# Неопределенный интеграл

Волченко Ю.М.

### Содержание лекции

Первообразная функция. Неопределенный интеграл, его свойства. Таблица основных формул интегрирования. Непосредственное интегрирование. Интегрирование подстановкой и по частям.

Анимационный тест на усвоение методов интегрирования.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Интегрирование в системе *Mathematica*, его особенности и подводные камни.

27 октября 2011 г.

## 1 Первообразная функция

Функция $F(x)$ называется ***первоо́бразной*** для функции $f(x)$ на некотором промежутке числовой оси, если во всех точках этого промежутка выполняется: $F'(x) = f(x)$. Под промежутком будем понимать интервал или отрезок.

**Пример 1.** *Найти первообразную для функции* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

*Решение.* Зная таблицу производных, нетрудно догадаться, что первообразной для данной функции на всей числовой оси является функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$, так как на всей числовой оси $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$. □

Если для данной функции $f(x)$ существует первообразная, то она не единственна. Действительно, $[F(x)+C]' = F'(x) = f(x)$, если $C = \text{const}$ — произвольная постоянная. Поэтому $F(x) + C$ — тоже первообразная для функции $f(x)$. Так, например, в интервале $(0;\infty)$, кроме функции $F_1(x) = \operatorname{arctg} x$ первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ будет функция $\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$, так как $(\operatorname{arcctg}\frac{1}{x})' = -\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2}$.

Чтобы разобраться в том, чем отличаются две первообразные одной и той же функции, докажем следующую теорему.

**Теорема 1.** *Если производные двух функций $f(x)$ и $g(x)$ равны на некотором промежутке, то их разность на этом промежутке равна константе.*

*Доказательство.* Пусть равенство $f'(x) = g'(x)$ выполняется в интервале $(a, b)$. Введем функцию $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ и продифференцируем ее:

$$\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) \equiv 0, \;\; x \in (a, b).$$

По теореме Лагранжа для любого $x$ из отрезка $[x, x_0] \subset (a, b)$ выполняется

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(d)(x - x_0), \;\; x < d < x_0.$$

Но, так как производная функции $\varphi(x)$ равна нулю в интервале $(a, b)$, то $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ и $f(x) - g(x) = \varphi(x_0) \equiv \mathrm{const}$.

Если промежуток является отрезком $[a, b]$, то в доказательстве надо взять вместо отрезка $[x, x_0]$ отрезок $[a, b]$.

**Следствие 1.** *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные функции для функции $f(x)$ на некотором промежутке, то их разность на этом промежутке равна константе.*

*Доказательство.* По определению первообразной получаем, что производные первообразных равны, так как равны одной и той же функции: $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$. Из предыдущей теоремы следует требуемое.

**Замечание 1.** *Полученные результаты справедливы для двух первообразных, определенных на одном и том же промежутке. Если они определены еще на каком-нибудь промежутке, то и на нем они будут отличаться на константу, но константы для этих двух промежутков не обязательно будут одинаковы.*

Например, рассмотренные выше первообразные $F_1(x) = \operatorname{arctg} x$ и $F_2(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$ для функции $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ в интервале $(0; \infty)$ отличаются на ноль (почему?[1]):

$$\operatorname{arcctg} \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x = 0,$$

а в интервале $(-\infty; 0)$, в котором они также являются первообразными той же самой функции, они отличаются на $\pi$ (почему?[2]):

$$\operatorname{arcctg} \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x = \pi.$$

Из этого следует еще одно замечание.

**Замечание 2.** *Если область определения первообразной представляет собой объединение нескольких промежутков, то для каждого промежутка могут быть выбраны свои произвольные постоянные.*

Например, наиболее общей первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{x^2}$ в ее естественной области определения $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ будет функция

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + C_1, & x < 0; \\ -\frac{1}{x} + C_2, & x > 0. \end{cases}$$

Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$. Тогда выражение $F(x)+C$ называется ***неопределенным интегралом*** от $f(x)$. Обозначается это следующим образом:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C.}$$

Функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, выражение $f(x)\,dx$ – ***подынтегральным выражением***, символ $\int$ (стилизованная латинская буква $S$) – ***знаком интеграла***, $x$ – ***переменной интегрирования***, $C$ – ***произвольной постоянной***.

