Интегралы, зависящие от параметров

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Собственные интегралы, зависящие от параметров. Их непрерывность и дифференцируемость. Применение к вычислению обычных определенных интегралов. Несобственные интегралы, зависящие от параметров. Равномерная сходимость интегралов. Гамма- и бета-функции и их применение.

Анимация последствий неравномерной сходимости интегралов.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Особенности использования системы *Mathematica* для вычисления интегралов, зависящих от параметров.

12 мая 2014 г.

Мы не раз убеждались в том, что усложнение наших понятий ведет, как ни странно, к упрощению наших представлений и увеличению мощности методов. Поэтому иногда стоит, затратив усилия, взобраться на холм, чтобы понять, что же тебя окружает на самом деле.

Так, введя непредставимое понятие о бесконечности, мы смогли лучше представить себе поведение функций, ввести понятие производных и с их помощью быстро и эффективно решать как математические, так и многие технические задачи. Экзотические комплексные числа, которые нормальный человек и числами-то не назовет, помогли нам осознать глубокую связь всех основных элементарных функций между собой, выразив их через экспоненту, и найти простой и удобный способ решения задач электротехники.

В сегодняшней лекции тоже произойдет нечто подобное: мы превратим определенный интеграл, являющийся числом, в функцию, получив возможность с помощью таких интегралов вычислять довольно сложные интегралы прежнего вида. Заодно у нас появится новое представление о факториале, как о функции действительного нецелочисленного (!) аргумента.

1 Собственные интегралы

1.1 Постоянные пределы интегрирования

Интегралом, зависящим от параметра, называется следующий интеграл:

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\, dx, \tag{1}$$

где $f(x,\alpha)$ — функция двух переменных; $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$; α — параметр, принадлежащий некоторому множеству A. Будем считать, что $f(x,\alpha)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ в собственном смысле.

Теорема 1. *Пусть $A = [c,d]$, $c,d \in \mathbb{R}$; функция $f(x,\alpha)$ непрерывна в прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$. Тогда интеграл (1) непрерывен по α в $[c,d]$.*

Доказательство приведено в Приложении[1)].

Пример 1. *Найти интеграл*

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi} e^{-\alpha x}\cos x\, dx,$$

и непосредственно убедиться в его непрерывности по параметру α.

Решение. Возьмем интеграл, интегрируя по частям:

$$\begin{gathered} I(\alpha) = \int_0^{\pi} e^{-\alpha x}\cos x\, dx = \\ = \left\langle u = e^{-\alpha x},\ dv = \cos x\, dx,\ du = -\alpha e^{-\alpha x}\, dx,\ v = \sin x \right\rangle = \\ = e^{-\alpha x}\sin x\Big|_0^{\pi} + \alpha\int_0^{\pi} e^{-\alpha x}\sin x\, dx = \\ = \left\langle u = e^{-\alpha x},\ dv = \sin x\, dx,\ du = -\alpha e^{-\alpha x}\, dx,\ v = -\cos x \right\rangle = \\ = \alpha\left(-e^{-\alpha x}\cos x\Big|_0^{\pi} - \alpha\int_0^{\pi} e^{-\alpha x}\cos x\, dx\right) = \alpha(1+e^{-\alpha\pi}) - \alpha^2 I(\alpha). \end{gathered}$$

Отсюда получаем, что

$$I(\alpha) = \frac{\alpha\left(1+e^{-\alpha\pi}\right)}{1+\alpha^2}.$$

Интеграл является элементарной функцией аргумента α, существует при любых его значениях и потому непрерывен.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x,\alpha)$ и ее производная $f'_\alpha(x,\alpha)$ определены и непрерывны в прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$. Тогда для всякого $\alpha\in[c,d]$ функция (1) дифференцируема и справедливо равенство*

$$\boxed{I'(\alpha) = \left[\int_a^b f(x,\alpha)\, dx\right]'_\alpha = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\, dx.} \tag{2}$$

Доказательство см. в Приложении[2)].

Пример 2. *Вычислить интеграл*

$$I\left(b\right)=\int_{0}^{1}\frac{x^{b}-x^{a}}{\ln x}\,dx,\;0<a<b.$$

Решение. Найдем производную заданного интеграла по формуле (2):

$$I'\left(b\right)=\int_{0}^{1}\frac{x^{b}\ln x}{\ln x}\,dx=\int_{0}^{1}x^{b}\,dx=\left.\frac{x^{b+1}}{b+1}\right|_{0}^{1}=\frac{1}{b+1}.$$

Значит,

$$I\left(b\right)=\int\frac{db}{b+1}=\ln\left(b+1\right)+C.$$

Константу C найдем из условия, что $I\left(a\right)=0=\ln\left(a+1\right)+C$, откуда следует, что $C=-\ln\left(a+1\right)$. Таким образом,

$$I\left(b\right)=\int_{0}^{1}\frac{x^{b}-x^{a}}{\ln x}\,dx=\ln\left(b+1\right)-\ln\left(a+1\right)=\ln\frac{b+1}{a+1}.$$

Теорема 3. *Если $f\left(x,\alpha\right)$ непрерывна в прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$, то она интегрируема на $[c,d]$, причем,*

$$\int_{c}^{d}\left[\int_{a}^{b}f\left(x,\alpha\right)\,dx\right]d\alpha=\int_{a}^{b}\left[\int_{c}^{d}f\left(x,\alpha\right)\,d\alpha\right]dx. \tag{3}$$

Доказательство приведено в Приложении[3)].

1.2 Переменные пределы интегрирования

Далее рассмотрим интеграл, у которого не только подынтегральная функция, но и пределы интегрирования зависят от одного и того же параметра $\alpha\in[c,d]$:

$$I\left(\alpha\right)=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)}f\left(x,\alpha\right)\,dx. \tag{4}$$

Теорема 4. *Предположим, что функция $f\left(x,\alpha\right)$ непрерывна в прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$, а кривые $x=a\left(\alpha\right)$ и $x=b\left(\alpha\right)$ непрерывны в нем и не выходят за его пределы. Тогда интеграл (4) является непрерывной функцией α на отрезке $[c,d]$.*

Доказательство приведено в Приложении[4)].

