

Геометрические приложения определенного интеграла

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Вычисление с помощью определенного интеграла площадей плоских фигур, объемов и поверхностей тел вращения в декартовых и полярных координатах, при параметрическом задании кривых.

Применение системы *Mathematica* для вычисления геометрических характеристик тел и фигур.

10 февраля 2014 г.

1 Вычисление площади плоской фигуры

1.1 Площадь в декартовой системе координат

Знакомясь с понятием определенного интеграла, мы выяснили, что для неотрицательной функции $f(x)$ определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ выражает собой площадь криволинейной трапеции. Но плоские фигуры, площади которых требуется вычислить, не всегда имеют вид криволинейной трапеции.

Если, например, $f(x) \leq 0$, то площадь такой фигуры определяется формулой

$$S = - \int_a^b f(x) dx.$$

В случае, когда график функции, ограничивающей фигуру, имеет вид, показанный на рис. 1, а), ее площадь может быть найдена как

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Площадь фигуры, заключенной между графиками функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, $f_1(x) \leq f_2(x)$, $a \leq x \leq b$, (рис. 1, б)), вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx. \quad (1)$$

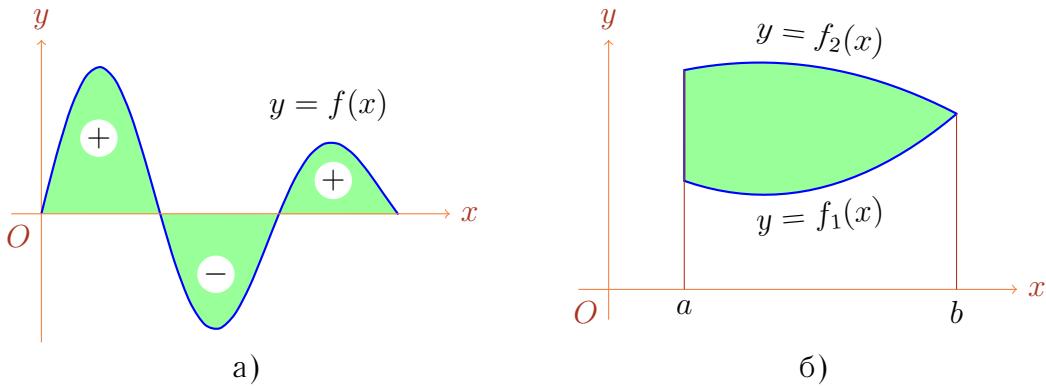


Рис. 1. К площади фигуры.

Иногда выгоднее интегрировать не по переменной x , а по переменной y , считая ее независимой переменной, а функцией — переменную x . Тогда площадь фигуры, изображенной на рис. 2, а), выразится формулой

$$S = \int_c^d [\varphi_2(y) - \varphi_1(y)] dy, \quad \varphi_1(y) \leq \varphi_2(y). \quad (2)$$

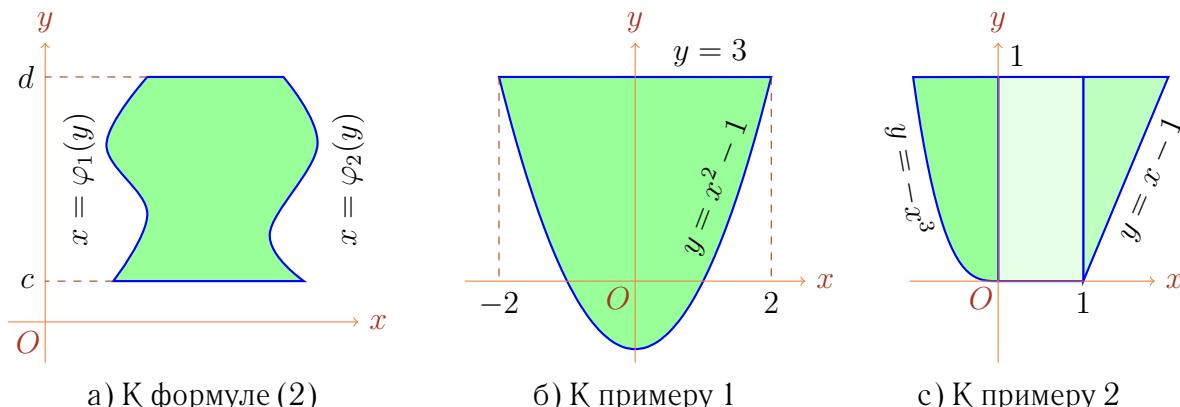


Рис. 2.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, заключенной между графиками функций $y = x^2 - 1$ и $y = 3$, рис. 2, б).

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения графиков функций:

$$x^2 - 1 = 3, \quad x^2 = 4, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 2.$$

По формуле (1) получаем площадь заданной фигуры:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 [3 - (x^2 - 1)] dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \\ &= \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^2 = 16 - \frac{16}{3} = 10\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

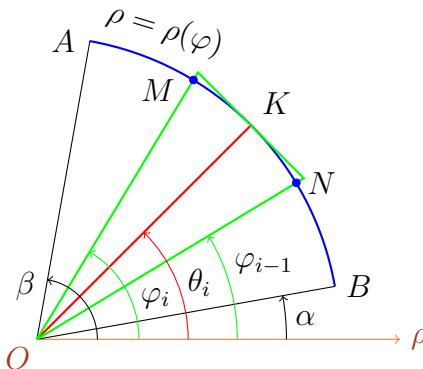
Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = -x^3$, $y = x - 1$, $y = 0$, $y = 1$, рис. 2, с).

Решение. Чтобы применить формулу (1), фигуру пришлось бы разбить на три части, показанные на рис. 2, с) оттенками зеленого, и найти площади этих частей отдельно, интегрируя по отрезкам $[-1; 0]$, $[0; 1]$, $[1; 2]$. Поступим по-другому, представив первые два уравнения границ заданной фигуры в виде $x = -\sqrt[3]{y}$, $x = y + 1$, и используем формулу (2):

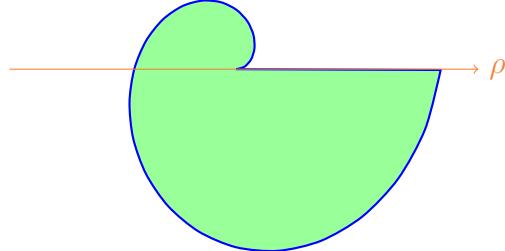
$$S = \int_0^1 (y + 1 + \sqrt[3]{y}) \, dy = \left(\frac{y^2}{2} + y + \frac{3y^{4/3}}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

1.2 Площадь в полярной системе координат

Пусть требуется найти площадь криволинейного сектора AOB , ограниченного в полярной системе координат (ρ, φ) лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\varphi)$, причем, функция $\rho(\varphi)$ непрерывна при $\alpha \leq \rho \leq \beta$, рис. 3, а).



а) К выводу формулы (3)



б) К примеру 3

Рис. 3. Площадь в полярной системе координат.

