Определенный интеграл

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Площадь криволинейной трапеции и определенный интеграл. Интегрируемость функции. Свойства определенного интеграла. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям.

Анимация понятия определенного интеграла и интеграла с переменным верхним пределом.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Вычисление определенных интегралов в системе *Mathematica*.

17 сентября 2013 г.

Понятия неопределенного и определенного интегралов возникали в истории математики совсем не в том порядке, в котором их принято сейчас излагать. Сначала, еще в седой древности, появились конструкции, которые относят к понятию определенного интеграла, а затем, уже гораздо позже, Ньютоном, Лейбницем и их предшественниками был создан аппарат дифференциального и интегрального исчислений, который включал в себя и понятие неопределенного интеграла. А изучаем мы эти понятия в прямо противоположном порядке. Почему так получилось? Потому что в седой древности определенный интеграл, хотя уже как бы и существовал, но вычислялся, можно сказать, «кустарным методом». Этот метод был довольно громоздким и требовал при решении каждой задачи специфических для нее ухищрений. Все изменилось, когда упомянутые выше ученые связали между собой понятия неопределенного и определенного интегралов так, что неопределенный интеграл оказался универсальным и очень удобным средством для вычисления интеграла определенного. Поэтому теперь сначала изучают инструмент, неопределенный интеграл, а затем сам объект, определенный интеграл, для работы с которым и предназначен этот инструмент. Связать между собой понятия неопределенного и определенного интегралов было непросто: ведь неопределенный интеграл — это целое семейство функций, а определенный, как вы увидите,— обыкновенное число, например, площадь, объем или момент инерции. Как это удалось, покажет вам сегодня формула Ньютона-Лейбница, до которой мы доберемся в процессе изложения материала.

1 Задача о площади криволинейной трапеции

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x) \geq 0$, снизу — осью Ox, а с боков — прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 1).

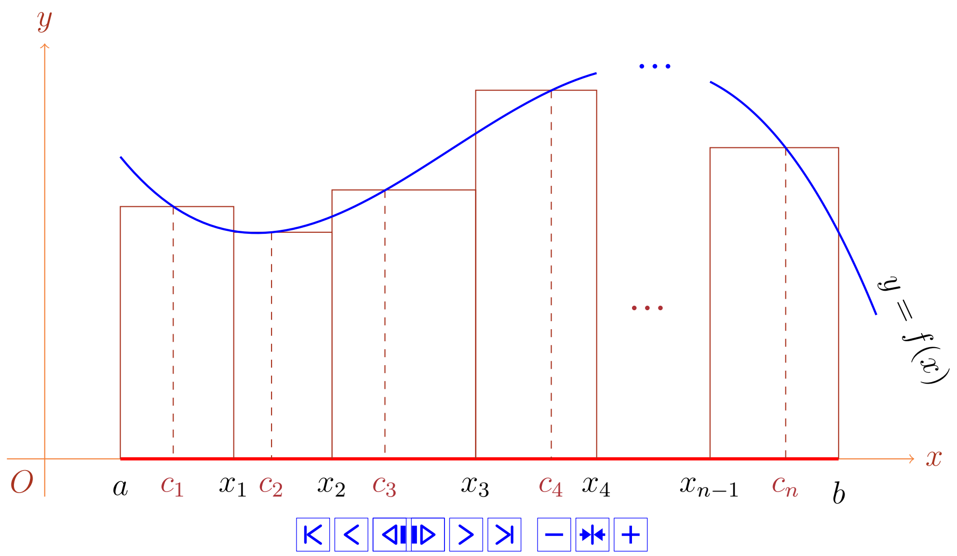


Рис. 1. Площадь криволинейной трапеции.

Чтобы найти площадь этой фигуры, разобьем отрезок $[a, b]$ на части (произвольным образом) точками $x_1, \ldots, x_{n-1}$ и обозначим $x_0 = a$, $x_n = b$. На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольным образом точку c_i и поднимем из нее перпендикуляр до пересечения с графиком функции $y = f(x)$. Через точки пересечения проведем отрезки, лежащие над соответствующими отрезками $[x_{i-1}, x_i]$ параллельно оси Ox. В результате получится ступенчатая фигура, изображенная на рис. 1. Площадь прямоугольника, построенного на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, равна $f(c_i)\,\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а площадь всей ступенчатой фигуры равна сумме площадей всех таких прямоугольников:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i. \qquad (1)$$

Эта площадь приближенно выражает площадь криволинейной трапеции. Очевидно, чем больше n и меньше $\max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$, тем точнее будет приближение. Анимация на рис. 1 демонстрирует этот процесс.