Записанная формула означает, что неопределенный интеграл представляет собой целое семейство первообразных (бесконечное множество таких функций).

Спрашивается, для всех ли функций существует их первообразная? Ответ дает следующая теорема, которую мы пока примем без доказательства, а доказательство получим несколько позже, на другой лекции.

**Теорема 2.** *Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для нее на этом отрезке существует первообразная, а, значит, и неопределенный интеграл.*

Отыскание первообразной для функции $f(x)$ называется ее интегрированием. Также говорят «взять интеграл» в смысле найти первообразную для подынтегральной функции.

Несмотря на то, что для непрерывной функции первообразная всегда существует, она не всегда может быть выражена с помощью элементарной функции. Например, нет ни одной элементарной функции, производная которой была бы равна непрерывной функции $e^{x^2}$. Просто первообразная для последней функции, хотя и существует, но не может быть выражена ни одной элементарной функцией. То есть формула

$$\int e^{x^2}\,dx = F(x) + C$$

может быть записана, а вот вместо $F(x)$ мы ничего записать не можем, так как первообразная неэлементарна. Есть и другие функции, для которых первообразная существует, но неэлементарна.

Возникает вопрос: а нельзя ли включить первообразные таких функций в число основных элементарных функций, дать им имена и пользоваться ими, как мы пользуемся синусом или косинусом? Оказывается, что можно-то можно, но в результате появятся новые функции, первообразные которых не будут элементарны уже по отношению к новому списку основных элементарных функций. Короче, математики доказали, что никакое расширение списка основных элементарных функций не справится с ситуацией: для любого списка найдутся функции, первообразные которых не будут элементарны по отношению к этому списку.

Поэтому список основных элементарных функций мы оставим неизменным, а неэлементарные первообразные будем называть специальными функциями, которые будут почти такими же, как и привычные нам элементарные функции: и таблицы их значений имеются, и графики известны, и в различных вычислениях на ЭВМ ими можно пользоваться.

Будем говорить, что интеграл «берется», если первообразная подынтегральной функции элементарна, и «не берется», если первообразная неэлементарна.

## 2 Свойства неопределенного интеграла

**1°** *Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:*

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

Действительно, $\left(\int f(x)\,dx\right)' = F'(x) = f(x)$, где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$.

**2°** *Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:*

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Следует из предыдущего свойства:

$$d\int f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]' dx = f(x)\,dx.$$

**3°** *Интеграл от дифференциала первообразной равен неопределенному интегралу:*

$$\int d\,F(x) = F(x) + C.$$

Используя предыдущее свойство, получаем, что $d\int d\,F(x) = d\,F(x)$. А, с другой стороны, $d\,[F(x) + C] = d\,F(x)$. Раз дифференциалы выражений $\int d\,F(x)$ и $F(x) + C$ равны, значит, эти выражения могут отличаться лишь на константу.

**4°** *Неопределенный интеграл от суммы двух функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций:*

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$$

**5°** *Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:*

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx.$$

**6°** *Линейное преобразование аргумента подынтегральной функции приводит к следующему равенству:*

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\,F(ax+b) + C,$$

*где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$.*

Последние три свойства проверяются дифференцированием: производные левых и правых частей равны, следовательно, эти части отличаются не более, чем на постоянное слагаемое. Но равенства состоят из неопределенных интегралов, которые и так равны лишь с точностью до произвольной постоянной.

Далее приводится таблица неопределенных интегралов, каждое равенство в которой также проверяется дифференцированием: производные правых частей равенств равны подынтегральным функциям.

В отношении этой таблицы надо иметь в виду следующее. В соответствии с замечанием 2, например, второй и 14-й табличные интегралы записаны не в самом общем виде. Более общий вид интеграла под номером 2 будет такой:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + \begin{cases} C_1, & x > 0; \\ C_2 & x < 0. \end{cases}$$

Поскольку применение названных интегралов в не самой общей форме не приводит к неправильному решению задач, эта форма традиционно и используется.

