Функция I

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Понятие функции и отображения. Функция одного действительного аргумента. Способы задания функции, классификация функций. Основные элементарные функции. Понятие элементарной функции.

Анимация суперпозиции двух функций, демонстрации графиков основных элементарных функций и функций, применяемых в электронике.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Особенности использования основных элементарных функций, встроенных в систему *Mathematica*. Задание пользователем собственных функций. Построение графиков функций в системе *Mathematica*. Возможности системы для определения области существования и множества значений функции.

26 января 2012 г.

Продолжим повторение школьного материала, дополняя и углубляя его сведениями, необходимыми для изучения высшей математики.

1 Функция

1.1 Понятие функции

При исследовании различных проблем в математике и технике некоторые величины, изучаемые в этих проблемах, не изменяют своих значений, т.е. остаются равными одному и тому же значению. Такие величины называют ***постоянными***, или ***константами***. Среди них есть такие, которые не изменяются никогда: π, e, ... Они называются ***абсолютными постоянными***. Другие величины изменяются и потому их называют ***переменными***.

Пусть X и Y – два множества. ***Функцией*** на X называется правило, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный эле-

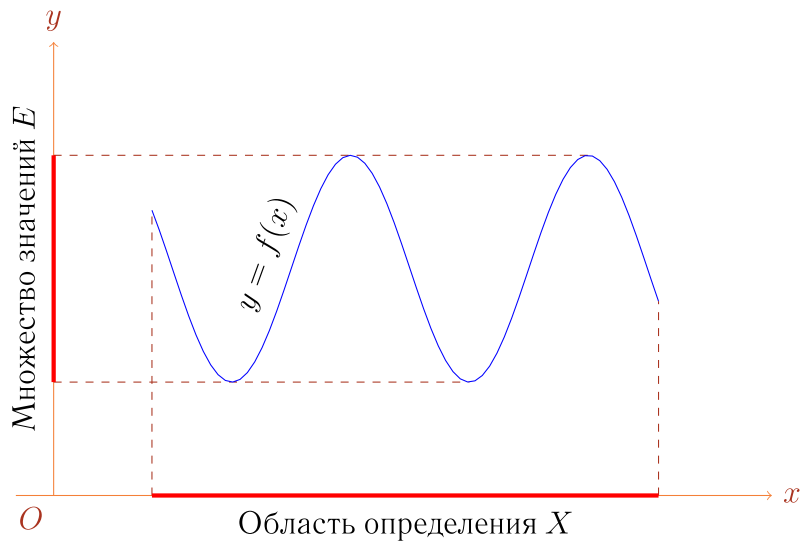


Рис. 1. К определению функции.

мент $y \in Y$. Функция обозначается $y = f(x)$, или $y = y(x)$, или $f : X \longrightarrow Y$, или $X \xrightarrow{f} Y$.

Множество X называется ***областью определения***, или ***областью существования***, а множество $E = \{y : y = f(x), x \in X\}$ – ***множеством значений*** функции (см. рис. 1).

Отметим, что множество значений не обязательно совпадает с множеством Y. Например, функция $f(n) = 2n$ ставит в соответствие каждому натуральному числу n четное число $2n$ и потому можно считать, что $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, т.е. $Y = \mathbb{N}$. Но множеством значений этой функции является множество четных чисел $E = \{m : m = 2n, n \in \mathbb{N}\}$.

Функцию называют также ***отображением*** и тогда для $y = f(x)$ элемент $x \in X$ называют ***прообразом*** элемента $y \in Y$, а y – ***образом*** элемента x.

Образом множества $A \subset X$ для отображения $f : X \longrightarrow Y$ называют множество

$$f(A) = \{y \in Y : \exists (x) \;\; x \in A \wedge y = f(x)\}$$

тех элементов Y, которые являются образами элементов множества A. Так, множество значений $E = f(X)$, где X – область определения функции f.