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4, производная* $f'_\alpha(x,\alpha)$ *непрерывна в прямоугольнике* $[a,b]\times[c,d]$ *и существуют производные* $a'(\alpha)$ *и* $b'(\alpha)$. *Тогда функция* (4) *дифференцируема и справедлива формула*

$$\boxed{I'(\alpha)=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx+b'(\alpha)\,f\left[b(\alpha),\alpha\right]-a'(\alpha)\,f\left[a(\alpha),\alpha\right].}$$

Доказательство. Запишем интеграл (4) в виде

$$I(\alpha,u,v)=\int_u^v f(x,\alpha)\,dx,$$

где $u=a(\alpha)$, $v=b(\alpha)$. Используя производную сложной функции, теорему 2 и формулу производной интеграла с переменным верхним пределом, получим

$$\begin{aligned} I'(\alpha)&=\frac{\partial I}{\partial\alpha}+\frac{\partial I}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial\alpha}+\frac{\partial I}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial\alpha}=\\ &=\int_u^v f'_\alpha(x,\alpha)\,dx+f(v,\alpha)\,b'(\alpha)-f(u,\alpha)\,a'(\alpha), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. *Найти производную функции*

$$I(\alpha)=\int_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\,dx.$$

Решение. Применив последнюю теорему, получим

$$\begin{aligned} I'(\alpha)&=\int_0^\alpha\left[\frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\right]'_\alpha dx+\left.\frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\right|_{x=\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{d\alpha}=\\ &=\int_0^\alpha \frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}\,dx+\frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}. \end{aligned}$$

Разложим подынтегральную дробь на простейшие ДРФ:

$$\frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+\alpha x}^{\backslash 1+x^2}+\frac{Bx+C}{1+x^2}^{\backslash 1+\alpha x}$$

$$\begin{array}{c|c|c|l} x^2 & A+\alpha B=0 & A+\alpha B=0 & A=-\alpha/(1+\alpha^2)\\ x & B+\alpha C=1 & B-\alpha A=1 & B=1/(1+\alpha^2)\\ x^0 & A+C=0 & C=-A & C=\alpha/(1+\alpha^2) \end{array}$$

и вычислим интеграл

$$\int_0^\alpha\frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}=\int_0^\alpha\frac{-\alpha}{(1+\alpha^2)(1+\alpha x)}\,dx+\int_0^x\frac{x+\alpha}{(1+\alpha^2)(1+x^2)}\,dx=$$

$$= \left[-\frac{1}{1+\alpha^2} \ln(1+\alpha x) + \frac{\ln(1+x^2)}{2(1+\alpha^2)} + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \operatorname{arctg} x \right]\Bigg|_0^\alpha =$$
$$= -\frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2} + \frac{\ln(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)} + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \operatorname{arctg} \alpha.$$

Следовательно,

$$I'(\alpha) = \frac{\ln(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)} + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \operatorname{arctg} \alpha.$$

2 Несобственные интегралы

Теперь рассмотрим зависящий от параметра α из множества $A \subset \mathbb{R}$ несобственный интеграл

$$I(\alpha) = \int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx, \tag{5}$$

где $f(x, \alpha)$ определена и интегрируема при $x \geq a$ для любого $\alpha \in A$.

Ясно, что интеграл (5) должен сходиться. Однако этого оказывается мало: даже при непрерывной зависимости функции $f(x, \alpha)$ от α интеграл может оказаться разрывным по α. Далее в примере 5 будет показано, что при $\alpha > 0$

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

В то же время $I(0) = 0$, а при $\alpha < 0$

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin(-|\alpha| x)}{x}\, dx = -\int_0^\infty \frac{\sin |\alpha| x}{x}\, dx = -\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, хотя подынтегральная функция в $I(\alpha)$ непрерывна по α, сам интеграл по α разрывен.

Причина заключается в том, что интеграл (6) (по определению несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом) является пределом собственных интегралов вида

$$I_b(\alpha) = \int_0^b \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$$

при $b \to \infty$. Каждый из них непрерывен по α, но, чем больше b, тем на меньшем интервале происходит переход от $-\pi/2$ к $\pi/2$, в результате чего возникает разрыв у предельной функции $I(\alpha)$. Это демонстрирует анимационный рис. 1.

Таким образом, сходимость интегралов $I_b(\alpha)$ к интегралу $I(\alpha)$ не является достаточно «правильной». Требуется специальный тип сходимости, называемой равномерной.

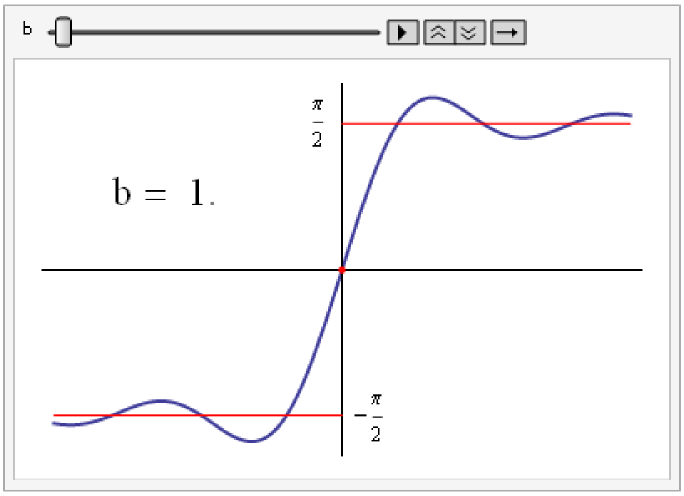


Рис. 1. — $I(\alpha)$, — $I_b(\alpha)$.

Интеграл $I(\alpha)$ ***сходится равномерно*** относительно $\alpha \in A \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall (\varepsilon > 0)\, \exists (b_0 \geq a)\, \forall (b \geq b_0)\, \forall (\alpha \in A)$$
$$\left| \int_a^\infty f(x,\alpha)\, dx - \int_a^b f(x,\alpha)\, dx \right| = \left| \int_b^\infty f(x,\alpha)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Теорема 6. *Пусть функция $f(x,\alpha)$ непрерывна по x при $x \geq a$. Если существует функция $\varphi(x)$, интегрируемая в промежутке $[a,\infty)$ такая, что*

$$\forall (\alpha \in A)\, \forall (x \geq a)\ \ |f(x,\alpha)| \leq \varphi(x),$$

то интеграл (5) *сходится равномерно относительно $\alpha \in A$.*

Доказательство. В силу признака сравнения для несобственных интегралов с бесконечным верхним пределом† интеграл (5) сходится, причем, абсолютно при любом $\alpha \in A$.