Устремим n к бесконечности, а $\max_i \Delta x_i$ — к нулю. Тогда, если предел

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max_i \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \tag{2}$$

существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на части и выбора в них точек c_i, он считается площадью криволинейной трапеции. Суммы вида (1) и пределы вида (2) возникают при решении самых разных задач, поэтому было введено обобщающее понятие определенного интеграла.

2 Определенный интеграл

Пусть $y = f(x)$ — произвольная (не обязательно неотрицательная) функция, заданная на отрезке $[a,b]$. Тогда сумма (1), полученная в результате рассмотренного выше разбиения отрезка, называется ***интегральной суммой***. Предел (2), если он существует, конечен и удовлетворяет перечисленным выше условиям, называется ***определенным интегралом*** и обозначается

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \triangleq \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max_i \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i.} \tag{3}$$

Число a называется ***нижним***, а число b — ***верхним пределами интегрирования***. Названия «подынтегральная функция», «подынтегральное выражение», «переменная интегрирования» имеют тот же смысл, что и в теории неопределенного интеграла.

Таким образом, площадь криволинейной трапеции выражается определенным интегралом:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx,\ f(x) \geq 0.$$

Из формулы (3) видно, что переменная интегрирования x не связана с точками c_i — это просто обозначение. Кроме того, определенный интеграл представляет собой число, в отличие от неопределенного, который является семейством функций. Поэтому переменная интегрирования может быть любой:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(s)\,ds = \int_a^b f(u)\,du = \ldots.$$

В данном выше определении предполагалось, что $[a,b]$ —отрезок, т. е. $a < b$. Однако удобнее дополнить это определение, считая, что

$$\int_a^a f(x)\,dx \triangleq 0, \quad \int_a^b f(x)\,dx \triangleq -\int_b^a f(x)\,dx, \text{ если } a > b.$$

Если определенный интеграл существует на отрезке $[a, b]$, говорят, что функция $f(x)$ ***интегрируема*** на этом отрезке.

Теорема 1. *Если функция непрерывна на некотором отрезке, то она интегрируема на нем.*

Теорема 2. *Если функция ограничена на отрезке и имеет на нем лишь конечное число скачков, то она интегрируема на этом отрезке.*

Теорема 3. *Если функция монотонна и ограничена на некотором отрезке, то она интегрируема на нем.*

Условие последней теоремы не запрещает функции иметь даже и бесконечное число разрывов I рода.

Пока мы не связали понятие определенного и неопределенного интегралов, вычислим один определенный интеграл тем способом, который применялся еще в глубокой древности. Мы убедимся в том, насколько такой метод нетривиален и громоздок.

Пример 1. *Вычислить интеграл*

$$\int_a^b e^x dx.$$

Решение. Так как экспонента всюду непрерывна, то она интегрируема на отрезке $[a, b]$. Разобьем этот отрезок на одинаковые части: $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, ..., $x_n = b = a + nh$. Выберем на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ в качестве точек c_i правый конец отрезка x_i. Составим интегральную сумму и преобразуем ее:

$$S_n = \sum_{i=1}^n e^{c_i} h = h \sum_{i=1}^n e^{a+ih} = he^a \sum_{i=1}^n e^{ih}.$$

Сумма представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом, равным e^h, и таким же знаменателем. Применяя формулу суммы геометрической прогрессии, получаем

$$S_n = he^a \sum_{i=1}^n e^{hi} = he^a e^h \frac{1 - e^{nh}}{1 - e^h} = he^h \frac{e^a - e^{a+nh}}{1 - e^h} =$$
$$= e^h \left(e^a - e^b\right) \frac{h}{1 - e^h} = \left(e^a - e^b\right) \frac{h}{e^{-h} - 1} \underset{h \to 0}{\to} e^b - e^a.$$

Таким образом,

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a.$$

3 Свойства определенного интеграла

1° *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла (если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$):*

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx,\ A \equiv \text{const}\,.$$

2° *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то интеграл от их суммы равен сумме интегралов от этих функций:*

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

3° *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a,c]$ и $[c,b]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

4° *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[\alpha,\beta]$ и $a,b,c \in [\alpha,\beta]$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

5° *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ и на этом отрезке выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

6° *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и на этом отрезке выполняется неравенство $m \le f(x) \le M$, то*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)\,.$$

Геометрический смысл данного свойства демонстрирует рис. 2, а).

