробь. При этом конечные и бесконечные периодические десятичные дроби составят множество рациональных чисел, а бесконечные непериодические дроби — множество чисел иррациональных.

Например, 2; $0{,}3$; $1{,}(57)$ — рациональные числа (в скобках указан период), а число $1{,}41421\ldots = \sqrt{2}$, не имеющее периодической части, — иррациональное.

Как вы знаете, действительные числа принято изображать точками на специальной прямой, которая называется ***числовой*** или ***координатной***, или ***числовой*** или ***координатной осью***.



Часто мы будем отождествлять числа и изображающие их точки, а также пользоваться для наглядности геометрическими понятиями вместо числовых.

Из свойств действительных чисел наиболее важными для нас будут следующие.

Первое свойство порядка. Число не может быть одновременно и меньше другого числа, и больше:

$$\forall\,(a, b \in \mathbb{R})\ \ [(a \leq b) \wedge (b \leq a)] \Longrightarrow (a = b)\,.$$

Второе свойство порядка. Два действительных числа или равны или одно из них больше другого:

$$\forall\,(a, b \in \mathbb{R})\ \ (a = b) \vee (a < b) \vee (a > b)\,.$$

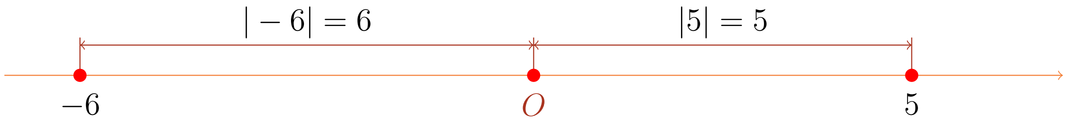
Свойство полноты. Между двумя различными действительными числами всегда найдется еще одно действительное число, отличное от них:

$$\forall\,(a, b \in \mathbb{R})\,\exists\,(c \in \mathbb{R})\ \ a \neq b \Longrightarrow [(a < c < b) \vee (b < c < a)]\,.$$

Модулем $|a|$ действительного числа a называется неотрицательное действительное число

$$|a| \triangleq \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0, \end{cases}$$

которое имеет геометрический смысл расстояния от точки a на координатной оси до начала координат.



Модуль действительного числа имеет следующие свойства (доказательства необходимо вспомнить[3]):

1° $|a| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a < \varepsilon$, *если* $\varepsilon > 0$.

2° $|a| > \varepsilon \iff a < -\varepsilon \vee a > \varepsilon$, *если* $\varepsilon > 0$.

3° $a \le |a|$.

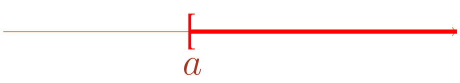
4° $||a| - |b|| \le |a \pm b| \le |a| + |b|$.

5° $|ab| = |a|\,|b|$.

6° $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

В Приложении[4] показано, как *Mathematica* манипулирует с модулями чисел.

На числовой оси мы будем рассматривать различные множества, чаще всего интервалы, отрезки, их пересечения и объединения. Расположим необходимые начальные сведения в виде таблицы:

Интервал	$(a, b) = \{x : a < x < b\}$	
Полуинтервал	$(a, b] = \{x : a < x \le b\}$	
Полуинтервал	$[a, b) = \{x : a \le x < b\}$	
Отрезок	$[a, b] = \{x : a \le x \le b\}$	
Интервал	$(a, \infty) = \{x : x > a\}$	
Интервал	$(-\infty, a) = \{x : x < a\}$	
Полуинтервал	$[a, \infty) = \{x : x \ge a\}$	
Полуинтервал	$(-\infty, a] = \{x : x \le a\}$	

Отрезок, интервалы и полуинтервалы называют также ***промежутками***. К названиям последних в таблице четырех промежутков часто добавляют слово «бесконечный».

Множество X числовой оси называется ***ограниченным сверху***, если существует число M такое, что $\forall\,(x \in X)\ x \leq M$. Число M называется ***верхней границей*** множества X, а также его ***мажорантой***. Например, для интервала (a, b) число b и любое число, большее b, является мажорантой.