Далее, в силу сходимости интеграла $\int_a^\infty \varphi(x)\, dx$

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(b_0 > 0)\forall(b > b_0)\ \left| \int_a^\infty \varphi(x)\, dx - \int_a^b \varphi(x)\, dx \right| = \int_b^\infty \varphi(x)\, dx < \varepsilon.$$

Но тогда и

$$\left| \int_b^\infty f(x)\, dx \right| \leq \int_b^\infty |f(x)|\, dx \leq \int_b^\infty \varphi(x)\, dx < \varepsilon.$$

Так как это неравенство выполняется при любом $\alpha \in A$, то интеграл (5) сходится равномерно.

†Лекция «Несобственные интегралы».

Теорема 7. *Если функция $f(x,\alpha)$ непрерывна на множестве $[a,\infty)\times[c,d]$ и $I(\alpha)$ сходится равномерно относительно $\alpha\in[c,d]$, то*

1) $I(\alpha)$ непрерывна при $\alpha\in[c,d]$;

2) справедлива формула

$$\int_c^d d\alpha\int_a^b f(x,\alpha)\,dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,\alpha)\,d\alpha,$$

где $b,d\in\overline{\mathbb{R}}$;

3) если $f'(x,\alpha)$ непрерывна в $[a,\infty)\times[c,d]$, а $\int_a^\infty f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$ сходится равномерно относительно $\alpha\in[c,d]$, то для всех $\alpha\in[c,d]$

$$I'(\alpha)=\int_a^\infty f'_\alpha(x,\alpha)\,dx.$$

Пример 4. *Вычислить интеграл Пуассона*

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

Решение. Сделаем замену: $x=ut$, $u>0$; $dx=u\,dt$. Тогда

$$I=I(u)=u\int_0^\infty e^{-u^2t^2}dt.$$

Умножим обе части полученного равенства на $e^{-u^2}du$ и проинтегрируем его по u от 0 до ∞:

$$\begin{aligned}I\cdot\int_0^\infty e^{-u^2}du=I^2=\int_0^\infty ue^{-u^2}\left(\int_0^\infty e^{-u^2t^2}dt\right)du=\\=\int_0^\infty\left[\int_0^\infty ue^{-u^2\left(1+t^2\right)}dt\right]du.\end{aligned}\tag{7}$$

Подынтегральная функция удовлетворяет неравенству

$$ue^{-u^2\left(1+t^2\right)}\le ue^{-u^2}=\varphi(u),$$

а $\varphi(u)$ интегрируема в несобственном смысле:

$$\int_0^\infty ue^{-u^2}du=\left\langle z=u^2,\ dz=2u\,du\right\rangle=\frac12\int_0^\infty e^{-z}\,dz==-\frac12\,e^{-z}\Big|_0^\infty=\frac12.$$

Тогда в соответствии с теоремой 7 в равенстве (7) можно переставить интегралы:

$$\begin{aligned}I^2&=\int_0^\infty\left[\int_0^\infty e^{-u^2\left(1+t^2\right)}u\,du\right]dt=\left\langle w=u^2\left(1+t^2\right),\ dw=2u\left(1+t^2\right)\,du\right\rangle=\\&=\frac12\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\frac{1}{1+t^2}e^{-w}\,dw\right)dt=-\frac12\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}\,e^{-w}\Big|_0^\infty=\frac12\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}=\\&=\frac12\operatorname{arctg}t\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Так как $I > 0$, то

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Пример 5. *Вычислить интеграл*

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx.$$

Решение. Вместо заданного рассмотрим более сложный интеграл

$$J(\alpha) = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx,\ k > 0.$$

Выполним дифференцирование по α под знаком интеграла:

$$\begin{aligned}
J'(\alpha) &= \int_0^\infty e^{-kx} \cos \alpha x\, dx = \\
&= \left\langle u = e^{-kx},\ dv = \cos \alpha x,\ du = -ke^{-kx}\, dx,\ v = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x \right\rangle = \\
&= \frac{1}{\alpha} e^{-kx} \sin \alpha x \Big|_0^\infty + \frac{k}{\alpha} \int_0^\infty e^{-kx} \sin \alpha x\, dx = \\
&= \left\langle u = e^{-kx},\ dv = \sin \alpha x,\ du = -ke^{-kx}\, dx,\ v = -\frac{1}{\alpha} \cos \alpha x \right\rangle = \\
&= -\frac{k}{\alpha^2} e^{-kx} \cos \alpha x \Big|_0^\infty - \frac{k^2}{\alpha^2} \int_0^\infty e^{-kx} \cos \alpha x\, dx = \frac{k}{\alpha^2} - \frac{k^2}{\alpha^2} J'(\alpha).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$J'(\alpha) = \frac{k}{k^2 + \alpha^2},\ J(\alpha) = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{k} + C.$$

Но $J(0) = 0 = C$, поэтому

$$J(\alpha) = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{k}.$$

Переходя к пределу, получим

$$I(\alpha) = \lim_{k \to 0+0} J(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

3 Гамма-функция

Гамма-функцией называется следующий несобственный интеграл, зависящий от параметра $\alpha > 0$:

$$\Gamma\left(\alpha\right) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx.$$

Теорема 8. *Гамма-функция существует при всех $\alpha > 0$. Справедлива формула*

$$\Gamma\left(\alpha + 1\right) = \alpha\, \Gamma\left(\alpha\right). \tag{8}$$

Доказательство. Представим интеграл (8) в виде суммы двух интегралов:

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx + \int_1^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx.$$

Первый интеграл в правой части сходится, так как

$$0 < \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx < \int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx = \left.\frac{x^{\alpha}}{\alpha}\right|_0^1 = \frac{1}{\alpha}.$$

Для доказательства сходимости второго интеграла заметим, что при достаточно больших x выполняется $x^{\alpha} < e^{\beta x}$, $\beta > 0$, поскольку $\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}/e^{\beta x} = 0$. Поэтому, начиная с некоторого достаточно большого x, выполнится $x^{\alpha}/e^{\beta x} < 1$, и, значит,

$$\exists\,(x_0 > 1)\,\forall\,(x > x_0)\;\; x^{\alpha} < e^{\beta x}.$$

Тогда

$$\int_1^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx < \int_{x_0}^{\infty} e^{x/2}e^{-x}\,dx < \int_0^{\infty} e^{-x/2}\,dx = \left.-2e^{-x/2}\right|_0^{\infty} = 2,$$

что означает сходимость интеграла.