Пример 2. *Оценить значение определенного интеграла от функции e^{-x^2} на отрезке $[0;1]$.*

Решение. Так как функция e^{-x^2} непрерывна и убывает на отрезке $[0;1]$, то справедливы неравенства

$$e^{-1} \le e^{-x^2} \le e^0 = 1.$$

Используя свойство 6°, получаем, что

$$0{,}37 \approx e^{-1} \le \int_0^1 e^{-x^2}dx \le 1.$$

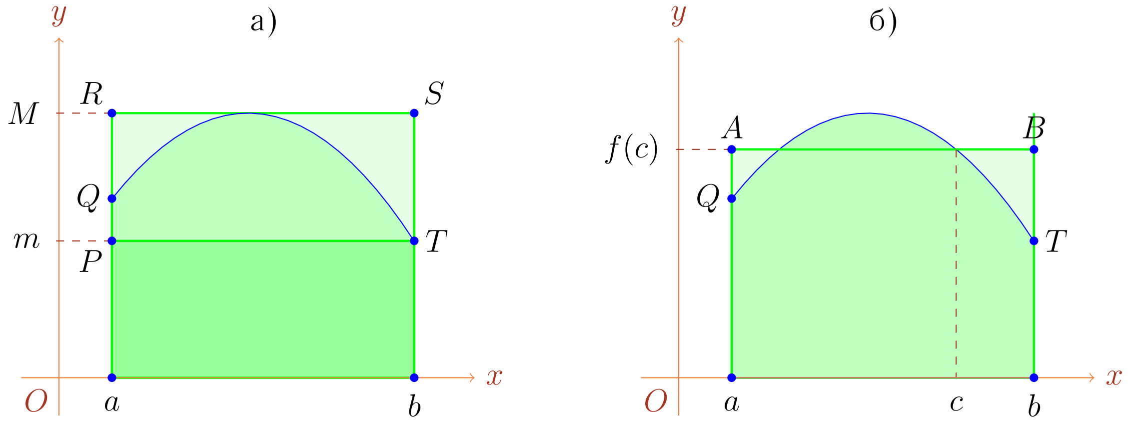


Рис. 2. а) $S_{aPTb} = m(b-a) \leq S_{aQTb} = \int_a^b f(x)\,dx \leq S_{aRSb} = M(b-a)$,

б) $S_{aRTb} = S_{aABb} \Longleftrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

7°. **Теорема о среднем.** *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и на этом отрезке $m \leq f(x) \leq M$, то найдется такое число $\mu \in [m, M]$, что*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \mu\,(b-a)\,. \tag{4}$$

Если $a = b$, равенство (4), очевидно, тоже выполняется. Если $b < a$, то и в этом случае теорема о среднем справедлива. Чтобы убедиться в этом, достаточно в (4) поменять местами a и b.

Средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется величина

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx.$$

8°. **Теорема о среднем для непрерывной функции.** *Если $f(x)$непрерывна на $[a,b]$, то существует такое число c на этом отрезке, что*

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(c)\,(b-a)\,.$$

Геометрический смысл свойства: существует среднее значение $f(c)$ непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ такое, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой функцией, равна площади прямоугольника высотой $f(c)$ с основанием $[a,b]$ (рис. 2, б)).

9°. *Если $a \leq b$, то*

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx.$$

Если не обязательно $a < b$, то

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \le \left| \int_a^b |f(x)|\, dx \right|.$$

Доказательства свойств см. в Приложении[1)].

4 Интеграл с переменным верхним пределом

Таким интегралом называется функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $x \in [a, b]$, то для каждого такого x функция $\Phi(x)$ существует, поскольку при этих условиях существует определенный интеграл.