### Таблица неопределенных интегралов

1. $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
4. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
7. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
8. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$
14. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$
15. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$
16. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$
17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
19. $\displaystyle\int dx = x + C$
20. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

Выучить эту таблицу поможет рис. 1, который является своеобразным тестировщиком знаний.

Здесь следует заметить, что, поскольку среди свойств неопределенного интеграла нет, казалось бы, естественного свойства интеграла от произведения двух функций, то вычисление неопределенного интеграла часто представляет собой далеко не тривиальную задачу. Нельзя вычислить интегралы от каждого множителя, из которых может состоять подынтегральная функция, отдельно, а результаты перемножить.

Поэтому, если дифференцирование функций во многом ремесло, так как, в принципе, сколько бы процесс дифференцирования ни длился, он в конце концов закончится, потому что, следуя правилам дифференцирования и таблице производных, мы его доведем до конца, то интегрирование уже — искусство. Взять интеграл от произведения синуса на экспоненту вам не помогут ни правила дифференцирования, ни таблица неопределенных интегралов. Тем не ме-

Ответьте себе на вопрос, что должно стоять в правой части формулы вместо знака вопроса. Щелкнув мышкой, проверьте ответ. Щелкните мышкой второй раз и получите новый вопрос. И т.д.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$$

Рис. 1. Тест на знание таблицы интегралов

нее такие интегралы берутся, но требуют специальных ухищрений. Не являются ли такие ухищрения просто новыми правилами, следуя которым, можно взять любой интеграл? Ответ отрицательный: всегда найдется интеграл, взять который не помогут никакие уже известные ухищрения. Тем более, что некоторые интегралы, как уже было сказано, вообще не берутся, но вы-то этого не знаете заранее, так что ваши попытки взять какой-нибудь интеграл могут оказаться попросту пустым занятием, если этот интеграл не берется. Вот в таком смысле интегрирование является искусством.

**Пример 2.** *Используя четвертое и пятое свойства неопределенного интеграла и интегрирование степени, найти* $\int (3x^2 + x - 6 + 1/x^3)\,dx$.

*Решение.* Получаем

$$\int \left(3x^2 + x - 6 + \frac{1}{x^3}\right) dx =$$
$$= 3\int x^2\,dx + \int x\,dx - 6\int dx + \int x^{-3}\,dx =$$
$$= x^3 + \frac{x^2}{2} - 6x + \frac{x^{-2}}{-2} + C = x^3 + \frac{x^2}{2} - 6x - \frac{1}{2x^2} + C.$$

Результат можно проверить дифференцированием:

$$\left(x^3 + \frac{x^2}{2} - 6x - \frac{1}{2x^2} + C\right)' = 3x^2 + x - 6 + \frac{1}{x^3}.$$

Получили подынтегральную функцию, значит, результат верен.

**Пример 3.** *Используя различные свойства неопределенного интеграла и таблицу интегралов, найти* $\int \left(e^{-x} + 2\sqrt{x+3} - \frac{1}{4-x^2}\right) dx$.

*Решение.* Вычисляем

$$\int \left(e^{-x} + 2\sqrt{x+3} - \frac{1}{4-x^2}\right) dx =$$

$$= \int e^{-x}\,dx + 2\int (x+3)^{1/2}\,dx - \int \frac{dx}{4-x^2} =$$
$$= -e^{-x} + 2\,\frac{(x+3)^{3/2}}{3/2} - \frac{1}{4}\,\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + C =$$
$$= -e^{-x} + \frac{4}{3}\,(x+3)\sqrt{x+3} - \frac{1}{4}\,\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + C.$$

□

В Приложении рассматриваются возможности интегрирования в системе *Mathematica*[3)].

# 3 Интегрирование подстановкой (заменой)

Чтобы облегчить вычисление интеграла $\int f(x)\,dx$, применяют замену переменной $x$ другой переменной, например, $t$, то есть делают подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, имеющая обратную функцию. Тогда $dx = \varphi'(t)\,dt$.