Рекуррентная формула (8) получается в результате следующих выкладок:

$$\begin{aligned}\alpha\Gamma(\alpha) &= \alpha\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = \\ &= \left\langle u = e^{-x},\, dv = x^{\alpha-1}\,dx,\, du = -e^{-x}\,dx, v = \frac{x^{a}}{\alpha}\right\rangle = \\ &= \left. x^{\alpha}e^{-x}\right|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} x^{\alpha}e^{-x}\,dx = \Gamma(\alpha+1).\end{aligned}$$

Следствие 1. *Для натурального n справедливо равенство*

$$\boxed{\Gamma(\alpha+n) = (\alpha+n-1)\ldots(\alpha+1)\,\alpha\,\Gamma(\alpha).} \tag{9}$$

Доказательство. Достаточно несколько раз применить формулу (8):

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+n) &= (\alpha+n-1)\,\Gamma(\alpha+n-1) = \\ &= (\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\,\Gamma(\alpha+n-2) = \ldots = \\ &= (\alpha+n-1)\ldots(\alpha+1)\,\alpha\Gamma(\alpha).\end{aligned}$$

□

Таким образом, чтобы вычислить $\Gamma(\alpha)$ для любого α, достаточно знать $\Gamma(\alpha)$ для $\alpha \in (0;1]$ или для $\alpha \in (1;2]$.

Следствие 2. *Для натурального n*

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Доказательство. Поскольку

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1,$$

то полагая в (9) $\alpha = 1$, находим

$$\Gamma(n+1) = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1\cdot\Gamma(1) = n!.$$

□

Следовательно, гамма-функция является расширением понятия факториала на действительные числа.

Для вычисления значений гамма-функции существуют специальные таблицы [1].

Пример 6. *Энергия E электрического сигнала $x(t)$ вычисляется по формуле ($t > 0$ – время)*

$$E = \int_0^\infty x^2(t)\,dt. \tag{10}$$

Найти энергию сигнала

$$x(t) = t^k e^{-mt^n},\ k > -1/2,\ n > 0,\ t \in [0,\infty).$$

Решение. По формуле (10) получаем

$$E = \int_0^\infty t^{2k}\,e^{-2mt^n}\,dt = \left\langle u = 2mt^n,\ du = 2mnt^{n-1}\,dt\right\rangle =$$
$$= \int_0^\infty \frac{u^{\frac{2k}{n}}}{(2m)^{\frac{2k}{n}}} e^{-u} \frac{(2m)^{\frac{n-1}{n}}}{2mnu^{\frac{n-1}{n}}}\,du = \frac{1}{n(2m)^{\frac{2k+1}{n}}}\int_0^\infty u^{\frac{2k+1}{n}-1}\,e^{-u}\,du =$$
$$= \frac{1}{n(2m)^{\frac{2k+1}{n}}}\,\Gamma\left(\frac{2k+1}{n}\right).$$

Так, например, при $k = 2$, $n = 1$, $m = 2$ получаем

$$E = \frac{1}{4^5}\,\Gamma(5) = \frac{4!}{4^5} = \frac{24}{4^5} = \frac{3}{128}.$$

При $k = 0$, $n = 2$, $m = 2$, используя вычисленный уже нами интеграл Пуассона, находим

$$E = \frac{1}{4}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}\,dt = \left\langle u = \sqrt{t},\ du = \frac{dt}{2\sqrt{t}}\right\rangle =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{-1}e^{-u^2}u\,du = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{4},$$

откуда, в частности, следует, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}. \tag{11}$$

При $k=3$, $n=3$, $m=2$, применяя формулу (9) и обращаясь к упомянутым таблицам, получаем

$$E=\frac{1}{3\cdot 4^{7/3}}\,\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)\approx 0{,}013\cdot\Gamma(2{,}33)=0{,}013\cdot 1{,}33\cdot\Gamma(1{,}33)\approx$$
$$\approx 0{,}013\cdot 1{,}33\cdot 0{,}893\approx 0{,}015.$$

4 Бета-функция

Ею называется интеграл, зависящий от двух параметров:

$$B\left(\alpha,\beta\right)=\int_0^1 x^{\alpha-1}\left(1-x\right)^{\beta-1}\,dx,$$

Интеграл сходится при $\alpha>0$, $\beta>0$.

Связь между бета- и гамма-функциями выражается формулой[5)]

$$\boxed{B\left(\alpha,\beta\right)=\frac{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}.} \tag{12}$$

Пример 7. *Найти энергию сигнала* ($m>0$, $n>0$)

$$x(t)=\begin{cases}\sin^m t\cos^n t\,dt, & t\in[0,\pi/2];\\ 0, & t>\pi/2.\end{cases}$$

Решение. Используем формулы (10) и (12):

$$E=\int_0^{\pi/2}\sin^{2m}t\cos^{2n}t\,dt=\left\langle u=\sin^2 t,\ du=2\sin t\cos t\,dt\right\rangle=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 u^m(1-u)^n u^{-1/2}(1-u)^{-1/2}\,du=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{2m-1}{2}}(1-u)^{\frac{2n-1}{2}}\,du=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{2m+1}{2}-1}(1-u)^{\frac{2n+1}{2}-1}\,du=\frac{1}{2}\,B\left(m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+n+1\right)}.$$

Например, при $m=2$, $n=3$ в силу равенств (11) и (9) получаем

$$E=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(6\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(2+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{5!}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{15}{8}\cdot\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{5!}=\frac{3\pi}{512}.$$

□

Применение системы *Mathematica* для вычисления интегралов, зависящих от параметров, см. в Приложении[6)].