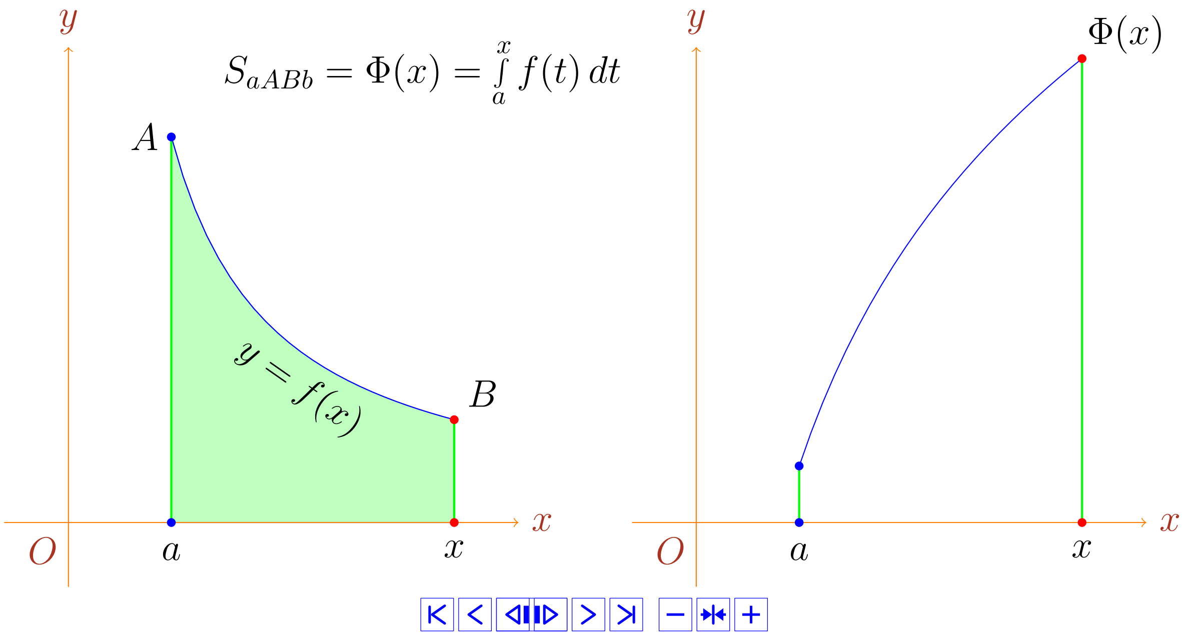


Рис. 3. Интеграл с переменным верхним пределом.

Теорема 4 (Ньютона-Лейбница)**.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то производная от интеграла с переменным верхним пределом существует и равна подынтегральной функции:*

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)\, dt \right)' = f(x).$$

Доказательство. Пусть $x, x+\Delta x \in [a,b]$. Тогда

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt =$$
$$= \int_x^a f(t)\ dt + \int_a^{x+\Delta x} f(t)\ dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\ dt.$$

Используя свойство 8°, получаем, что

$$\Delta\Phi(x) = f(c)\,\Delta x,\ \ c \prec x, x+\Delta x.$$

Следовательно,

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\,\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(c) = f(x),$$

так как $c \to x$ при $\Delta x \to 0$.

Следствие 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то $\Phi(x)$ – первообразная для $f(x)$.*

Следствие 2. *Всякая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция имеет на нем первообразную.*

Например, для функции e^{-x^2} первообразной будет функция $\int_0^x e^{-t^2}dt$, и, следовательно, неопределенный интеграл от e^{-x^2} можно записать в виде

$$\int e^{-x^2}dx = \int_0^x e^{-t^2}dx + C.$$

Вообще говоря, это справедливо для любой непрерывной функции:

$$\int f(x)\ dx = \int_0^x f(t)\ dt + C.$$

Следствие 3. *Так как функция $\Phi(x)$ дифференцируема, то она непрерывна.*

5 Формула Ньютона-Лейбница

Вот мы и пришли к центральной теореме интегрального исчисления, связывающей определенный и неопределенный интегралы, в результате чего вычисление определенного интеграла становится во многих случаях рутинной процедурой.