Множество X числовой оси называется ***ограниченным снизу***, если существует число m такое, что $\forall\,(x \in X)\ x \geq m$. Число m называется ***нижней границей*** множества X, а также его ***минорантой***. Для интервала (a, b) число a и любое число, меньшее a, является минорантой.

Если множество X ограничено и сверху, и снизу, то оно называется ***ограниченным***. Интервал (a, b) является ограниченным множеством, а интервал (a, ∞) не является.

Элемент M (m) множества X называется ***максимальным*** (***минимальным***) его ***элементом***, если для любого другого элемента $x \in X$ выполняется $x \leq M$ $(x \geq m)$.

Максимальный элемент множества X обозначается $\max X$, а минимальный – $\min X$. Так, для отрезка $X = [a, b]$ имеем $a = \min X$, $b = \max X$.

Лемма 2. *Если во множестве имеется максимальный (минимальный) элемент, то он только один.*

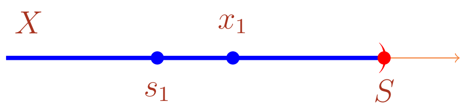
Доказательство. Пусть во множестве X имеется два максимальных элемента, M_1 и M_2. Тогда на основании определения максимального элемента получаем, что, с одной стороны, $M_1 \leq M_2$ (так как M_2 – максимальный элемент, а, с другой стороны, $M_2 \leq M_1$ (так как M_1 – максимальный элемент). Тогда из первого свойства порядка следует, что $M_1 = M_2$. Доказательство для минимального элемента аналогично. □

Если во множестве нет ни минимального, ни максимального элемента, возможно, им существует замена вне этого множества.

Верхней гранью множества X называется его наименьшая верхняя граница, которая обозначается $\sup X$. На языке математической логики данное определение можно записать так:

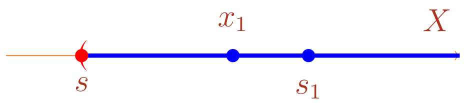
$$S = \sup X \iff \forall\,(x \in X)\ x \leq S \land \forall\,(s_1 < S)\ \exists\,(x_1 \in X)\ s_1 < x_1.$$

Запись означает, что, если слегка отступить влево от верхней грани S к точке s_1, то последняя уже не будет верхней гранью, так как во множестве X обязательно найдется элемент x_1, больший, чем s_1. Щелкая мышкой на следующем рис., можно увидеть, как при сужении интервала (s_1, S_1) каждый раз внутри него находится точка x_1, удовлетворяющая определению верхней грани.



Нижней гранью множества X называется его наибольшая нижняя граница, которая обозначается $\inf X$. Иными словами

$$s = \inf X \iff \forall\,(x \in X)\ x \geq s \wedge \forall\,(s_1 > s)\ \exists\,(x_1 \in X)\ x_1 < s_1.$$



Лемма 3. *Всякое непустое ограниченное сверху множество имеет единственную верхнюю грань.*

Доказательство. Пусть X — множество, о котором говорится в условии теоремы, а $Y = \{y : \forall\,(x \in X)\ x \leq y\}$ — множество его мажорант. По условию оба множества непусты. Тогда в силу свойства полноты найдется число S, такое, что

$$\forall\,(x \in X)\ \forall\,(y \in Y)\ x \leq S \leq y.$$

Следовательно, число S является мажорантой X и минорантой Y. Как мажоранта X число S принадлежит Y, но как миноранта Y является минимальным элементом Y. Итак, $S = \min Y = \sup X$.
Единственность верхней грани следует из предыдущей леммы, из единственности минимального элемента множества Y. □

Лемма 4. *Всякое непустое ограниченное снизу множество имеет единственную нижнюю грань.*

Доказательство. Доказывается аналогично. □

Для интервала $X = (a, b)$ выполняется $a = \inf X$, $b = \sup X$.

Очевидно, что при наличии во множестве X максимального элемента выполняется $\sup X = \max X$, а при наличии минимального элемента — $\inf X = \min X$.

6 Алгоритм

Понятие алгоритма является первичным и не определяется. Чтобы на уровне здравого смысла представлять, о чем все же идет речь, будем говорить, что алгоритм — это некоторая инструкция по выполнению каких-то действий.