Разобьем сектор AOB полярными радиусами $\varphi = \varphi_0 = \alpha$, $\varphi = \varphi_1, \dots$, $\varphi = \varphi_n = \beta$ на n частей. Рассмотрим i -ю часть OMN , в которой ON соответствует угол $\varphi = \varphi_{i-1}$, а OM — угол $\varphi = \varphi_i$. Приблизим площадь OMN площадью равнобедренного треугольника (обозначен зеленым), который получится, если в точку K кривой провести луч OK , которому соответствует угол $\varphi = \theta_i = (\varphi_{i-1} + \varphi_i)/2$, а затем провести прямую, проходящую через точку K перпендикулярно OK , и продолжить лучи OM и ON до пересечения с этой прямой. Приближенное значение площади сектора OMN будет таким:

$$S_i \approx \frac{1}{2} \cdot OM \cdot ON \cdot \sin(\varphi_i - \varphi_{i-1}).$$

Обозначим $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ и заметим, что при малой длине дуги \mathcal{MN} выполняется $OM \approx OK = \rho(\theta_i)$, $ON \approx OK$, $\sin \Delta\varphi_i \approx \Delta\varphi_i$. Значит,

$$S_{OMN} \approx \frac{1}{2} \rho^2(\theta_i) \Delta\varphi_i, \quad S_{OAB} \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho^2(\theta_i) \Delta\varphi_i.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ и $\max_i \Delta\varphi_i \rightarrow 0$, получим, что

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi. \quad (3)$$

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда $\rho = k\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, рис. 3, б).

Решение. В соответствии с полученной формулой имеем

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (k\varphi)^2 d\varphi = \frac{k^2 \varphi^3}{6} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} k^2 \pi^3.$$

1.3 Площадь для параметрически заданной функции

Пусть кривая, ограничивающая фигуру, задана в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $0 \leq t \leq T_0$, причем, функции $x(t)$, $x'(t)$, $y(t)$, $y'(t)$ непрерывны. Рассмотрим тот случай, когда граница фигуры представляет собой замкнутый контур, т. е. кривую, не имеющую самопересечений, начало которой совпадает с ее концом. Тогда из формулы площади криволинейной трапеции $S = \int_a^b f(x) dx$, $f(x) \geq 0$, можно получить¹⁾, что в рассматриваемом случае площадь плоской фигуры выражается одной из трех формул:

$$S = - \int_{t_0}^T y x'_t dt, \quad S = \int_{t_0}^T x y'_t dt, \quad S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (x y'_t - x'_t y) dt, \quad (4)$$

если при изменении параметра t от t_0 до T направление обхода границы будет положительным, т.е. фигура будет оставаться слева от линии обхода.

Пример 4. Найти площадь, ограниченную одной аркой циклоиды $x = R(t - \sin t)$, $y = R(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, рис. 4.

Решение. Вычислим производную $x'(t) = R(1 - \cos t)$ и отметим, что первая арка циклоиды будет проходиться в положительном направлении при изменении t от 2π до 0, а затем снова до 2π . Применим первую из формул (4):

$$\begin{aligned} S &= - \int_{2\pi}^0 R^2 (1 - \cos t)^2 dt = R^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = \\ &= R^2 \left[(t - 2 \sin t) \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt \right] = \end{aligned}$$

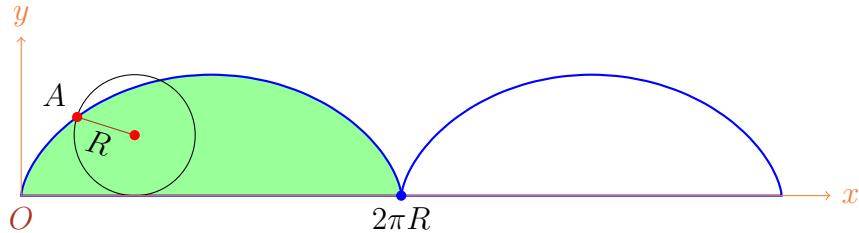


Рис. 4. Площадь одной арки циклоиды.

$$= R^2 \left[2\pi + \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} \right] = 3\pi R^2.$$

Таким образом, площадь одной арки циклоиды в три раза больше площади окружности, точка A которой чертит эту циклоиду, когда окружность катится вдоль оси Ox .

Пример 5. Вычислить площадь эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Решение. Эллипс проходится в положительном направлении, когда параметр t изменяется 0 до 2π . По третьей из формул (4), учитывая, что $x' = -a \sin t$, $y' = b \cos t$, находим искомую площадь:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos t \cos t + ab \sin t \sin t) dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

При $a = b = R$ получаем площадь круга $S = \pi R^2$.

2 Вычисление объема тела вращения

2.1 Использование поперечных сечений

Предположим, что площадь любого сечения тела плоскостью, параллельной плоскости yOz , можно выразить через координату x , в которой плоскость пересекает ось абсцисс. Будем считать такое сечение $Q(x)$ непрерывной функцией x . Разобьем тело на слои плоскостями $x = a = x_0$, $x = x_1, \dots, x = b = x_n$ (рис. 5). Рассмотрим i -й слой, для которого $x_{i-1} \leq x \leq x_i$. Его объем приближенно равен объему цилиндра $Q(x_i) \Delta x_i$ высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Тогда объем всего тела

$$V \approx \sum_{i=1}^n Q(x_i) \Delta x_i.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$, получим, что

$$V = \int_a^b Q(x) dx. \quad (5)$$

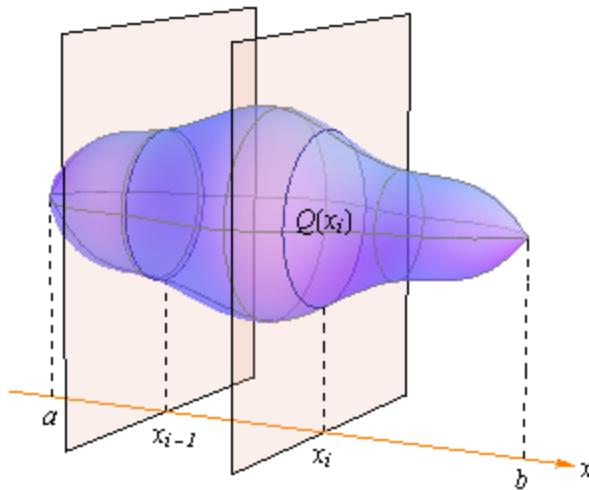


Рис. 5. Метод поперечных сечений.

Пример 6. Найти объем тела, образованного цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = a^2$ и плоскостью, проходящей через диаметр основания цилиндра под углом α к нему (рис. 6).

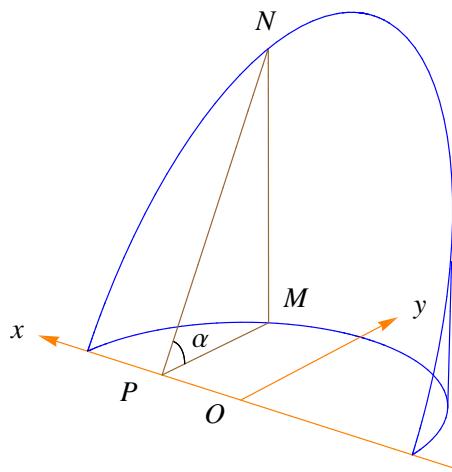


Рис. 6. К примеру 6.