Теорема 5. *Если $F(x)$ — первообразная для непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$, то определенный интеграл от такой функции вычисляется по* ***формуле Ньютона-Лейбница****:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.}$$

Доказательство. Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то $\Phi(x) = F(x) + C$, или, по-другому,

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{5}$$

При $x = a$ получаем, что $0 = F(a) + C$, откуда $C = -F(a)$. С учетом этого значения C из равенства (5) при $x = b$ имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

□

Сравните усилия, затраченные на вычисление интеграла от экспоненты в примере 1 и по формуле Ньютона-Лейбница: $\int_a^b e^x = e^x\big|_a^b = e^b - e^a$.

Пример 3. *Найти площадь фигуры, ограниченной сверху синусоидой, а снизу — отрезком $[0;\pi]$ оси Ox.*

Решение. Поскольку площадь криволинейной трапеции является определенным интегралом, а последний можно вычислить с помощью формулы Ньютона-Лейбница, то вычисление сводится к следующему:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

□

Если функция не является непрерывной, но имеет на отрезке лишь конечное число точек разрыва, то интеграл вычисляется, как в следующем примере.

Пример 4. *Вычислить интеграл*

$$\int_{-1}^2 \varphi(x)\,dx,$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} 4, & x < 0; \\ -1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Функция $\varphi(x)$ разрывна на отрезке $[-1;2]$, но непрерывна на промежутках $[-1;0)$ и $[0;2]$. Поэтому разобьем заданный интеграл на сумму двух интегралов в соответствии со свойством 3°:

$$\int_{-1}^{2}\varphi(x)\,dx=\int_{-1}^{0}4\,dx+\int_{0}^{2}(-1)\,dx=4x\Big|_{-1}^{0}-x\Big|_{0}^{2}=4-2=2.$$

□

Впрочем, если ввести понятие обобщенной первообразной[2)], то и для таких функций становится возможным применение формулы Ньютона-Лейбница.

6 Замена переменной в определенном интеграле

Пусть функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$, а функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]=\varphi([\alpha,\beta])$, причем, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Тогда справедлива формула

$$\boxed{\int_{a}^{b}f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.}$$

Действительно, пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$. Тогда $\int f(x)\,dx=$ $=F(x)+C$. Сделаем в неопределенном интеграле замену $x=\varphi(t)$. С учетом того, что $dx=\varphi'(t)\,dt$, получим

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt=F(\varphi(t))+C. \tag{6}$$

По формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_{a}^{b}f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

С другой стороны, по той же формуле Ньютона-Лейбница для неопределенного интеграла (6) имеем

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a).$$

Равенство правых частей двух последних формул приводит и к равенству их левых частей.

Пример 5. *Вычислить интеграл*

$$\int_{0}^{1/2}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Решение. Сделаем замену $t = \arcsin x$, $dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\int_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/6} t\,dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{\pi/6} = \frac{\pi^2}{72}.$$

Пример 6. *Найти напряженность E электростатического поля, создаваемого широким тонким кольцом с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 в точке, находящейся на расстоянии b от центра кольца, если*

$$E = k\int_{R_1}^{R_2} \frac{l}{(l^2+b^2)^{3/2}}\,dl,\ k \equiv \mathrm{const}\,.$$

Решение. Вычислим интеграл, сделав замену $x = l^2 + b^2$, $dx = 2l\,dl$:

$$E = \frac{k}{2}\int_{R_1^2+b^2}^{R_2^2+b^2} \frac{dx}{x^{3/2}} = -\left.\frac{k}{\sqrt{x}}\right|_{R_1^2+b^2}^{R_2^2+b^2} = k\left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2+b^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2+b^2}}\right).$$

7 Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть функции $u\,(x)$ и $v\,(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = uv\big|_a^b - \int_a^b v\,du.}$$

Доказательство следует из формулы для дифференциала произведения:

$$d\,(uv) = u\,dv + v\,du,$$

обе части которой следует проинтегрировать в пределах от a до b.