Приложение

[1] При доказательстве теоремы нам не обойтись лишь понятием непрерывности. Оказывается, этого свойства функции недостаточно. Точнее, непрерывность нам понадобится, но это будет специальная непрерывность, можно сказать, усиленная.

Чтобы во всем этом разобраться, вспомним сначала, что такое изученная нами непрерывность функции одного переменного на множестве[†]. Используя определения непрерывности такой функции в точке и на множестве, можно записать, что функция $f(x)$ непрерывна на множестве $A \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall (x_0 \in A) \, \forall (\varepsilon > 0) \, \exists (\delta > 0) \, \forall (x \in A) \ \ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

После фрагмента $\forall (x_0 \in A)$ этой фразы стоит определение непрерывности функции в точке x_0. В этом определении требуется указать для каждой отдельной точки x_0 и заданного числа $\varepsilon > 0$ некоторое другое число $\delta > 0$ такое, что и т. д. То есть число δ как для каждой точки x_0, так и для числа ε, вообще говоря, может быть своим, а, значит, число δ является функцией: $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$.

Именно зависимость δ от x_0 и является тем недостатком, который не позволяет доказать некоторые теоремы, основываясь только на непрерывности функции на множестве.

Поэтому математики усилили понятие непрерывности таким образом, чтобы устранить зависимость δ от x_0, оставив лишь зависимость $\delta = \delta(\varepsilon)$. В результате возникло понятие равномерной непрерывности функции.

Функция $f(x)$ называется ***равномерно непрерывной*** на множестве $A \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall (\varepsilon > 0) \, \exists (\delta > 0) \, \forall (x_1, x_2 \in A) \ \ |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \tag{П1}$$

В этом определении δ уже будет одним и тем же для любых точек x_1 и x_2 из множества A.

Прежде всего заметим, что функция, *равномерно непрерывная на некотором множестве, непрерывна на нем*. Действительно, стоит переписать утверждение (П1) в виде

$$\forall (\varepsilon > 0) \, \exists (\delta > 0) \, \forall (x, x_0 \in I) \ \ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

как мы получаем утверждение о непрерывности функции в каждой точке x_0 множества A.

Вообще говоря из непрерывности функции не следует ее равномерная непрерывность.

Пример П1. *Показать, что непрерывная функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной в промежутке* $[1; \infty)$.

Решение. Доказательство проведем от противного. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и предположим, что мы нашли по этому ε необходимое для выполнения утверждения (П1) $\delta > 0$. Выберем точки $x_1 > \max(\varepsilon/\delta, 1)$, $x_2 = x_1 + \delta/2$. По теореме Лагранжа

$$\left|x_2^2 - x_1^2\right| = 2c\,|x_2 - x_1| = c\delta.$$

Так как $x_2 < c < x_1$, то $c > \varepsilon/\delta$ и из последнего равенства получаем

$$\left|x_2^2 - x_1^2\right| > \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot \delta = \varepsilon.$$

Это значит, что необходимого нам $\delta > 0$ в природе не существует. Следовательно, функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной.

Пример П2. *Показать, что функция $y = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна в промежутке* $[1; \infty)$.

[†] Лекция «Непрерывность функции».

Решение. По теореме Лагранжа для любых двух точек $x_1, x_2 \geq 1$ имеем

$$|\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}| = \frac{1}{2\sqrt{c}}\,|x_2 - x_1| < \frac{1}{2}\,|x_2 - x_1|\,, \tag{П2}$$

поскольку $c \prec x_1, x_2$ и, значит, $c > 1$. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta = 2\varepsilon$. Тогда из (П2) следует, что как только выполнится $|x_2 - x_1| < \delta$, так немедленно выполнится и $\left|\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right| < \varepsilon$. Это в силу определения (П1) свидетельствует о равномерной непрерывности функции $y = \sqrt{x}$. □

Для отрезка непрерывность функции влечет за собой ее равномерную непрерывность.

Теорема П1 (Кантора). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство. Выберем некоторое $\varepsilon > 0$. Используя непрерывность функции $f(x)$, для каждой точки x отрезка $[a, b]$ построим окрестность $U(x, \delta(x))$, в которой для любой точки $x' \in [a, b]$ будет выполняться неравенство $|f(x) - f(x')| < \varepsilon/2$. Для дальнейшего доказательства возьмем окрестности $V(x, d(x))$, $d(x) = \delta(x)/2$, меньшей длины, в которых указанное неравенство тоже, очевидно, будет выполняться. В совокупности окрестности $V(x, d(x))$ образуют покрытие отрезка $[a, b]$. По лемме о конечном покрытии† из этого бесконечного покрытия можно выделить конечное подпокрытие $V(c_1, d(c_1)), \ldots, V(c_n, d(c_n))$.

Возьмем две произвольные точки $x_1, x_2 \in [a, b]$ такие, что

$$|x_1 - x_2| < \delta_{\min} = \min\left[d(c_1), \ldots, d(c_n)\right].$$

Ясно, что точка x_1 должна содержаться в одной из окрестностей подпокрытия, например, в окрестности $V(c_i, d(c_i)) \subset U(c_i, \delta(_i))$, из чего следует, что $|x_1 - c_i| < \delta(c_i)/2$. Но тогда

$$|x_2 - c_i| \leq |x_1 - x_2| + |x_1 - c_i| < \delta_{\min} + \frac{1}{2}\,\delta(c_i) \leq \frac{1}{2}\,\delta(c_i) + \frac{1}{2}\,\delta(c_i) = \delta(c_i)\,.$$

Последнее означает, что x_2, как и x_1, принадлежит интервалу $U(c_i, \delta(c_i))$, и, следовательно,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(c_i)| + |f(c_i) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Правда, в теореме, которую мы стремимся доказать, речь идет о функции не одного, а двух аргументов. Но, оказывается, рассмотренные понятия и конструкции применимы и к функциям нескольких переменных. Именно, функция $f(P)$ точки $P(x_1, \ldots, x_n)$ называется ***равномерно непрерывной*** на множестве $A \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\forall(\varepsilon > 0)\,\exists(\delta > 0)\,\forall(M_1, M_2 \in A)\;\; \rho(M_1, M_2) < \delta \implies |f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon,$$

где $\rho(M_1, M_2)$− расстояние‡ между точками M_1 и M_2

В теории функций нескольких переменных тоже имеется понятие покрытия множеств, для ограниченных замкнутых множеств доказывается лемма о выделении из их покрытий конечных подпокрытий, а уже на этой основе доказывается теорема Кантора для функций нескольких переменных. Вот ее формулировка.