Решение. Возьмем на оси абсцисс точку $P(x, 0, 0)$, $-a \leq x \leq a$, и произведем через нее сечение тела плоскостью, параллельной плоскости yOz ; получим прямоугольный треугольник PMN , $M(x, \sqrt{a^2 - x^2}, 0)$. Его площадь равна $Q(x) = \frac{1}{2}PM \cdot MN = \frac{1}{2}MN^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}(a^2 - x^2) \operatorname{tg} \alpha$. Вычислим объем по формуле (5):

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-a}^a = \\ &= \left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} a^3 \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

2.2 Декартова система координат

Пусть криволинейная трапеция $aABb$ вращается вокруг оси Ox (рис. 7). В этом случае сечение тела плоскостью, параллельной плоскости yOz , является кругом, площадь которого равна $Q(x) = \pi f^2(x)$, где $y = f(x)$ – уравнение кривой AB . В соответствии с предыдущим объем тела выразится формулой

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (6)$$

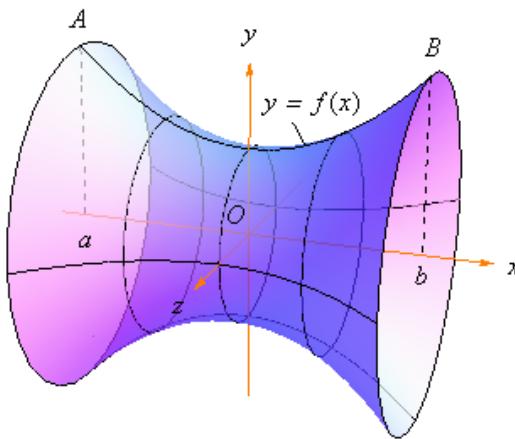


Рис. 7. Объем тела вращения в декартовой системе координат.

Если же вращение кривой, например, $x = \varphi(y)$, $c \leq y \leq d$, происходит вокруг оси ординат, то объем тела вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy.$$

Пример 7. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $y = (x - 1)^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, рис. 8.

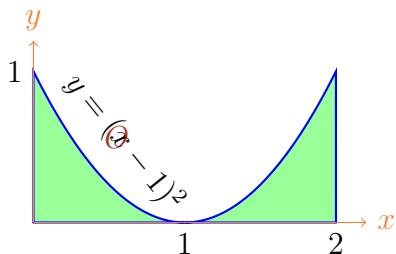


Рис. 8. К примеру 7.

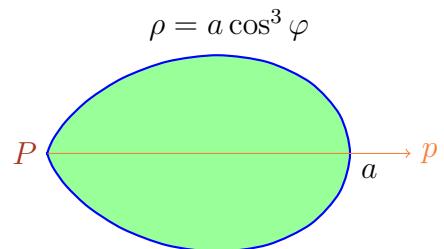


Рис. 9. К примеру 8.

Решение. По формуле (6) получаем

$$V = \pi \int_0^2 (x-1)^4 dx = \pi \left. \frac{(x-1)^5}{5} \right|_0^2 = \pi \left[\frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{5} \right) \right] = \frac{2\pi}{5}.$$

2.3 Полярная система координат

Пусть функция $\rho = \rho(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$. Тогда объем тела, образованного вращением сектора $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, $0 \leq \rho \leq \rho(\varphi)$, вокруг полярного луча (рис. 10, а)), равен²⁾

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi. \quad (7)$$

Пусть функция $\rho = \rho(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, $-\pi/2 \leq \alpha < \beta \leq \pi/2$. Докажите, что объем тела, образованного вращением сектора $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, $0 \leq \rho \leq \rho(\varphi)$, вокруг луча $\varphi = \pi/2$ (рис. 10, б)), равен³⁾

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi) \cos \varphi d\varphi. \quad (8)$$

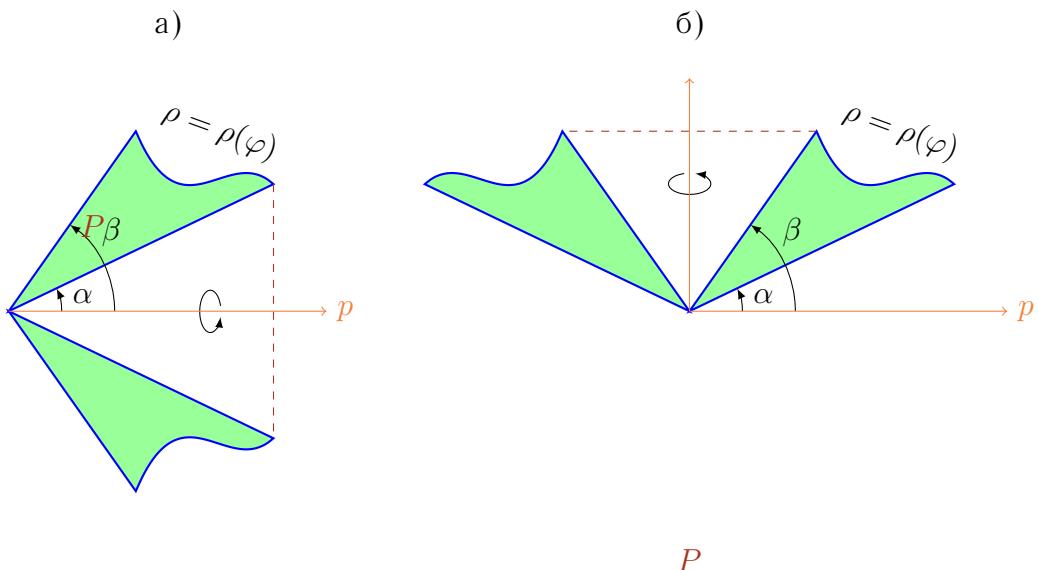


Рис. 10. Вращение кривой в полярной системе координат.

Пример 8. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг полярного луча фигуры $0 \leq \rho \leq a \cos^3 \varphi$, рис. 9.

Решение. Так как по условию $a \cos^3 \varphi \geq 0$, то $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ или $-\pi/2 \leq \varphi \leq 0$. В силу симметрии фигуры достаточно произвести вычисления для $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ и результат

удвоить. Используем формулу (7):

$$\begin{aligned} V &= 2 \cdot \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/2} a^3 \cos^9 \varphi \sin \varphi d\varphi = \langle u = \cos \varphi, du = -\sin \varphi d\varphi \rangle = \\ &= -\frac{4\pi a^3}{3} \int_1^0 u^9 du = -\frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{u^{10}}{10} \Big|_1^0 = \frac{2\pi a^3}{15}. \end{aligned}$$

2.4 Параметрическое задание линии вращения

Если линия вращения задана параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \leq t \leq T$, причем, $x'(t)$ и $y'(t) \geq 0$ непрерывны на отрезке $[t_0, T]$, то объем тела вращения можно найти по формуле

$$V = \pi \int_{t_0}^T y^2(t) x'(t) dt, \quad (9)$$

причем, при изменении t от t_0 до T функция $x(t)$ возрастает⁴⁾.

Пример 9. Найти объем эллипсоида вращения, полученного вращением эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ вокруг оси Ox .