Докажем, что

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.} \tag{1}$$

Действительно, продифференцируем отдельно левую и правую части доказываемого равенства. Для левой части:

$$\left[\int f(x)\,dx\right]'_x = f(x).$$

Для правой части (используя правило дифференцирования обратной функции):

$$\left\{\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\right\}'_x = \left\{\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\right\}'_t \frac{dt}{dx} =$$
$$= f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x).$$

Производные левой и правой части равны, значит, эти части отличаются лишь постоянным слагаемым, но это и утверждает доказываемое равенство.

Отметим, что формулу подстановки (1) можно применять, читая ее и слева направо и справа налево.

**Пример 4.** *Вычислить интеграл* $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.

*Решение.* Такого интеграла нет в таблице интегралов, да и свойства неопределенных интегралов не подсказывают, как его взять. Поэтому, вспомнив, что интегрирование — это искусство, просто сосредоточим свое внимание на подынтегральной функции и подумаем, что же нам мешает взять данный интеграл.

Конечно, корень! Но, как от него избавиться? Возводить его в квадрат, естественно, нельзя, так как это приведет к совершенно другой подынтегральной функции, а, значит, и к другому интегралу. Поскольку мы изучаем интегрирование подстановкой, то уже это подсказывает, что надо сделать подстановку, которая бы избавила от корня. Когда разность квадратов константы и функции дает квадрат другой функции? Конечно, когда эта функция — синус или косинус! Поэтому интеграл вычисляется, например, так:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \langle x = a\sin t,\ dx = a\cos t\, dt\rangle = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\, a\cos t\, dt =$$

$$= a^2 \int \cos^2 t\, dt = a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}(t + \sin t\cos t) + C = \frac{a^2}{2}\left(t + \sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right) + C =$$

$$= \left\langle t = \arcsin\frac{x}{a}\right\rangle = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}\right) + C.$$

Кстати, заметьте, что формулу (1) мы в данном примере прочитали слева направо.

**Пример 5.** *Вычислить интеграл* $\int \frac{\ln x + 1}{x}\, dx$.

*Решение.* В этом примере мы прочитаем формулу (1) справа налево. Именно, заметим, что функция $1/x$ является производной функции $\ln x + 1$. Следовательно, эту функцию и следует заменить новой переменной:

$$\int \frac{\ln x + 1}{x}\, dx = \left\langle z = \ln x + 1,\ dz = \frac{dx}{x}\right\rangle = \int z\, dz = \frac{z^2}{2} + C = \frac{(\ln x + 1)^2}{2} + C.$$

□

Тестировщик на рис. 2 поможет вам приобрести начальные навыки в замене переменной интегрирования в неопределенном интеграле.

## 4 Интегрирование по частям

Интегрирование по частям представляет собой способ интегрирования, в какой-то мере компенсирующий невозможность представления неопределенного интеграла от произведения двух функций в виде произведения интегралов от этих функций. В результате получается формула, во многих случаях упрощающая вычисление интеграла от произведения.

Прикиньте, какую замену следует сделать, чтобы взять интеграл.
Щелкнув мышкой, узнайте о замене, предлагаемой тестировщиком.
Проверьте свою и его замену, попытавшись взять интеграл.
Щелкните мышкой еще раз и получите новый вопрос. И т.д.

$$\int \frac{5 + \operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}\, dx \Longrightarrow ?$$

Рис. 2. Тест по интегрированию заменой

Чтобы перейти к ней, рассмотрим две дифференцируемые функции $u(x)$ и $v(x)$, для которых запишем формулу дифференциала произведения:

$$d(uv) = u\, dv + v\, du.$$

Интегрируя это равенство, получаем, что

$$uv = \int u\, dv + \int v\, du.$$

Остается переписать это равенство по-другому, чтобы получить ***формулу интегрирования по частям***:

$$\boxed{\int u\, dv = uv - \int v\, du.}$$

Чаще всего эта формула применяется для вычисления интегралов вида

$$\int x^k \sin x\, dx, \int x^k \cos x\, dx, \int x^k e^x\, dx, \int x^k \ln x\, dx$$

и подобных им.