Обычно требуется, чтобы алгоритм был конечным, т.е. выполнение действий в алгоритме когда-нибудь должно закончиться, и однозначным, что означает точность и недвусмысленность выполнения действий.

Например, корень квадратный из действительного числа $a > 0$ можно извлечь с помощью такого алгоритма.

1. Задать число $a > 0$; задать число $x_0 > 0$ — начальное приближение к $\sqrt{a}$; задать число $\varepsilon > 0$ — точность вычислений.

2. Положить $n = 0$.

3. Вычислить
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

4. Если $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, то прекратить выполнение алгоритма: x_{n+1} — искомое приближение к $\sqrt{a}$; в противном случае увеличить n на 1 и перейти к п. 3.

Для $a = 2$, $x_0 = 3$ и $\varepsilon = 0{,}01$ работа алгоритма показана на следующем анимационном рис. Щелкая на нем мышкой, можно наблюдать и численно, и графически, как последовательность приближений x_n сходится к $\sqrt{2}$.

n	x_0
0	3,000

Таким образом, с заданной точностью $\sqrt{a} \approx 1,41$.

Приложение

[1] Система *Mathematica* понимает, что числа могут принадлежать различным множествам чисел, используемым в математике. Множество целых чисел в этой системе называется `Integers`, множество рациональных чисел (обыкновенных дробей) — `Rationals`, множество действительных чисел — `Reals`. Эти названия используются при решении различных задач, например, при решении уравнений и неравенств, когда требуется указать, в каких числах требуется получить результат.

С натуральными числами система *Mathematica* работает без ограничения разрядности:

1273^{21}

158 999 762 908 984 707 781 026 503 997 624 931 780 968 282 688 796 504 525 857 990 873

$1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 - 1$

999 999 999 999 999 999 999 999 999 999

Mathematica старается, по возможности, все вычисления производить точно. Поэтому, если требуется выполнить действия с обыкновенными дробями, то и ответ вы получите в виде обыкновенной дроби:

$$\frac{2}{39}*\frac{13}{14}+1-\frac{2}{3}$$

$$\frac{8}{21}$$

Если результат желательно иметь в виде десятичной дроби, то следует применить оператор `N[expr]`, где `expr` — выражение, значение которого требуется вычислить:

```
N[%]
0.380952
```

Если точности в 6 цифр (принятой по умолчанию) недостаточно, точность можно увеличить с помощью расширенной формы оператора `N[expr,n]`, где `n` — количество цифр результата. Зададим, в предыдущем примере, скажем, 15 цифр результата:

$$\mathtt{N}\left[\frac{2}{39}*\frac{13}{14}+1-\frac{2}{3},15\right]$$

0.380952380952381

Если в выражении имеется хотя бы одна десятичная дробь, то и ответ будет получен в виде десятичной дроби. Например, если в предыдущем примере записать единицу с точкой, то ответ будет таким:

$$\frac{2}{39}*\frac{13}{14}+1.-\frac{2}{3}$$

0.380952

В наиболее общем виде действительное число в десятичной системе счисления можно задавать в экспоненциальной форме $M10^p$, где M — мантисса, а p — порядок числа. Пример:

$3.45\ \ 10^{125}$

3.45×10^{125}

Заметим, что знак умножения и пробел в системе *Mathematica* взаимозаменяемы.

[2] В системе *Mathematica* факториал вычисляется очень просто, надо набрать число, сразу за ним восклицательный знак и дать команду на вычисление. Но я хочу вычислить сразу

несколько значений факториала и для экономии места расположить ввод и вывод не столбиком, а в строке. Для этого используем оператор `Print`, который выводит на дисплей набранные через запятую различные объекты системы *Mathematica*, помещая их по возможности в одной строке, если только не встретится специальный символ перехода на новую строку. Мы используем всего два объекта. Во-первых, факториал от некоторого числа, который *Mathematica* вычислит и поместит в строку вывода. Во-вторых, текстовую строку, которая будет служить комментарием к вычисленному значению. Строки текста, как предписано в руководстве к системе *Mathematica*, будем заключать в двойные «английские» кавычки. Вот что у нас получится:

```
Print["0! = ", 0!, ", 1! = ", 1!, ", 7! = ", 7!, ", 30! = ", 30!]
0! = 1, 1! = 1, 7! = 5040, 30! = 265252859812191058636308480000000
```