Решение. При изменении параметра t от π до 0 функция $x(t) = a \cos t$ возрастает, поэтому искомый объем тела вращения будет таким:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\pi}^0 ab^2 \sin^2 t (-\sin t) dt = -\pi ab^2 \int_{\pi}^0 (1 - \cos^2 t) \sin t dt = \\ &= \langle z = \cos t, dz = -\sin t dt \rangle = \pi ab^2 \int_{-1}^1 (1 - z^2) dz = \pi ab^2 \left(z - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3} \pi ab^2. \end{aligned}$$

Как следствие получаем объем шара радиуса $R = a = b$:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

3 Площадь поверхности вращения

3.1 Декартова система координат

Пусть кривая \mathcal{AB} , имеющая уравнение $y = f(x)$, вращается вокруг оси Ox . Разобьем \mathcal{AB} на части и впишем в нее ломаную так, как это было сделано при изучении длины дуги кривой[†] (рис. 11). **Площадью поверхности тела** называется предел, к которому стремится площадь поверхности, образованной вращением вписанной в дугу ломаной, при $n \rightarrow \infty$, $\max_k \Delta x_k \rightarrow 0$, если этот предел существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части.

Чтобы найти площадь поверхности вращения, заметим, что каждая трапеция $x_{k-1}A_{k-1}A_kx_k$ при вращении опишет усеченный конус, площадь боковой

[†]Лекция «Длина дуги и кривизна кривой».

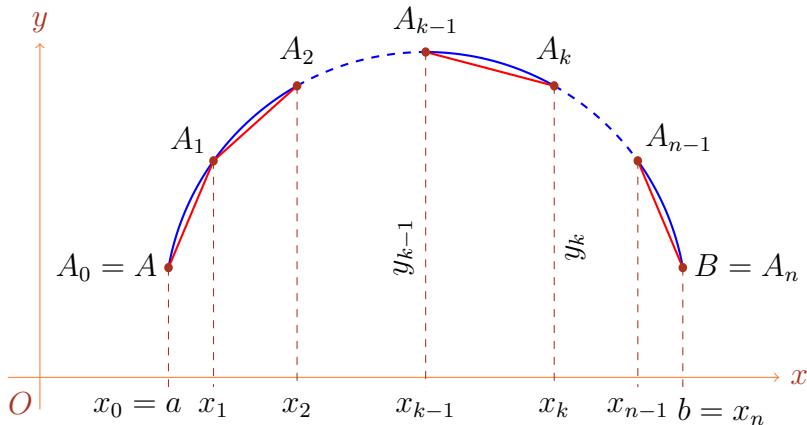


Рис. 11. К выводу формулы (10).

поверхности которого, как известно из школьного курса математики, равна $S_k = \pi(r_1 + r_2)l$, где r_1, r_2 – радиусы оснований конуса, l – длина его образующей. В данном случае $r_1 = y_{k-1} = f(x_{k-1})$, $r_2 = y_k = f(x_k)$, $l = A_{k-1}A_k$, поэтому

$$S_k = \pi(y_{k-1} + y_k)A_{k-1}A_k.$$

Так же, как при выводе формулы длины дуги в декартовых координатах, можно получить, что $A_{k-1}A_k = \sqrt{1 + f'(c_k)^2}\Delta x_k$, $x_{k-1} < c_k < x_k$. Кроме того, при малых Δx_k можно считать, что $y_{k-1} \approx y_k \approx f(c_k)$. Следовательно, площадь S_k представима в виде

$$S_k = 2\pi f(c_k) \sqrt{1 + f'^2(c_k)} \Delta x_k,$$

а площадь поверхности вращения приближенно равна

$$S \approx 2\pi \sum_{i=1}^n f(c_k) \sqrt{1 + f'^2(c_k)} \Delta x_k.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ и $\max_k A_{k-1}A_k \rightarrow 0$, получим точное значение площади поверхности вращения

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (10)$$

3.2 Кривая вращения в параметрической форме

Если кривая \mathcal{AB} задана в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t) \geq 0$, $t_0 \leq t \leq T_0$, то площадь поверхности вращения находят по формуле⁵⁾

$$S = 2\pi \int_{t_0}^T y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \quad (11)$$

Пример 10. Найти площадь поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Решение. Будем считать, что сфера образована вращением вокруг оси абсцисс полуокружности $x(t) = R \cos t$, $y(t) = R \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$; тогда $x'(t) = -R \sin t$, $y'(t) = R \cos t$. Применим формулу (11):

$$S = 2\pi \int_0^\pi R \sin t \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = 2\pi R^2 (-\cos t) \Big|_0^\pi = 4\pi R^2.$$

3.3 Полярные координаты

Если кривая \mathcal{AB} задана в полярных координатах

$$\rho = \rho(\varphi), \quad 0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi,$$

то формула для площади поверхности вращения принимает вид

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho(\varphi) \sin \varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi. \quad (12)$$

В самом деле, выбрав в формуле (11) в качестве параметра t полярный угол φ и задав координатные функции в виде $x(\varphi) = \rho(\varphi) \cos \varphi$, $y(\varphi) = \rho(\varphi) \sin \varphi$, получим, как было показано на лекции «Длина дуги и кривизна кривой», что $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi$. Отсюда уже, очевидно, следует формула (12).

Примеры вычисления площадей поверхностей вращения с помощью системы *Mathematica* приведены в Приложении⁶⁾.

Приложение

1) На рис. 12 изображена фигура, ограниченная контуром, заданным в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \leq t \leq T$, причем, при изменении параметра t от t_0 до T контур проходится один раз в положительном направлении. Пусть верхняя часть границы может быть записана в виде явной функции $y = f_2(x)$, а нижняя — в виде функции $y = f_1(x)$, и пусть $x(t_0) = x(T) = a$, $x(\tau) = b$.

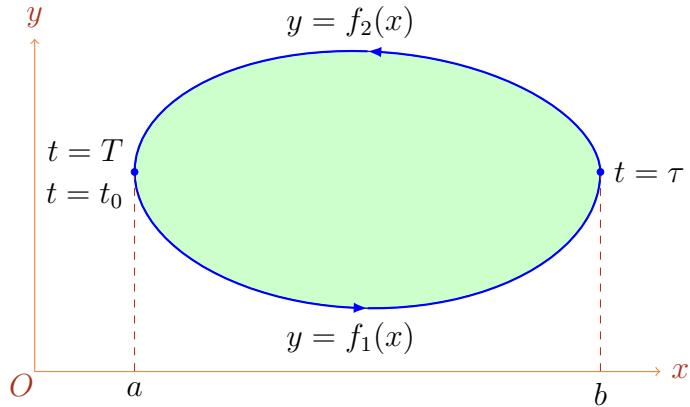


Рис. 12.

По формуле (1) площадь рассматриваемой фигуры равна

$$S = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx.$$

Сделав в первом интеграле замену $x = x(t)$, $dx = x'(t) dt$, $x(T) = a$, $x(\tau) = b$, получим интеграл $\int_T^\tau y(t)x'(t) dt$. Если во втором интеграле сделать такую же замену, то он примет вид $\int_{t_0}^\tau y(t)x'(t) dt$, так как теперь $x(t_0) = a$. В результате получим, что площадь

$$S = \int_T^\tau y(t)x'(t) dt - \int_{t_0}^\tau y(t)x'(t) dt = - \int_{t_0}^\tau y(t)x'(t) dt - \int_\tau^T y(t)x'(t) dt = - \int_{t_0}^T y(t)x'(t) dt.$$

Это — первое из равенств (4). Спроектировав нашу фигуру на ось Ox и повторив выкладки, придем ко второму равенству в (4). Третье равенство получим, сложив первые два и разделив в новом равенстве обе части на 2.