Пример 7. *Найти интеграл*

$$\int_{1/e}^{e} \ln x\,dx.$$

Решение. Воспользуемся формулой интегрирования по частям в определенном интеграле:

$$\int_{1/e}^{e} \ln x\,dx = \left\langle u = \ln x,\ dv = dx,\ du = \frac{dx}{x},\ v = x \right\rangle =$$
$$= x\ln x\big|_{1/e}^{e} - \int_{1/e}^{e} dx = e + \frac{1}{e} - x\big|_{1/e}^{e} = \cancel{e} + \frac{1}{e} - \cancel{e} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e}.$$

□

В Приложении[3)] можно получить основные сведения о вычислении определенных интегралов в системе *Mathematica*.

Приложение

[1)] Сначала докажем, что, если $f(x) \equiv 1$, то

$$\int_a^b dx = b - a. \tag{П1}$$

Действительно, интегральная сумма для такой функции не зависит от n и равна

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + \ldots + x_1 - a = b - a.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим, что и интеграл равен $b - a$.

1° *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла (если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a, b]$*):*

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx,\ \ A \equiv \mathrm{const}\,.$$

Следует из того, что постоянный множитель можно выносить за знак суммы:

$$\sum_{i=1}^{n} Af(c_i)\,\Delta x_i = A\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i.$$

2° *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на* $[a, b]$*, то интеграл от их суммы равен сумме интегралов от этих функций:*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

И в этом случае доказательство вытекает из аналогичного равенства для интегральных сумм:

$$\sum_{i=1}^{n} [f(c_i) + g(c_i)]\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\,\Delta x_i.$$

3° *Пусть функция* $f(x)$ *интегрируема на* $[a, c]$ *и* $[c, b]$*. Тогда* $f(x)$ *интегрируема на* $[a, b]$ *и*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

При составлении интегральной суммы включим точку c во множество точек разбиения, пусть $x_m = c$. Тогда интегральную сумму можно записать в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(c_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ и $\max_i \Delta x_i \to 0$, получим требуемое равенство для интегралов.

4° *Пусть функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[\alpha, \beta]$ *и* $a, b, c \in [\alpha, \beta]$*. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Если $a = b$, или $a = c$, или $b = c$, то формула доказана. Случай $a < c < b$ доказан в свойстве 3°. Поэтому рассмотрим, например, случай $c < b < a$. На основании упомянутого свойства

$$\int_c^a f(x)\ dx = \int_c^b f(x)\ dx + \int_b^a f(x)\ dx = \int_c^b f(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx,$$

откуда и получаем доказываемое равенство. Остальные варианты расположения точек a, b и c на отрезке $[\alpha, \beta]$ рассматриваются аналогично.

5°. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и на этом отрезке выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$, то*

$$\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx.$$

Поскольку $a < b$, то $\Delta x_i > 0$, и, учитывая, что $f(x) \leq g(x)$, получаем неравенство для интегральных сумм:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\,\Delta x_i,$$

из которого следует неравенство для соответствующих интегралов.

6°. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и на этом отрезке выполняется неравенство $m \leq f(x) \leq M$, то*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq M(b-a). \tag{П2}$$

На основании условия теоремы и свойства 5° получаем

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b M\,dx,$$

а формула (П1) и свойство 1° дают возможность взять интегралы от констант и получить доказываемое неравенство.

7°. Теорема о среднем. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и на этом отрезке $m \leq f(x) \leq M$, то найдется такое число $\mu \in [m, M]$, что*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \mu(b-a).$$

Покажем, что искомым числом является

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx. \tag{П3}$$

Действительно, равенство (4) для него выполняется, так что остается показать, что $\mu \in [m, M]$. Для этого заметим, что, так как $m \leq f(x) \leq M$, то по свойству 6° выполняется неравенство (П2). Разделив все части неравенства на $b - a$, получим требуемое.

8°. Теорема о среднем для непрерывной функции. *Если $f(x)$непрерывна на $[a, b]$, то существует такое число c на этом отрезке, что*

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(c)(b-a).$$

Пусть $m = \min_{[a,b]} f(x)$, $M = \max_{[a,b]} f(x)$. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на нем любое значение между a и b, в частности, значение μ из формулы (П3). Это значит, что существует $c \in [a, b]$, такое что $f(c) = \mu$, или

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\ dx,$$

что и требовалось доказать.