**Пример 6.** *Вычислить интеграл* $\int x^2 e^x\, dx$.

*Решение.* В этом примере интегрирование по частям придется выполнить дважды:

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^x\, dx &= \langle u = x^2,\ dv = e^x\, dx,\ du = 2x\, dx,\ v = e^x \rangle = \\
&= x^2 e^x - 2 \int x e^x\, dx = \langle u = x,\ dv = e^x\, dx,\ du = dx,\ v = e^x \rangle = \\
&= x^2 e^x - 2 \left( x e^x - \int e^x\, dx \right) = x^2 e^x - 2\,(x e^x - e^x) + C = \\
&= \left( x^2 e^x - 2x + 2 \right) e^x + C.
\end{aligned}$$

□

С помощью теста на рис. 3 вы можете приобрести начальные навыки в применении метода интегрирования по частям.

Выберите $u$ и $dv$ для интегрирования по частям. Щелкнув мышкой, узнайте, что предлагает тестировщик. Проверьте оба варианта, попытавшись взять интеграл. Щелкните мышкой еще раз и получите новый вопрос. И т.д.

$$\int x \sin x \, dx \Rightarrow ?$$

Рис. 3. Тест на интегрирование по частям

**Пример 7.** *Вычислить интеграл* $A = \int \sin x e^x \, dx$.

*Решение.* Пытаясь найти этот интеграл интегрированием по частям, мы получим некоторую функцию минус интеграл, похожий на заданный, в котором место синуса занимает косинус. Проинтегрировав еще раз по частям, обнаружим, что теперь мы имеем функцию, из которой вычитается заданный интеграл! Дальнейшее интегрирование по частям бессмысленно. Но полученное равенство, в которое заданный интеграл входит дважды, можно использовать как уравнение, из которого мы найдем A. Итак, сначала дважды интегрируем по частям:

$$\begin{aligned} A &= \int \sin x e^x \, dx = \langle u = \sin x,\ dv = e^x \, dx,\ du = \cos x \, dx,\ v = e^x \rangle = \\ &= \sin x e^x - \int \cos x e^x \, dx = \langle u = \cos x,\ dv = e^x \, dx,\ du = -\sin x \, dx,\ v = e^x \rangle = \\ &= \sin x e^x - \left( \cos x e^x + \int \sin x e^x \, dx \right) = \sin x e^x - \cos x e^x - A. \end{aligned}$$

Теперь решим уравнение

$$A = \sin x e^x - \cos x e^x - A$$

относительно A и получим ответ:

$$A = \frac{\sin x - cosx}{2} e^x + C.$$

## Приложение

[1] Например, потому, что

$$\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}\Big|_{x=1} - \operatorname{arctg} 1 = \pi/4 - \pi/4 = 0.$$

Поскольку доказано, что $\operatorname{arcctg}\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x \equiv \mathrm{const} = C$ в интервале $(0, \infty)$, то $C = 0$.

[2] Аналогично предыдущему. Так как

$$\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}\Big|_{x=-1} - \operatorname{arctg}(-1) = 3\pi/4 + \pi/4 = \pi,$$

то в интервале $(-\infty; 0)$ константа $C = \pi$.

[3] В системе *Mathematica* вычисление неопределенного интеграла производится с помощью оператора `Integrate[f,x]`, где `f` — подынтегральная функция, `x` — переменная интегрирования.

Прежде всего проверим, насколько хорошо *Mathematica* знает таблицу интегралов. Зададим ей первый интеграл из нашей таблицы:

$\mathrm{Integrate}[x^\alpha, x]$

$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

Мы видим, что произвольную постоянную *Mathematica* не добавляет, предоставляя это делать пользователю. Во-вторых, при вычислении интеграла она старается найти ответ в наиболее общем виде, считая, что $\alpha \neq -1$.

Вместо того, чтобы набирать слово `Integrate`, можно выщелкнуть шаблон для неопределенного интеграла из панели инструментов и в полях ввода, находящихся за знаком интеграла, набрать подынтегральную функцию и переменную интегрирования.