2) Чтобы вывести формулу (7), получим сначала формулу объема шарового сегмента, которым называется часть шара, отсеченная от него плоскостью. На рис. 13, а) показано центральное сечение шара, на котором его часть, соответствующая шаровому сегменту, отмечена зеленым цветом. На рис. R — радиус шара, h — так называемая стрелка. Найдем объем шарового сегмента как объем тела вращения по формуле (6), где $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$:

$$\begin{aligned} V_{\text{сегм}} &= \pi \int_{R-h}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{R-h}^R = \\ &= \pi \left[R^3 - R^2(R-h) - \frac{R^3}{3} + \frac{(R-h)^3}{3} \right] = \pi \left(R^2 h + \frac{-3R^2 h + 3Rh^2 - h^3}{3} \right) = \\ &= \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right). \end{aligned}$$

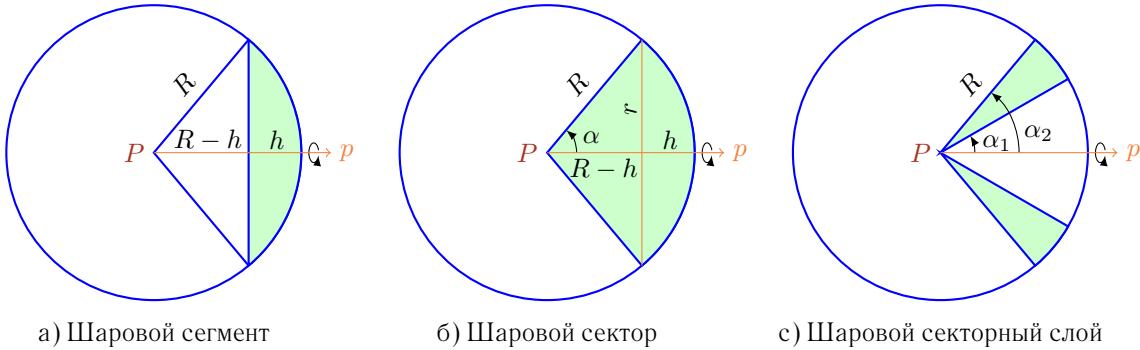


Рис. 13. Сечения частей шара.

Теперь нам понадобится объем шарового сектора, который является частью шара, находящегося внутри конуса вращения с вершиной в центре шара. Конус пересекает шар по окружности радиуса r , причем, эта окружность разделяет шаровой сектор на две составляющие: шаровой сегмент со стрелкой h и прямой круговой конус высоты $h_{\text{кон}} = R - h$ (рис. 13, б)). Таким образом, чтобы найти объем шарового сегмента, надо вычислить объемы этих составляющих и результаты сложить. Объем шарового сегмента мы уже вычислили, а объем конуса, как известно, равен $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h_{\text{кон}}$, где $S_{\text{осн}}$ – площадь основания конуса. Радиус основания найдем по теореме Пифагора: $r = \sqrt{R^2 - (R - h)^2} = \sqrt{2Rh - h^2}$. Тогда $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi (2Rh - h^2)(R - h)$, и, следовательно, объем шарового сектора равен

$$\begin{aligned} V_{\text{сект}} &= V_{\text{сегм}} + V_{\text{кон}} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) + \frac{1}{3} \pi (2Rh - h^2)(R - h) = \\ &= \cancel{\pi Rh^2} - \frac{1}{3} \cancel{\pi h^3} + \frac{2}{3} \pi R^2 h - \cancel{\frac{2}{3} \pi Rh^2} - \cancel{\frac{1}{3} \pi Rh^2} + \cancel{\frac{1}{3} \pi h^3} = \\ &= \frac{2}{3} \pi R^2 h. \end{aligned} \quad (\text{П1})$$

Из треугольника видно, что длину стрелки можно выразить через радиус шара и угол α между осью конуса и его образующей: $h = R - R \cos \alpha = 2R \sin^2 \frac{\alpha}{2}$. Подставляя это выражение в равенство (П1), получаем еще одну формулу объема шарового сектора:

$$V_{\text{сект}} = \frac{4\pi}{3} R^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (\text{П2})$$

Далее найдем объем тела, которое является частью шара, заключенного между двумя шаровыми секторами. Фактически он образуется вращением вокруг полярного радиуса сектора круга (рис. 13, с)). Пусть меньшему сектору соответствует угол α_1 между осью и образующей конуса, который формирует этот сектор, а большему сектору – угол α_2 . Тогда искомый объем с помощью формулы (П2) выразится следующим образом:

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3 \left(\sin^2 \frac{\alpha_2}{2} - \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} \right). \quad (\text{П3})$$

Перейдем непосредственно к выводу формулы (7). Разобьем фигуру, которую ограничивает кривая, вращающаяся вокруг полярного луча, на секторы лучами, как это показано на рис. 3, а). Рассмотрим криволинейный сектор OMN , вращающийся вокруг полярного радиуса. При малой длине дуги MN этот криволинейный сектор можно приближенно считать сектором круга радиуса $OK = \rho(\theta_i)$, ограниченным лучами $\varphi = \varphi_{i-1}$ и $\varphi = \varphi_i$. Следовательно, объем тела, получаемого вращением криволинейного сектора OMN , выразится формулой

(П3):

$$V_i \approx \frac{4\pi}{3} \rho^3(\theta_i) \left(\sin^2 \frac{\varphi_i}{2} - \sin^2 \frac{\varphi_{i-1}}{2} \right).$$

Преобразуем это выражение, используя формулу Лагранжа для функции $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$:

$$V_i \approx \frac{4\pi}{3} \rho^3(\theta_i) \sin \frac{\psi_i}{2} \cos \frac{\psi_i}{2} (\varphi_i - \varphi_{i-1}) = \frac{2\pi}{3} \rho^3(\theta_i) \sin \psi_i \Delta \varphi_i, \quad \varphi_{i-1} < \psi_i < \varphi_i.$$

При малой длине дуги MN можно положить $\psi_i \approx \theta_i$, что приведет нас к формуле

$$V_i \approx \frac{2\pi}{3} \rho^3(\theta_i) \sin \theta_i \Delta \varphi_i,$$

из которой следует, что объем всего тела вращения приближенно равен

$$V \approx \frac{2\pi}{3} \sum_{i=1}^n \rho^3(\theta_i) \sin \theta_i \Delta \varphi_i.$$

Полученная типично интегральная сумма после перехода к пределу и даст формулу (7).

3) Для доказательства формулы (8) дополнительно к полярной системе координат (ρ, φ) введем еще одну полярную систему координат (ρ', φ') с тем же самым полюсом P и полярной осью p' , направленной перпендикулярно полярной оси p (рис. 14). Построим кривую $\rho' = \rho'(\varphi')$, отразив кривую $\rho = \rho(\varphi)$, вращающуюся вокруг оси p' , зеркально относительно этой оси. Координаты симметричных относительно оси p' точек кривых (ρ, φ) и (ρ', φ') будут связаны равенствами $\rho = \rho'$, $\varphi + \varphi' = \frac{\pi}{2}$.