Теорема П2 (Кантора). *Если функция точки $f(M)$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве A, то она равномерно непрерывна на A.*

†Приложение к лекции «Непрерывность функции».

‡Лекция «Частные производные».

Доказано также, что прямоугольник $[a, b] \times [c, d]$, о котором идет речь в теореме 1, является ограниченным замкнутым множеством.

Доказательство теоремы 1. Так как по теореме Кантора функция $f(x, \alpha)$ равномерно непрерывна в прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$, то по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для всех $x \in [a, b]$ и всех $\alpha, \alpha + \Delta\alpha \in [c, d]$, таких, что $|\Delta\alpha| < \delta$ выполнится неравенство $|f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда для частного приращения интеграла по α, в свою очередь, будет справедливо неравенство

$$|\Delta_\alpha I| = |I(\alpha + \Delta\alpha) - I(\alpha)| \le \int_a^b |f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)| \, dx < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Таким образом доказано, что для любой точки α отрезка $[c, d]$ по заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства $|\Delta\alpha| < \delta$ последует $|\Delta_\alpha I| < \varepsilon$. Это означает, что функция $I(\alpha)$ непрерывна в каждой точке отрезка $[c, d]$.

2) Для $\alpha_0 \in [c, d]$ рассмотрим и преобразуем следующее выражение, используя теорему Лагранжа:

$$\left| I(\alpha_0 + \Delta\alpha) - I(\alpha_0) - \Delta\alpha \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha_0)\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^b [f(x, \alpha_0 + \Delta\alpha) - f(x, \alpha_0) - f'_\alpha(x, \alpha_0)\Delta\alpha]\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^b [f'_\alpha(x, \mu) - f'_\alpha(x, \alpha_0)]\, dx \right| |\Delta\alpha| \le \int_a^b |f'_\alpha(x, \mu) - f'_\alpha(x, \alpha_0)|\, dx\, |\Delta\alpha|,$$

$\mu \prec \alpha_0, \alpha_0 + \Delta\alpha$. Отсюда

$$\left| \frac{I(\alpha_0 + \Delta\alpha) - I(\alpha_0)}{\Delta\alpha} - \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha_0)\, dx \right| \le \int_a^b |f'_\alpha(x, \mu) - f'_\alpha(x, \alpha_0)|\, dx.$$

Устремим $\Delta\alpha$ к нулю, тогда μ устремится к α_0. Так как по условию теоремы производная $f'_\alpha(x, \alpha)$ непрерывна на отрезке $[c, d]$, то $f'_\alpha(x, \mu)$ устремится к $f'_\alpha(x, \alpha_0)$. В правой части последнего неравенства получим 0, а тогда из его левой части будет следовать, что

$$\lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{I(\alpha_0 + \Delta\alpha) - I(\alpha_0)}{\Delta\alpha} = I'(\alpha_0) = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha_0)\, dx.$$

3) Рассмотрим функции

$$\varphi(u) = \int_c^u \left[\int_a^b f(x, \alpha)\, dx \right] d\alpha, \ \psi(u) = \int_a^b \left[\int_c^u f(x, \alpha)\, d\alpha \right] dx.$$

Поскольку функция $f(x, \alpha)$ непрерывна в прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$, то в силу теоремы 1 и непрерывной зависимости интеграла от верхнего предела интегрирования приходим к выводу, что функции $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ непрерывны на $[c, d]$.

Так как функция (1) непрерывна, то функция $\varphi(u)$ дифференцируема, причем, $\varphi'(u) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$. Функция $\psi(u)$ дифференцируема в силу теоремы 2 и по формуле (2) получаем, что $\psi'(u) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$. Таким образом, $\varphi'(u) = \psi'(u)$ на отрезке $[c, d]$ и поэтому $\varphi(u) = \psi(u) + C$, $C = \text{const}$. Но $\varphi(c) = \psi(c) = 0$ и, значит, $C = 0$. Следовательно, $\varphi(u) = \psi(u)$, откуда при $u = d$ получаем равенство (3).

[4] Выберем произвольным образом α_0 из отрезка $[c, d]$ и запишем интеграл в виде

$$I(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{a(\alpha_0)} f(x,\alpha)\, dx + \int_{a(\alpha_0)}^{b(\alpha_0)} f(x,\alpha)\, dx + \int_{b(\alpha_0)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)\, dx = \\ = \int_{a(\alpha_0)}^{b(\alpha_0)} f(x,\alpha)\, dx + \int_{b(\alpha_0)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)\, dx - \int_{a(\alpha_0)}^{a(\alpha)} f(x,\alpha)\, dx. \tag{П3}$$

Первый интеграл в правой части имеет постоянные пределы интегрирования и по теореме 1 непрерывен по α. Поэтому при $\alpha \to \alpha_0$ этот интеграл стремится к $I(\alpha_0)$. Остальные два интеграла допускают следующие оценки:

$$\int_{b(\alpha_0)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)\, dx \le M\left|b(\alpha) - b(\alpha_0)\right|, \quad \int_{a(\alpha_0)}^{a(\alpha)} f(x,\alpha)\, dx \le M\left|a(\alpha) - a(\alpha_0)\right|,$$

$M = \sup_{[a,b]\times[c,d]} |f(x,\alpha)|$. Из этих неравенств и непрерывности функций $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ вытекает, что при $\alpha \to \alpha_0$ оба последних интеграла стремятся к 0. Таким образом, переходя в формуле (П3) к пределу при $\alpha \to \alpha_0$, получаем, что $\lim_{\alpha\to\alpha_0} I(\alpha) = I(\alpha_0)$.