9°. *Если $a \le b$, то*

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\ dx. \tag{П4}$$

Если не обязательно $a < b$, то

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \le \left| \int_a^b |f(x)|\ dx \right|. \tag{П5}$$

Если $a = b$, то свойство очевидно.

Справедливо неравенство

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|\ .$$

Из него по свойству 5° при $a < b$ следует, что

$$-\int_a^b |f(x)|\ dx \le \int_a^b f(x)\ dx \le \int_a^b |f(x)|\ dx,$$

из чего и следует неравенство (П4).

Пусть $a > b$. Тогда, используя уже доказанную часть свойства, получаем

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| = \left| \int_b^a f(x)\ dx \right| \le \int_b^a |f(x)|\ dx = \left| \int_b^a |f(x)|\ dx \right| = \left| \int_a^b |f(x)|\ dx \right|.$$

Таким образом и формула (П5) доказана.

[2] ***Обобщенной первообразной*** функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$, называется непрерывная на $[a, b]$ функция $F(x)$, для которой во всех точках этого отрезка, за исключением конечного их числа, выполняется равенство

$$F'(x) = f(x)\,.$$

Теорема П1. *Каждая определенная и ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ с не более, чем конечным числом точек разрыва, имеет обобщенную первообразную, причем, любая первообразная имеет вид*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt + C,$$

и справедлива формула Ньютона-Лейбница.

Пример П1. *Найти обобщенную первообразную для функции $\varphi(x)$ из примера 4.*

Решение. Равенство $F'(x) = \varphi(x)$, где $F(x)$ — обобщенная первообразная для функции $\varphi(x)$, не будет у нас выполняться только в точке $x = 0$, в которой $\varphi(x)$ терпит разрыв. Поэтому будем искать обобщенную первообразную отдельно при $x < 0$ и $x \ge 0$. При $x < 0$ имеем

$$F(x) = \int_{-1}^x \varphi(t)\ dt = \int_{-1}^x 4\ dt = 4t\Big|_{-1}^x = 4x + 4.$$

При $x \geq 0$ получаем

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \varphi(t)\ dt = \int_{-1}^{0} 4\,dt + \int_{0}^{x} (-1)\ dt = 4t\Big|_{-1}^{0} - t\Big|_{0}^{x} = 4 - x.$$

В итоге

$$F(x) = \begin{cases} 4x + 4, & x < 0; \\ 4 - x, & x \geq 0; \end{cases}$$

см. рис. 4. Теперь эту функцию можно использовать для вычисления определенного интеграла от $\varphi(x)$:

$$\int_{-1}^{2} \varphi(x)\ dx = F(2) - F(-1) = \left.(4 - x)\right|_{x=2} - \left.(4x + 4)\right|_{x=-1} = 2 - 0 = 2.$$

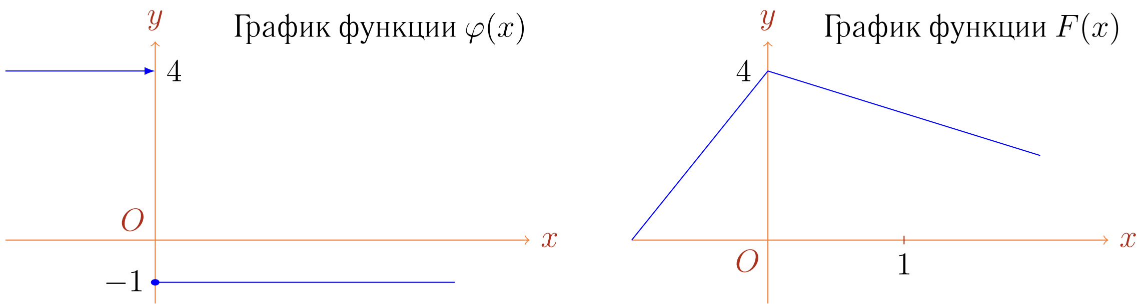


Рис. 4. Функция $\varphi(x)$ и ее обобщенная первообразная $F(x)$.

[3] *Mathematica* находит определенные интегралы с помощью оператора

`Integrate[f,{x,x_min,x_max}]`

где `f` — подынтегральная функция, `x` — переменная интегрирования, x_{min} — нижний, x_{max} — верхний пределы интегрирования.