С помощью оператора `Binomial[n,k]` *Mathematica* может вычислить биномиальный коэффициент C_n^k:

```
Binomial[5,2]
10
```

Для произвольного n и конкретного k может быть найдено выражение для биномиального коэффициента:

```
Binomial[n,5]
```

$$\frac{1}{120}(-4+\mathtt{n})(-3+\mathtt{n})(-2+\mathtt{n})(-1+\mathtt{n})\mathtt{n}$$

Еще одна возможность — получение различных формул для биномиальных коэффициентов. Например, из бинома Ньютона при $a = b = 1$ следует, что $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$. Выщелкнув из палитры инструментов символ суммирования, убедимся, что *Mathematica* тоже знает эту формулу:

$$\sum_{k=0}^{n}\mathtt{Binomial[n,k]}$$

$$2^{\mathtt{n}}$$

А, если возвести биномиальные коэффициенты в квадрат, придем к другой формуле:

$$\sum_{k=0}^{n}\mathtt{Binomial[n,k]}^2$$

```
Binomial[2n,n]
```

т.е. $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n$. Заметьте, что показатель степени надо помещать после всей записи оператора, а не после его имени.

Формула бинома Ньютона получается так же просто:

$$\sum_{\mathtt{k}=0}^{\mathtt{n}}\mathtt{Binomial[n,k]\,a^k\,b^{n-k}}$$

$$\mathtt{(a + b)^n}$$

Для конкретного n оператор `Expand` раскрывает скобки бинома:

$$\mathtt{Expand}[(\mathtt{a}+\mathtt{b})^{10}]$$

$$a^{10}+10a^9b+45a^8b^2+120a^7b^3+210a^6b^4+252a^5b^5+210a^4b^6+120a^3b^7+45a^2b^8+10ab^9+b^{10}$$

Для упрощения выражений *Mathematica* имеет в своем арсенале операторы `Simplify` и `FullSimplify`. Первый работает быстрее, но не всегда справляется с теми выражениями, которые может упростить второй. Применим `FullSimplify` для упрощения отношения двух биномиальных коэффициентов:

```
FullSimplify[Binomial[n+1,k+1]/Binomial[n,k]]
```

$$\frac{1+n}{1+k}$$

Таким образом, $C_n^k/C_{n+1}^{k+1} = (n+1)/(k+1)$.

Можем «доказать» лемму, доказанную на лекции:

```
FullSimplify[Binomial[n,k-1] + Binomial[n,k]]
Binomial[1+n,k]
```

т.е. $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$.

Еще несколько формул.

$$\sum_{k=0}^{n} \text{Binomial[n,k]k}$$

$$2^{-1+n}\, n$$

т.е. $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$.

$$\sum_{j=k}^{n} \text{Binomial[n,j] Binomial[j,k]}$$

$$2^{-k+n}\,\text{Binomial[n,k]}$$

или $\sum_{j=k}^{n} C_n^j C_j^k = 2^{n-k} C_n^k$.

Напоследок построим треугольник Паскаля. Для этого используем два новых оператора. Первый из них, `Table[expr,{i,i_min,i_max},{j,j_min,j_max}]`, для каждого $\mathtt{i} = \overline{\mathtt{i_{min}}, \mathtt{i_{max}}}$ составляет список значений выражения `expr`, соответствующих $\mathtt{j} = \overline{\mathtt{j_{min}}, \mathtt{j_{max}}}$ и затем создает список из всех полученных списков. Внутренние списки соответствуют строкам таблицы, а внешний список олицетворяет таблицу, состоящую из таких строк. Второй оператор, называемый `Column[list,alignment]` выводит элементы списка `list` на дисплей в виде столбца, выровненного указанным в `alignment` способом. Получим

```
Column[Table[Binomial[n,k],{n,0,7},{k,0,n}],Center]
            {1}
           {1,1}
          {1,2,1}
         {1,3,3,1}
        {1,4,6,4,1}
      {1,5,10,10,5,1}
     {1,6,15,20,15,6,1}
   {1,7,21,35,35,21,7,1}
```

[3] Доказательства свойств модуля.