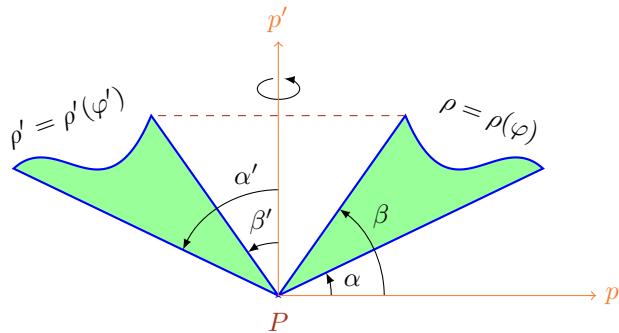


Рис. 14. К доказательству формулы (8).

Понятно, что вращение кривой $\rho = \rho(\varphi)$ вокруг оси p' и вращение кривой $\rho' = \rho'(\varphi')$ вокруг той же оси дают в результате одно и то же тело вращения. Поэтому по формуле (7) объем такого тела равен

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\beta'}^{\alpha'} \rho'^3(\varphi') \sin \varphi' d\varphi'. \quad (\text{П4})$$

Так как для углов, ограничивающих вращающиеся фигуры, выполняется $\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2}$, $\beta + \beta' = \frac{\pi}{2}$, то

$$\rho(\varphi) = \rho'(\varphi') = \rho \left(\frac{\pi}{2} - \varphi' \right);$$

в свете чего и перепишем формулу (П4):

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\beta'}^{\alpha'} \rho^3 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi' \right) \sin \varphi' d\varphi'.$$

Сделав замену $\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $d\varphi' = -d\varphi$, получим

$$V = -\frac{2\pi}{3} \int_{\frac{\pi}{2}-\beta'}^{\frac{\pi}{2}-\alpha'} \rho^3(\varphi) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) d\varphi = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi) \cos\varphi d\varphi,$$

что и требовалось доказать.

4) Объем тела вращения (6) можно интерпретировать как площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху неотрицательной функцией $g(x) = \pi f^2(x)$, поэтому применима первая из формул (4), которая в данном случае принимает вид

$$V = -\pi \int_{t_0}^T y^2(t) x'(t) dt. \quad (\text{П5})$$

Здесь подразумевается, что при изменении t от t_0 до T граница криволинейной трапеции проходится в положительном направлении. Предположим, что при изменении t от t_0 до T функция $x(t)$ возрастает, тогда криволинейная трапеция при том, что $g(x) \geq 0$, обходится в отрицательном направлении. Поэтому перед интегралом в (П5) в этом случае следует поменять знак на противоположный. Это и дает формулу (9).

5) Равенство (10) также можно считать формулой площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху неотрицательной функцией $h(x) = 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}$ (в предположении, что $f(x) \geq 0$). Следовательно, можно при переходе к параметрическому представлению кривой вращения снова выбрать первую из формул (4), которая для функции $h(x)$ запишется в виде[†]

$$S = -2\pi \int_{t_0}^T y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \frac{x'(t)}{|x'(t)|} dt. \quad (\text{П6})$$

По-прежнему предполагается, что при изменении t от t_0 до T граница криволинейной трапеции проходится в положительном направлении.

Обозначим $\alpha(t) = x'(t)/|x'(t)|$ и пусть $t_0 \leq t \leq T$ и $x'(t) > 0$. Тогда на отрезке $[t_0, T]$ функция $x(t)$ возрастает, и, значит, при изменении t от t_0 до T граница криволинейной трапеции проходится в отрицательном направлении, откуда следует, что знак перед интегралом (П6) надо поменять на противоположный. Так как при этом $\alpha(t) = 1$, то получаем формулу (11).

Если же $t_0 \leq t \leq T$ и $x'(t) < 0$, то граница проходится в положительном направлении, и знак перед интегралом (П6) не меняется, но $\alpha(t) = -1$. В результате знак все-таки меняется и снова приходим к формуле (11).

Замечание 1. Мораль сей басни такова. Помнить все тонкости выбора знака перед интегралом и правильной расстановки пределов интегрирования надо в двух случаях. Студенту – для сдачи экзамена, зачета и т. п., инженеру-исследователю – для научного обоснования себе и коллегам собственных изысканий, сопряженных с использованием определенных интегралов для вычисления площадей и объемов. Всем прочим можно руководствоваться простым правилом: если площадь или объем получились отрицательными, надо поменять местами пределы интегрирования.

6) В Приложении к лекции «Длина дуги и кривизна кривой» было показано, как находить геометрические характеристики кривых либо создавая универсальные функции для их вычисления, либо сводя все задания кривых к их параметрическому представлению. Поскольку на текущей лекции в формировании геометрических объектов главную роль тоже играли кривые, те же построения можно применить и в данном случае.

[†]Лекция «Длина дуги и кривизна кривой».

Поэтому не станем на этом останавливаться, а только приведем несколько примеров вычисления площадей поверхностей вращения, на рассмотрение которых не хватило лекционного времени. Возьмем тела вращения из примеров 7, 8 и 9 и найдем площади их поверхностей, используя систему *Mathematica*.

Для примера 7:

$$\begin{aligned} f[x_] &:= (x - 1)^2 \\ 2\pi \int_0^2 f[x] \sqrt{1 + (f'[x])^2} dx // \text{TrigToExp} \\ \frac{9\sqrt{5}\pi}{8} - \frac{1}{16}\pi \text{Log}[2 + \sqrt{5}] \end{aligned}$$

Для примера 8:

$$\begin{aligned} \rho[\varphi_-] &:= a \cos[\varphi]^3 \\ \text{Assuming}\left[a > 0, 4\pi \int_0^{\pi/2} \rho[\varphi] \sin[\varphi] \sqrt{\rho[\varphi]^2 + (\rho'[\varphi])^2} d\varphi\right] \\ \frac{313a^2\pi}{280} \end{aligned}$$

Для примера 9:

$$\begin{aligned} x[t_] &:= a \cos[t] \\ y[t_] &:= a \sin[t] \\ \text{Assuming}\left[a > b \& b > 0, 4\pi \int_0^{\pi/2} y[t] \sqrt{(x'[t])^2 + (y'[t])^2} dt\right] // \text{FullSimplify} \\ 2b\pi \left(b + \frac{a^2 \text{ArcCos}\left[\frac{b}{a}\right]}{\sqrt{(a-b)(a+b)}}\right) \end{aligned}$$

При $a = b = R$ получим площадь поверхности сферы радиуса R :

$$\begin{aligned} x[t_] &:= R \cos[t] \\ y[t_] &:= R \sin[t] \\ \text{Assuming}\left[R > 0, 4\pi \int_0^{\pi/2} y[t] \sqrt{(x'[t])^2 + (y'[t])^2} dt\right] \\ 4\pi R^2 \end{aligned}$$

Попробуйте вычислить эти площади вручную⁷⁾.

Для решения некоторых задач бывает полезно сделать изображение тела в трехмерном пространстве. Текущая лекция была, например, проиллюстрирована рис. 5 и 7, выполненными в системе *Mathematica*. Приведем набор ее операторов, создающих эти рис.

Для рис. 5 было выбрано тело вращения, во-первых, потому что в системе *Mathematica* его проще нарисовать в трехмерном пространстве, чем тело более произвольной формы, а, во-вторых, потому, что трехмерные окружности при изображении на плоскости все равно превратятся в эллипсы, и в результате никто не сможет утверждать, что изображено именно тело вращения, а не что-нибудь другое.