Например, интеграл $\int_{-1}^{1} x^2\,dx$ берется так:

```
Integrate[x^2,{x,-1,1}]
```

$\frac{2}{3}$

Удобнее, однако, выщелкнуть мышкой символ определенного интеграла из палитры инструментов:

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx$$

$\frac{2}{3}$

Пределы интегрирования можно задать и в символьном виде:

$$\int_{a}^{b} e^x\,dx$$

$e^b - e^a$

Mathematica способна проинтегрировать функцию, имеющую конечное число разрывов I рода:

$$\text{f[x\_]:=}\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 1-x^2 & x\geq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

1

Не вызывает затруднения решение примеров, для которых на лекции нам пришлось применить интегрирование заменой и по частям:

$$\int_0^{1/2} \frac{\text{ArcSin[x]}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\frac{\pi^2}{72}$$

$$\int_{1/e}^{e} \text{Log[x]}\,dx$$

$$\frac{2}{e}$$

«Неберущийся» интеграл *Mathematica*, конечно, вычислить не в состоянии:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\text{Erf[1]}$$

В ответе *Mathematica* использовала функцию $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$, поэтому фактически ничего не нашла. Но в отличие от вычисления неопределенного интеграла теперь можно применять численные методы расчетов и все же довести решение до числового результата, хотя бы и приближенного:

```
%//N
0.746824
```

В свете рассмотренной теории первообразную для функции e^{-x^2}, которую, как известно[†], нельзя выразить в элементарных функциях, запишем с помощью интеграла с переменным верхним пределом:

$$\Phi[x\_] := \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Это – действительно первообразная, так как ее производная равна подынтегральной функции:

$$\partial_x \Phi[x]$$

$$e^{-x^2}$$

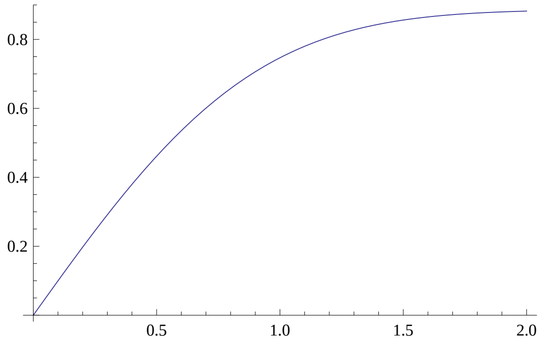
Мы можем найти приближенное значение такой функции:

```
N[Φ[1]]
0.746824
```

и даже построить ее график:

```
Plot[Evaluate[Φ[x]],{x,0,2}]
```

[†]Лекция «Неопределенный интеграл».



Кроме рассмотренных возможностей, для приближенного вычисления определенных интегралов служит оператор `NIntegrate`, который имеет те же самые аргументы, что и оператор `Integrate`, но вычисляет не точное, а приближенное значение интеграла:

$$\mathtt{NIntegrate}\left[\frac{\mathtt{ArcSin[x]}}{\sqrt{1-\mathtt{x}^2}}, \{\mathtt{x}, 0, 1/2\}\right]$$

0.137078

Пример П2. *Найти закон изменения количества теплоты, выделяемой проводником с сопротивлением R за время t, если через проводник проходит ток $I(t) = \sin te^{-t}$. Количество тепла, выделяемого проводником, определяется формулой*

$$Q = \int_0^t I^2(\tau)R\,d\tau.$$

Решение. Пусть *Mathematica* решит эту задачу:

$$\int_0^{\mathtt{t}} (\mathtt{Sin}[\tau]\mathtt{e}^{-\tau})^2\mathtt{R}\,\mathtt{d}\tau$$

$$\frac{1}{8}\mathtt{R}\left(1+\mathtt{e}^{-2\mathtt{t}}(-2+\mathtt{Cos[2t]}-\mathtt{Sin[2t]})\right)$$

Однако не помешает ее решить и без помощи системы *Mathematica*, дабы укрепить свои навыки в интегрировании и углубить понимание предмета. □

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.* – М.: Наука, 1984, – с. 222-249.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 1. – с. 221–233.