[5] Представим бета-функцию в виде несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом:

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\, dx = \left\langle x = \frac{t}{t+1},\ dx = \frac{dt}{(t+1)^2} \right\rangle = \\ = \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{(t+1)^{\alpha-1}} \cdot \frac{1}{(t+1)^{\beta-1}} \cdot \frac{dt}{(t+1)^2} = \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{(t+1)^{\alpha+\beta}}\, dt. \tag{П4}$$

Далее преобразуем гамма-функцию:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\, dx = \langle x = tu,\ dx = u\, dt\rangle = \int_0^\infty t^{\alpha-1}u^{\alpha-1}e^{-tu}u\, dt = \\ = u^\alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-tu}\, dt,$$

вследствие чего получим

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-tu}\, dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{u^\alpha}.$$

Заменяя в этой формуле α на $\alpha+\beta$ и u на $u+1$, придем к формуле

$$\int_0^\infty t^{\alpha+\beta-1}e^{-t(u+1)}\, dt = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(u+1)^{\alpha+\beta}}.$$

Умножим обе части равенства на $u^{\alpha-1}$ и проинтегрируем по u в пределах от 0 до ∞. С учетом (П4) в правой части формулы получим

$$\Gamma(\alpha+\beta)\int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{(u+1)^{\alpha+\beta}}\, du = \Gamma(\alpha+\beta)\, B(\alpha,\beta).$$

Преобразования в левой части дают

$$\int_0^\infty u^{a-1}\left(\int_0^\infty t^{\alpha+\beta-1}e^{-t(u+1)}\, dt\right) du = \int_0^\infty t^{\alpha+\beta-1}e^{-t}\left(\int_0^\infty u^{a-1}e^{-tu}\, du\right) dt = \\ = \langle z = tu,\ dz = t\, du\rangle = \int_0^\infty t^{\beta-1}e^{-t}\left(\int_0^\infty z^{a-1}e^{-z}\, dz\right) dt = \Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta).$$

Приравнивая левую и правую части, находим, что

$$\Gamma\left(\alpha+\beta\right) B\left(\alpha,\beta\right) = \Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\beta\right),$$

из чего и следует формула (12).

[6)] Прежде всего убедимся, что *Mathematica* вообще умеет вычислять интегралы, зависящие от параметра. Вычислим интеграл из примера 1:

$$\int_0^{\pi} \mathtt{e}^{-\alpha\,\mathtt{x}}\,\mathtt{Cos[x]}\,\mathtt{dx}$$

$$\frac{(\mathtt{e}^{-\pi\,\alpha}+1)\,\alpha}{\alpha^2+1}$$

Mathematica понимает, что такое производная интеграла по параметру в общем виде. Для интеграла с постоянными пределами:

$$\mathtt{s}[\alpha\_]\ :=\ \int_{\mathtt{a}}^{\mathtt{b}} \mathtt{f}[\mathtt{x},\alpha]\,\mathtt{dx}$$

$$\mathtt{s}'[\alpha]$$

$$\int_{\mathtt{a}}^{\mathtt{b}} \mathtt{f}^{(0,1)}[\mathtt{x},\alpha]\,\mathtt{dx}$$

И для интеграла с переменными пределами:

$$\mathtt{s}[\alpha\_]\ :=\ \int_{\mathtt{a}[\alpha]}^{\mathtt{b}[\alpha]} \mathtt{f}[\mathtt{x},\alpha]\,\mathtt{dx}$$

$$\mathtt{s}'[\alpha]$$

$$\int_{\mathtt{a}[\alpha]}^{\mathtt{b}[\alpha]} \mathtt{f}^{(0,1)}[\mathtt{x},\alpha]\,\mathtt{dx} - \mathtt{f}[\mathtt{a}[\alpha],\alpha]\,\mathtt{a}'[\alpha] + \mathtt{f}[\mathtt{b}[\alpha],\alpha]\,\mathtt{b}'[\alpha]$$

Верхний индекс $(0,1)$ подынтегральной функции означает, что по первому аргументу функции берется нулевая производная (то есть вообще не берется), а по второму берется первая.

Вычисляя интегралы, зависящие от параметров и их производные, желательно указать системе *Mathematica* область действия параметров, иначе ответ может получиться весьма громоздким и содержащим совершенно не интересующую нас информацию. Вычислим еще пару интегралов из лекционных примеров. Пример 2:

$$\mathtt{s[b\_]:=Assuming}\left[0<\mathtt{a}<\mathtt{b},\ \int_0^1 \frac{\mathtt{x}^{\mathtt{b}}-\mathtt{x}^{\mathtt{a}}}{\mathtt{Log[x]}}\,\mathtt{dx}\right]$$

$$\mathtt{s[b]}$$

$$\mathtt{Log}\left[\frac{1+\mathtt{b}}{1+\mathtt{a}}\right]$$

$$\mathtt{s'[b]}$$

$$\frac{1}{1+\mathtt{b}}$$

Пример 3:

$$\mathtt{s}[\alpha\_]\mathtt{:=Assuming}\left[\alpha\in\mathtt{Reals},\ \int_0^{\alpha} \frac{\mathtt{Log}[1+\alpha\mathtt{x}]}{1+\mathtt{x}^2}\,\mathtt{dx}\right]$$

$$\partial_\alpha\mathtt{s}[\alpha]\ \mathtt{//\ FullSimplify}$$

$$\frac{(1+\mathtt{i}\alpha)\,\mathtt{Log}[1-\mathtt{i}\alpha]+(1-\mathtt{i}\alpha)\,\mathtt{Log}[1+\mathtt{i}\alpha]}{2(\alpha^2+1)}$$

Преобразуем полученный результат к ответу, полученному в примере (символ i здесь означает мнимую единицу):

$$s'(\alpha) = \frac{(1+i\alpha)\ln(1-i\alpha) + (1-i\alpha)\ln(1+i\alpha)}{2(\alpha^2+1)} =$$
$$= \frac{\ln(1-i\alpha) + \ln(1+i\alpha) + i\alpha[\ln(1-i\alpha) - \ln(1+i\alpha)]}{2(\alpha^2+1)} =$$
$$= \frac{\ln(\alpha^2+1)}{2(\alpha^2+1)} + \frac{\alpha}{(\alpha^2+1)} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \frac{\ln(1+i\alpha)}{\ln(1-i\alpha)} = \frac{\ln(\alpha^2+1)}{2(\alpha^2+1)} + \frac{\alpha \operatorname{arctg} \alpha}{(\alpha^2+1)},$$