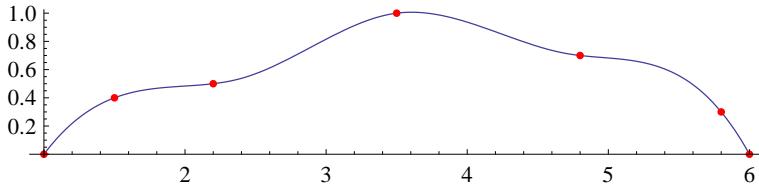
Вначале зададим точки, через которые должна пройти вращающаяся вокруг некоторой оси кривая:

$$\text{data} = \{\{1, 0\}, \{1.5, 0.4\}, \{2.2, 0.5\}, \{3.5, 1\}, \{4.8, 0.7\}, \{5.8, 0.3\}, \{6, 0\}\};$$

С помощью оператора *Interpolation* построим интерполяционную функцию, которую назовем f и отметим, что ее явный вид нам не понадобится, а опция *Method* со значением "Spline"

обеспечит плавное изменение графика функции. Нарисуем этот график, на который нанесем и выбранные нами точки:

```
f = Interpolation[data, Method → "Spline"];
plot1 = Plot[f[x], {x, 1, 6}, AspectRatio → Automatic];
plot2 = ListPlot[data, PlotStyle → Red];
Show[plot1, plot2]
```



Кривая выглядит вполне презентабельно, так что можно ее использовать для построения тела вращения.

Основным графическим оператором выберем `RevolutionPlot3D`, специально предназначенный для изображения тел вращения; используем также примитив `Polygon` для построения секущих плоскостей. Добавив еще порядочное количество операторов и опций, получим небольшую программу, которая и сформирует нам рис. 5:

```
a = 2; b = 1.75; x1 = 3; x2 = 4.7;
st[str_] := Style[str, "Times", Italic, 14];
plot1 = RevolutionPlot3D[{f[t], t}, {t, 1, 6}, Mesh → 3, MeshStyle → Gray,
  Axes → None, Boxed → False, PlotStyle → {Glow[Blue], Opacity[0.5]},
  ViewPoint → {-0.531, 2.939, -1.590}, ViewVertical → {-1.750, 0.02, -0.003},
  PlotRange → {{-2, 2}, {-2, 2}, {0, 7}}];
plot2 = Graphics3D[{Text[st["a"], {2.2, 0, 6}], Text[st["b"], {2.2, 0, 1}],
  Text[st["x"], {2, 0, 0.4}], Text[st["x'_i"], {2.2, 0, x1}],
  Text[st["x'_{i-1}"], {2.2, 0, x2 - 0.1}], Orange, Thickness[0.002], Arrowheads[.02],
  Arrow[{ {2, 0, 6.5}, {2, 0, 0.5}}], LightBlue, Opacity[0.2],
  Polygon[{{-b, -b, x1}, {-b, b, x1}, {a, b, x1}, {a, -b, x1}}]}];
plot3 = ParametricPlot3D[{f[x1] Cos[t], f[x1] Sin[t], x1}, {t, 0, 2π}];
plot4 = Graphics3D[{Text[st["Q(x_i)"], {0, 0, x1}], Dashed,
  Line[{{2, 0, x1}, {f[x1], 0, x1}}], Line[{{2, 0, x2}, {f[x2], 0, x2}}],
  Line[{{2, 0, 1}, {0, 0, 1}}], Line[{{2, 0, 6}, {0, 0, 6}}], LightBlue, Opacity[0.2],
  Polygon[{{-b, -b, x2}, {-b, b, x2}, {a, b, x2}, {a, -b, x2}}]}];
plot5 = ParametricPlot3D[{f[x2] Cos[t], f[x2] Sin[t], x2}, {t, 0, 2π}];
Show[plot1, plot2, plot3, plot4, plot5]
```

Объясним некоторые особенности приведенных операторов. Опция `Mesh → 3` ограничивает рисование координатной сетки на поверхности тремя кривыми; опция `MeshStyle → Gray` задает серым цвет этот сетки; опции `Axes → None` и `Boxed → False` обеспечивают отсутствие на рис. стандартного координатного параллелепипеда.

Mathematica определяет окончательный вид поверхности с помощью подсветки, отражения и свечения. Команда `Glow[Blue]` приводит к свечению поверхности голубым цветом. Опция `ViewPoint` задает точку обзора поверхности, `ViewVertical` — направление, которое при обзоре будет считаться вертикальным, а `Thickness` — толщину рисуемых линий.

Для рис. 7:

```

f[x_] := 1 + 0.25 x^2;
st[str_] := Style[str, "Times", Italic, 16];
plot1 = RevolutionPlot3D[{f[t], t}, {t, -2, 2}, Mesh → 3, MeshStyle → Black,
  AxesLabel → {x, y, z}, Axes → None, Boxed → False,
  PlotStyle → {Glow[Blue], Opacity[0.7]}, ViewPoint → {1.154, 3.034, 0.954},
  ViewVertical → {1.5, 0.313, 0.0701},
  PlotRange → {{-2.3, 2.5}, {-2.3, 2.3}, {-2.3, 3}}];
plot2 = Graphics3D[{Text[st["a"], {-0.3, 0, -2}], Text[st["b"], {-0.25, 0, 2}],
  Text[st["x"], {0, 0, 3}], Text[st["y"], {2.3, 0, 0}], Text[st["z"], {0, 2.2, 0}],
  Text[st["0"], {0.1, 0, -0.2}], Text[st["A"], {2.3, 0, -2}],
  Text[st["B"], {2.3, 0, 2}], Text[st["y = f(x)"], {1.6, 0, 0.7}], Orange,
  Thickness[0.002], Arrowheads[.02], Arrow[{{0, 0, -2.3}, {0, 0, 2.8}}],
  Arrow[{{0, -2, 0}, {0, 1.8, 0}}], Arrow[{{-2, 0, 0}, {2, 0, 0}}], LightBlue,
  Opacity[0.2]}];
plot4 = Graphics3D[{Line[{{1.35, 0, 0.5}, {1.1, 0, 0.65}}], Dashed,
  Line[{{f[-2], 0, -2}, {0, 0, -2}}], Line[{{f[-2], 0, 2}, {0, 0, 2}}]}];
Show[plot1, plot2, plot4]

```

7) Стоит предупредить, что вычисление вручную площадей поверхностей вращения с помощью определенного интеграла – дело непростое. Возможно, далее предлагается не самый рациональный ход вычислений. Но, во-первых, на длинном пути больше возможностей поупражняться в интегрировании, а, во-вторых, есть повод еще раз восхититься тем, как эффективно избавляет нас *Mathematica* от рутинных выкладок.

Пример П1. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой

$$y = (x - 1)^2, 0 \leq x \leq 2$$

вокруг оси Ox .