Множество

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

тех элементов X, образы которых принадлежат B, называют ***прообразом*** множества $B \subset Y$ (см. рис. 2).

Отображение $f : X \longrightarrow Y$ называется ***взаимно однозначным***, если выполняются два условия: $Y = f(X)$ (множество значений является образом

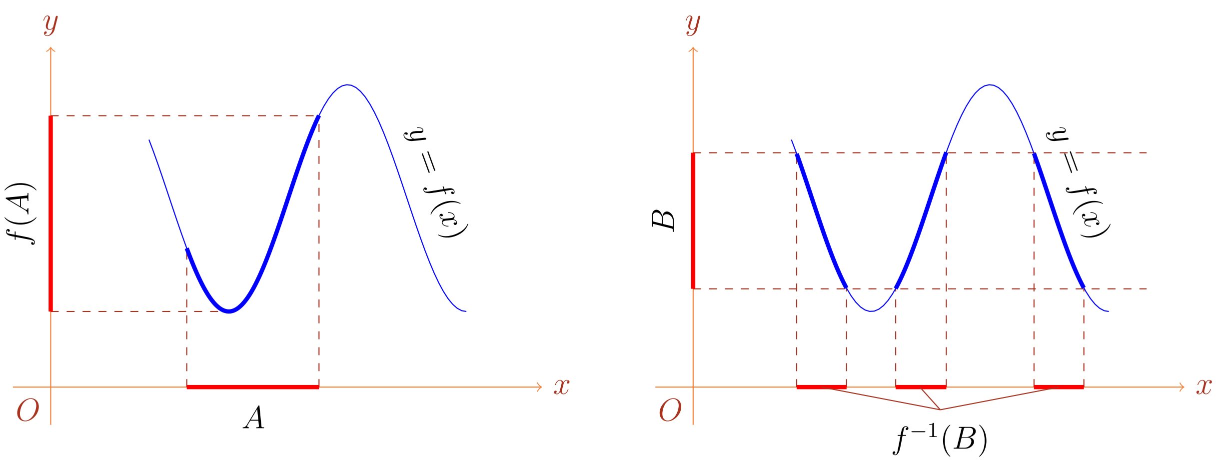


Рис. 2. Образ и прообраз множества.

области определения) и $\forall\,(x_1, x_2 \in X)\;\; f\,(x_1) = f\,(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$ (различные элементы имеют различные образы).

Лемма 1. *Отображение является взаимно однозначным, если и только если для каждого $x \in X$ найдется единственный его образ $y \in Y$, а для каждого $y \in Y$ найдется единственный его прообраз $x \in X$.*

Доказательство. Необходимость. Действительно, пусть отображение взаимно однозначно и $x \in X$. Тогда $y = f(x) \in Y$ и по определению функции такой элемент y единственен. Пусть теперь $y \in Y$. В силу первого условия найдется элемент $x \in X$, такой, что $y = f\,(x)$, а в силу второго условия такой x будет единственным.

Достаточность. Очевидно, что $f(X) \subset Y$. Пусть $y \in Y$. Тогда по условию теоремы у него существует единственный прообраз $x \in X$: $y = f(x)$. Отсюда следует, что $y \in f(X)$. Значит, $Y \subset f(X)$. В итоге $Y = f(X)$.

Пусть $x_1, x_2 \in X$ и $f(x_1) = f(x_2) = y$. Так как $y \in Y$, то y имеет единственный прообраз, следовательно, $x_1 = x_2$. □

Если отображение между множествами X и Y взаимно однозначно, то говорят, что между ними установлено ***взаимно однозначное соответствие (ВОС)***. Например, между осью Ox и осью Oy функция $y = x^3$ устанавливает взаимно однозначное соответствие, потому что каждому числу отвечает единственное значение его куба и единственное значение корня кубического из этого числа (см. рис. 3, а)).