так как[†]

$$\operatorname{arctg} \alpha = \frac{1}{2i} \cdot \frac{\ln(1+i\alpha)}{\ln(1-i\alpha)}.$$

Так же просто вычисляются и несобственные интегралы. Поскольку в ответах у нас будут фигурировать гамма- и бета-функции, мы установим в качестве стиля вывода в системе *Mathematica* традиционный стиль. Для этого выберем в главном меню опцию `Format`, а в ней — `Option Inspector`. В диалоговом окне в выпадающем списке `Show option values` выберем `Seleted Nootbook`, а в дереве опций последовательно найдем `Cell Options`, `New Cell Defaults`, `CommonDefaultFormat Types`. После этого в правой части окна опцию "`Output`" установим в `TraditionalForm`. Перейдем к вычислениям:

$$\texttt{Assuming}\left[\alpha > 0, \int_0^\infty \frac{\texttt{Sin}[\alpha \texttt{x}]}{\texttt{x}} \texttt{dx}\right]$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty e^{-\texttt{x}^2} \texttt{dx}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Mathematica умеет узнавать среди прочих интегралов гамма-функцию:

$$\texttt{Assuming}\left[\alpha > 0, \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} \texttt{dx}\right]$$

$$\Gamma(\alpha)$$

вычислять как ее точные значения:

```
Table[Gamma[n + 1/2], {n, 5}]
```

$$\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \frac{15\sqrt{\pi}}{8}, \frac{105\sqrt{\pi}}{16}, \frac{945\sqrt{\pi}}{32}\right\}$$

$$\texttt{Gamma}[\infty]$$

$$\infty$$

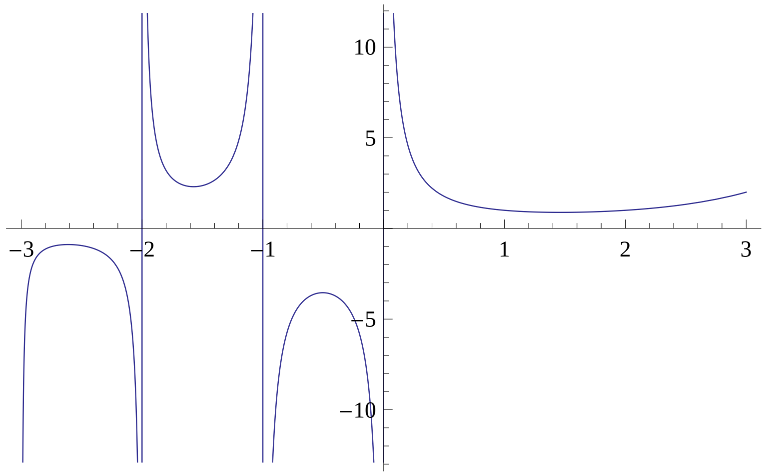
так и приближенные:

```
Gamma[7/3] // N
1.19064
```

Построим график гамма-функции:

```
Plot[Gamma[x],{x,-3,3}]
```

[†]Лекция «Основные элементарные комплексные функции».



Наверное, вы уже догадались, что гамма-функция в системе *Mathematica* вызывается оператором `Gamma` с одним аргументом.

Вот как с помощью гамма-функции решаются два последних примера в лекции:

$$\text{Assuming}\left[\mathtt{k} > -1/2\,\&\&\,\mathtt{n} > 0\,\&\&\,\mathtt{m} > 0,\ \int_0^\infty \mathtt{t}^{2\mathtt{k}} e^{-2\mathtt{m}\mathtt{t}^{\mathtt{n}}}\,dt\right]$$

$$\frac{2^{-\frac{2k+1}{n}} m^{-\frac{2k+1}{n}} \Gamma\left(\frac{2k+1}{n}\right)}{n}$$

$$\text{Assuming}\left[\mathtt{m} > -1/2\,\&\&\,\mathtt{n} > -1/2,\ \int_0^{\pi/2} \mathtt{Sin[t]}^{2\mathtt{m}}\,\mathtt{Cos[t]}^{2\mathtt{n}}\,\mathtt{dt}\right]$$

$$\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(m+n+1)}$$

Для вызова бета-функции имеется оператор `Beta`:

$\mathtt{Beta}[\alpha,\beta]$

$\mathrm{B}(\alpha,\beta)$

Mathematica может показать формулу, связывающую гамма- и бета-функции:

$\mathtt{FunctionExpand}[\mathtt{Beta}[\alpha,\beta]]$

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Здесь был применен оператор `FunctionExpand`, который, в частности, служит для упрощения выражений, содержащих специальные функции. А гамма- и бета-функции как раз относятся к специальным функциям.

Примеры вычисления значений бета-функции:

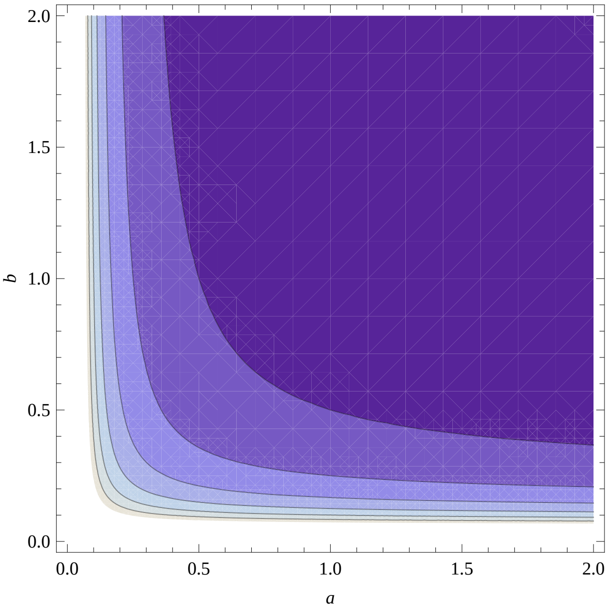
```
Beta[5/2,7/2]
```

$$\frac{3\pi}{256}$$

```
Beta[2.3,3.2]
0.0540298
```

Изобразим ее график в виде линий уровня:

$\mathtt{ContourPlot[Beta[a,b],\{a,0,2\},\{b,0,2\},FrameLabel} \rightarrow \mathtt{Automatic]}$



Литература

[1] *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* / Под ред. Н. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979.