Решение. Вычислим производную $y' = 2(x - 1)$ и применим формулу (10):

$$S = 2\pi \int_0^2 (x - 1)^2 \sqrt{1 + 4(x - 1)^2} dx.$$

Сделаем замену $z = x - 1, dz = dx$:

$$S = 2\pi \int_{-1}^1 z^2 \sqrt{1 + 4z^2} dz.$$

Получили интеграл от дифференциального бинома[†]. Найдем сначала неопределенный интеграл от такого бинома (опуская произвольную постоянную):

$$\begin{aligned}
 I &= 2\pi \int z^3 \sqrt{z^{-2} + 4} dz = 2\pi \int z^6 z^{-3} \sqrt{z^{-2} + 4} dz = \\
 &= \langle t^2 = z^{-2} + 4, 2t dt = -2z^{-3} dz \rangle = -2\pi \int \frac{t^2}{(t^2 - 4)^3} dt. \tag{П7}
 \end{aligned}$$

[†]Лекция «Интегрирование иррациональных функций»

Представим подынтегральную функцию в виде суммы простейших ДРФ с неопределенными коэффициентами и найдем последние:

$$\frac{t^2}{(t^2 - 4)^3} = \frac{A}{t-2}^{\wedge(t-2)^2(t+2)^3} + \frac{B}{(t-2)^2}^{\wedge(t-2)(t+2)^3} + \frac{C}{(t-2)^3}^{\wedge(t+2)^3} + \\ + \frac{D}{t+2}^{\wedge(t-2)^3(t+2)^2} + \frac{E}{(t+2)^2}^{\wedge(t-2)^3(t+2)} + \frac{F}{(t+2)^3}^{\wedge(t-2)^3}.$$

$$\begin{array}{l|l|l} t = -2 & -64F = 4 & F = -1/16 \\ t = 2 & 64C = 4 & C = 1/16 \\ t^5 & A + D = 0 & D = -A \\ t^0 & 32A - 16B + 8C - 32D - 16E - 8F = 0 & 64A - 16B - 16E = -1 \\ t = 1 & 27A - 27B + 27C - 9D - 3E - F = 1 & 36A - 27B - 3E = -3/4 \\ t = -1 & 9A - 3B + C - 27D - 27E - 27F = 1 & 36A - 3B - 27E = -3/4 \end{array}$$

$$A = -1/128, B = E = 1/64, C = 1/16, D = 1/128, F = -1/16.$$

Выполняя в (П7) интегрирование найденного разложения, получим

$$I = \frac{\pi}{16} \left[\frac{1}{4} \ln |t-2| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t-2} + \frac{1}{(t-2)^2} - \frac{1}{4} \ln |t+2| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+2} - \frac{1}{(t+2)^2} \right]$$

Так как

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+2} + \frac{1}{(t-2)^2} - \frac{1}{(t+2)^2} = \frac{t}{t^2-4} + \frac{8t}{(t^2-4)^2} = t \frac{t^2-4+8}{(t^2-4)^2} = \frac{t(t^2+4)}{(t^2-4)^2},$$

то

$$I = \frac{\pi}{16} \left[\frac{t(t^2+4)}{(t^2-4)^2} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| \right].$$

Сделав обратную замену $t = \sqrt{z^{-2} + 4}$, вернемся к переменной z :

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi}{16} \left[\frac{\sqrt{z^{-2} + 4}(z^{-2} + 8)}{z^{-4}} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{z^{-2} + 4} - 2}{\sqrt{z^{-2} + 4} + 2} \right| \right] = \\ &= \frac{\pi}{16} \left[\frac{(8z^2 + 1)\sqrt{1 + 4z^2}}{z \cdot z^{-4} \cdot z^2} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{1 + 4z^2} - 2z}{\sqrt{1 + 4z^2} + 2z} \right| \right] = \\ &= \frac{\pi}{16} \left[z(8z^2 + 1)\sqrt{1 + 4z^2} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{1 + 4z^2} - 2z}{\sqrt{1 + 4z^2} + 2z} \right| \right]. \end{aligned}$$

Вычислим искомую площадь поверхности вращения:

$$\begin{aligned} S &= J \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{16} 18\sqrt{5} + \frac{\pi}{64} \left[\ln \left| \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 2} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2} \right| \right] = \frac{\pi}{8} \left[9\sqrt{5} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2} \right| \right] = \\ &= \frac{\pi}{8} \left[9\sqrt{5} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{5} + 2) \right]. \end{aligned}$$

Пример П2. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой

$$\rho(\varphi) = a \cos^3 \varphi$$

вокруг полярной оси.

Решение. Найдем $\rho'(\varphi) = -3a \cos^2 \varphi \sin \varphi$ и воспользуемся формулой (12), взяв пределы интегрирования такими же, как в примере 8 (и удвоив интеграл):

$$\begin{aligned} S &= 4\pi \int_0^{\pi/2} a \cos^3 \varphi \sin \varphi \sqrt{a^2 \cos^6 \varphi + 9a^2 \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ &= 4\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^5 \varphi \sin \varphi \sqrt{\cos^2 \varphi + 9 \sin^2 \varphi} d\varphi = \langle z = \cos \varphi, dz = -\sin \varphi d\varphi \rangle = \\ &= -4\pi a^2 \int_1^0 z^5 \sqrt{9 - 8z^2} dz. \end{aligned}$$

Снова получили интеграл от дифференциального бинома. Вычислим его:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi a^2}{2} \int_1^0 (-8z) z^4 \sqrt{9 - 8z^2} dz = \\ &= \langle t^2 = 9 - 8z^2, 2t dt = -16z dz, z^2 = (9 - t^2)/8 \rangle = \\ &= \frac{\pi a^2}{2} \int_1^3 t^2 \frac{(9 - t^2)^2}{64} dt = \frac{\pi a^2}{128} \int_1^3 t^2 (81 - 18t^2 + t^4) dt = \\ &= \frac{\pi a^2}{128} \int_1^3 t^2 (81t^2 - 18t^4 + t^6) dt = \frac{\pi a^2}{128} \left(27t^3 - \frac{18t^5}{5} + \frac{t^7}{7} \right) \Big|_1^3 = \\ &= \frac{\pi a^2}{128} \left(27 \cdot 27 - \frac{18 \cdot 243}{5} + \frac{2187}{7} - 27 + \frac{18}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{313\pi a^2}{280}. \end{aligned}$$

Пример П3. Найти площадь поверхности эллипсоида вращения, образованного вращением эллипса $x = a \cos t, y = b \sin t, a > b$, вокруг оси абсцисс.

Решение. Обозначим $A = \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, вычислим производные: $x' = -a \sin t, y' = b \cos t$ и воспользуемся формулой (11):

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^\pi b \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = 2\pi ab \int_0^\pi \sin t \sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cos^2 t} dt = \\ &= \left\langle \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \cos t = \sin u, -\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \sin t dt = \cos u du \right\rangle = \\ &= -2\pi ab \int_A^{-A} \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cos u \sqrt{1 - \sin^2 u} du = \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \int_{-A}^A \cos^2 u du = \\ &= \frac{\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \int_{-A}^A (1 + \cos 2u) du = \frac{\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} (u + \sin u \cos u) \Big|_{-A}^A. \end{aligned}$$

Так как $\sin A = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, то $\cos^2 A = 1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$, $A = \arccos \frac{b}{a}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left(2 \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} + 2 \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \cdot \frac{b}{a} \right) = \\ &= \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left(\frac{b \sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} + \arccos \frac{b}{a} \right) = 2\pi b \left(b + \frac{a^2 \arccos \frac{b}{a}}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right). \end{aligned}$$

Литература

- [1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.* – М.: Наука, 1984, – с. 263-265, 277-279.
- [2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 1. – с. 237-242, 245-248.