Например, найдем таким способом второй табличный интеграл:

$s = \displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx$

$\mathrm{Log}[x]$

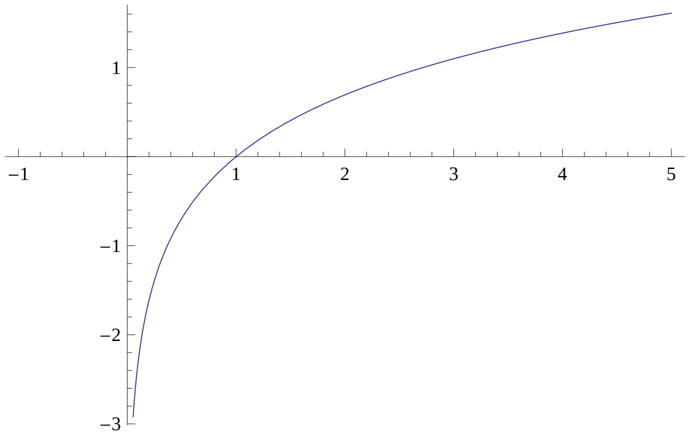
Напомню, что `Log` означает натуральный логарифм. Не надо думать, что *Mathematica* дает неполный ответ, не заключив переменную $x$ в знаки модуля. Дело в том, что *Mathematica* выдает решение в комплексной форме, хотя и использует $x$, а не $z$! А комплексный логарифм существует и для отрицательных значений аргумента. Действительно, вычислим найденный интеграл при $x = -1$:

$s\,/.\,x \to -1$

$\mathrm{I}\,\pi$

В обозначениях системы *Mathematica* символ I является мнимой единицей. Правда, если дать задание построить график найденного интеграла, *Mathematica* построит график действительного логарифма, а не комплексного:

Plot[s, {x,-1,5}]




Все эти особенности надо иметь в виду для грамотного применения системы *Mathematica*. Чтобы получать ответы в привычной для нас форме, надо просто вспомнить, что главное значение комплексного логарифма определяется формулой

$$\ln z = \ln|z| + j\arg z,\ z = x + jy,$$

поэтому ответ, выданный системой *Mathematica*, следует интерпретировать как

$$\ln z + C = \ln|z| + j\arg z + C = \begin{cases} \ln x + C, & x > 0; \\ \ln(-x) + j\pi + C, & x < 0; \end{cases} = \ln|x| + \begin{cases} C, & x > 0; \\ C_1, & x < 0; \end{cases}$$

$C_1 = j\pi + C$, потому что на действительной оси $y = 0$, а $\arg z = 0$ для положительных чисел и $\arg z = \pi$ для чисел отрицательных. Отметим, что полученная формула записана в полном соответствии с замечанием 2. Кроме того, она совпадет с табличным интегралом 2, если приравнять константы $C$ и $C_1$. Таким образом, в ответе, выдаваемом системой, надо просто заключать переменную $x$ в знаки модуля, считая после этого $x$ действительной переменной.

Еще один необычный ответ появляется при вычислении 14-го табличного интеграла:

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2}\, dx$$

$$\frac{\mathrm{ArcTanh}\left[\frac{x}{a}\right]}{a}$$

В отечественных обозначениях это означает, что, по мнению системы *Mathematica*,

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{a}\,\mathrm{arth}\,\frac{x}{a} + C,$$

где $\mathrm{arth}\, x$ — главное значение ареатангенса. Понимая уже, что *Mathematica* дала ответ в комплексной форме, используем формулу комплексного анализа

$$\mathrm{Arth}\, z = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{1+z}{1-z}$$

для приведения ответа к виду табличного интеграла 14. Мы получим, учитывая, что на действительной оси $z = x + j0 = x$, следующее:

$$\mathrm{arth}\, x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + j\arg\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \begin{cases} 0, & |x| < 1; \\ j\pi, & |x| > 1; \end{cases}$$

так как дробь $(1+x)/(1-x)$ положительна и ее аргумент равен нулю при $|x| < 1$ и отрицательна, а ее аргумент равен $\pi$ при $|x| > 1$.

Следовательно, ответ, предлагаемый системой *Mathematica*, надо для действительной оси понимать так:

$$\frac{1}{a}\operatorname{arth}\frac{z}{a}+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+\begin{cases}0, & |x|<|a|;\\ j\pi, & |x|>|a|;\end{cases}+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+\begin{cases}C, & |x|<|a|;\\ C_1, & |x|>|a|;\end{cases}$$

$C_1=j\pi+C$. Снова приравнивая константы $C$ и $C_1$, приходим к табличному интегралу 14. Этим табличным интегралом и следует заменять ответ, который дает *Mathematica*.