1°. $|a| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a < \varepsilon$, *если* $\varepsilon > 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Пусть $a \geq 0$. Тогда $|a| < \varepsilon \iff 0 \leq a < \varepsilon$. Если же $a \leq 0$, то $|a| < \varepsilon \iff \iff -a < \varepsilon \land a \leq 0 \iff -\varepsilon < a \land a \leq 0 \iff -\varepsilon < a \leq 0$. Два полученных неравенства можно объединить в одно, требуемое.

2°. $|a| > \varepsilon \iff a < -\varepsilon \lor a > \varepsilon$, *если* $\varepsilon > 0$.

Данное неравенство противоположно предыдущему, поэтому и выражается неравенствами, которые в совокупности противоположны неравенству $-\varepsilon < a < \varepsilon$.

3° $a \le |a|$.

Сразу получается из определения модуля.

4° $||a| - |b|| \le |a \pm b| \le |a| + |b|$.

Сложим два верных неравенства $a \le |a|$ и $b \le |b|$:

$$a + b \le |a| + |b|\,.$$

Если $a + b \ge 0$, то это равносильно тому, что

$$|a + b| \le |a| + |b|\,. \tag{П1}$$

Если же $a + b < 0$, то по уже доказанному

$$|a + b| = -a - b = (-a) + (-b) \le |-a| + |-b| = |a| + |b|\,,$$

т.е. неравенство (П1) остается справедливым. Оно останется справедливым и при замене b на $-b$, так что правая часть доказываемого неравенства полностью доказана.

Пусть $a - b = c$, тогда $a = b + c$ и по уже доказанному $|a| = |b + c| \le |b| + |c| \le |b| + |a - b|$, или

$$|a| - |b| \le |a - b|\,.$$

Тогда будет справедливым и неравенство

$$||a| - |b|| \le |a - b|\,,$$

которое останется справедливым и при замене b на $-b$. Таким образом полностью доказана и левая часть требуемого неравенства.

5° $|ab| = |a|\,|b|$.

Получается из определения модуля.

6° $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

То же самое.

[4)] Для вычисления модуля числа в системе *Mathematica* существует функция `Abs`:

```
Abs[-2]
2
```

Свойства модуля нетрудно проверить с помощью оператора `Reduce[expr,vars,dom]`, который выполняет решение системы `expr`, в которую могут входить как уравнения, так неравенства, на множестве `dom`, выражая переменные, помещенные в список `vars`, через остальные переменные. Итак, проверяем свойства модуля:

```
Reduce[Abs[a]< ε && ε > 0,a,Reals]
ε > 0 && -ε < a < ε
Reduce[Abs[a]> ε && ε > 0,a,Reals]
ε > 0 && (a < -ε || a > ε)
```

Если, например, неравенство выполняется при любых значениях переменных, оператор `Reduce` просто сообщает `True`:

```
Reduce[a ≤ Abs[a],a,Reals]
True
Reduce[Abs[Abs[a] - Abs[b]] ≤ Abs[a + b] ≤ Abs[a] + Abs[b],{a,b},Reals]
True
Reduce[Abs[Abs[a] - Abs[b]] ≤ Abs[a - b] ≤ Abs[a] + Abs[b],{a,b},Reals]
True
Reduce[Abs[a b] == Abs[a]Abs[b],{a,b},Reals]
(a!=0 && b!=0) || a==0 || b==0
```

Последнее сообщение фактически является тем же самым `True`, просто *Mathematica* проверяет заданное тождество, последовательно рассматривая различные сочетания параметров `a` и `b`, и отражает это в ответе. Проверим последнее свойство модуля:

$$\mathtt{Reduce}\left[\mathtt{Abs}\left[\frac{\mathtt{a}}{\mathtt{b}}\right] == \frac{\mathtt{Abs[a]}}{\mathtt{Abs[b]}} \ \&\& \ \mathtt{b} \neq 0, \mathtt{\{a,b\}}, \mathtt{Reals}\right]$$

```
b < 0 || b > 0
```

И здесь фактически получено `True`.

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.* – М.: Наука, 1984, – с. 13-29.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 1. – с. 97–99.