Перейдем к табличному интегралу 12:

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$-\operatorname{ArcTan}\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{-a^2+x^2}\right]$$

После упрощения получаем

$$\operatorname{Simplify}[\%]$$

$$\operatorname{ArcTan}\left[\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]$$

Как видим, *Mathematica* предпочитает арктангенс, а не арксинус. Приведем полученный ответ к указанному в таблице интегралов. Заметим, что, если $x=\sin y$, то $y=\arcsin x$, и поэтому равенство

$$\operatorname{tg}y=\frac{\sin y}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

означает, что

$$y=\arcsin x=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Подставляя $x/a$ вместо $x$, получаем формулу

$$y=\arcsin\frac{x}{a}=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

из которой следует тождественность табличного интеграла 12 и ответа, полученного системой *Mathematica*.

Еще одно, небольшое, отличие *Mathematica* демонстрирует для табличного интеграла 13:

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$$

$$\operatorname{Log}[2(x+\sqrt{-a^2+x^2})]$$

Но этот ответ к табличному виду преобразуется совсем просто:

$$\ln[2(x+\sqrt{-a^2+x^2})]+C=\ln 2+\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C_1,$$

где $C_1=\ln 2+C$.

Остальные табличные интегралы *Mathematica* берет совсем, как мы, например,

$$\int\frac{1}{\operatorname{Sinh}[\mathrm{x}]^2}\,dx$$

$$-\operatorname{Coth}[x]$$

Перейдем к примерам, рассмотренным на лекции. Для первого и второго из них получаем

$$\operatorname{Integrate}[3x^2+x-6+1/x^3,x]$$

$$-\frac{1}{2x^2} - 6x + \frac{x^2}{2} + x^3$$

$$\int \mathrm{Sin}[3x+5]\,dx$$

$$-\frac{1}{3}\,\mathrm{Cos}[5+3x]$$

Третий пример:

$$\int \left(e^{-x} + 2\sqrt{x+3} - \frac{1}{4-x^2}\right)dx$$

$$-e^{-x} + \frac{4}{3}(3+x)^{3/2} + \frac{1}{4}\,\mathrm{Log}[2-x] - \frac{1}{4}\,\mathrm{Log}[2+x]$$

Здесь, в свете сказанного выше, надо комплексные логарифмы превратить в действительные, взяв аргументы этих функций в знаки модуля.

Посмотрим, как *Mathematica* справится с интегрированием подстановкой:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]\right)$$

Если заменить арктангенс на $\arcsin\frac{x}{a}$, как мы делали это раньше, и выполнить элементарные преобразования, получится тот же ответ, что на лекции.

Вывод, который мы должны сделать в связи с этим и другими примерами, заключается в том, что неопределенные интегралы могут выражаться формулами, на вид мало похожими друг на друга. Не всегда это означает, что имеет место ошибка, возможно, это — просто разные выражения одного и того же. Чтобы исключить сомнения, надо попытаться привести (не сделав при этом ошибок!) один ответ к другому или оба ответа к какому-нибудь третьему выражению.

Второй способ проверки заключается в том, чтобы взять производные от двух разных ответов. Обе производные должны оказаться равными подынтегральной функции.

Зададим системе *Mathematica* второй пример на интегрирование подстановкой:

$$\int \frac{\mathrm{Log}[x]+1}{x}\,dx$$

$$\mathrm{Log}[x] + \frac{\mathrm{Log}[x]^2}{2}$$

Здесь модуль под знаком логарифма не нужен, так как подынтегральная функция определена только для $x > 0$.

С интегрированием по частям *Mathematica* тоже справляется:

$$\int x^2 e^x\,dx$$

$$e^x(2 - 2x + x^2)$$

$$\int \mathrm{Sin}[x]e^x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\,e^x(-\mathrm{Cos}[x] + \mathrm{Sin}[x])$$

## Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление*. – М.: Наука, 1984, – с. 195-205.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*. – М.: Рольф, 2000. Ч. 1. – с. 193–203.