В то же время функция, например, $y = x^2$ не дает взаимно однозначного соответствия между осью Ox и положительной полуосью Oy, так как числу $y \in (0; \infty)$ отвечают два числа: $\pm\sqrt{y}$ (рис. 3, б)). В то же время между положительной полуосью Ox и положительной полуосью Oy эта функция такое

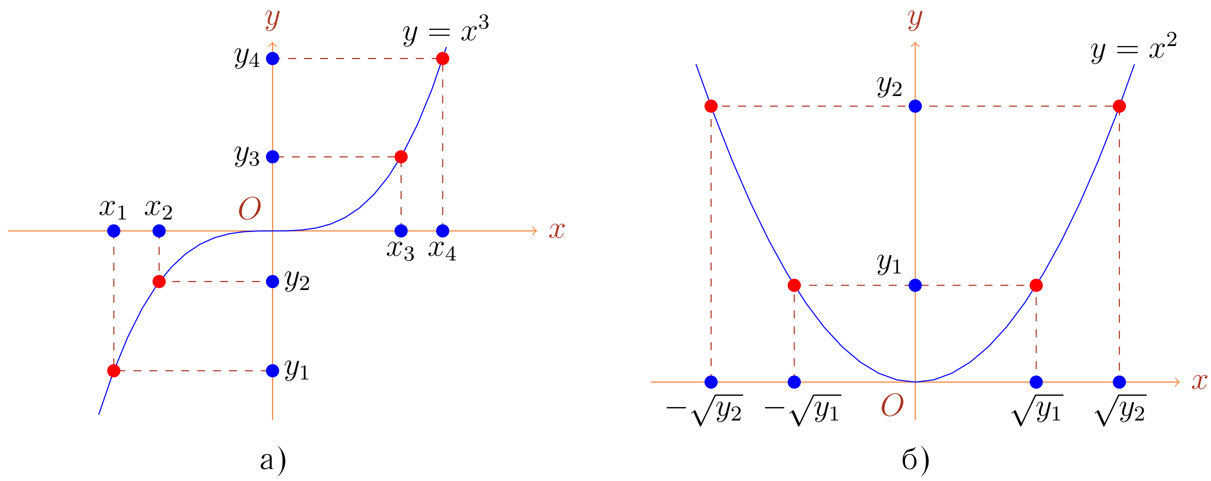


Рис. 3. Взаимно однозначное соответствие а) имеется, б) отсутствует.

соответствие устанавливает.

Если $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$, то $x \in X$ называется ***независимой*** переменной, или ***аргументом***, а $y \in Y$ – ***зависимой*** переменной, или ***функцией***. Функцию в таком случае называют ***действительной функцией одного аргумента***. Остаток лекции посвятим именно таким функциям.

Графиком функции называют множество $\Gamma = \{(x, y) : y = f\left(x\right), x \in X\}$.

Например, график функции $y = |x|$ имеет вид, показанный на рис. 4, а).

Специфическим типом функции является ***последовательность***, которая представляет собой функцию, определенную на множестве $\mathbb{N}$. Эта функция ставит в соответствие натуральному числу n значение некоторой величины $a_n \in \mathbb{R}$, т.е. $a_n = f(n)$, или $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. В школе изучались последовательности, образующие арифметические и геометрические прогрессии.

Графиком последовательности является множество изолированных точек на плоскости, из которых для наглядности опускают перпендикуляры на координатную ось, рис. 4, б).

В Приложении[1)] представлены некоторые функции, встречающиеся в областях знаний, связанных с вашей специальностью.

1.2 Способы задания функции

1.2.1 Аналитический способ задания

Функцию определяет математическая формула. Что понимать под формулой? Вопрос непростой. Формула может включать в себя арифметические и другие действия над функциями, причем, даже бесконечное число таких действий, может содержать логические условия и т.д. Кроме того, в будущем в математике наверняка появятся новые понятия, которые станут составной частью аналитических выражений.

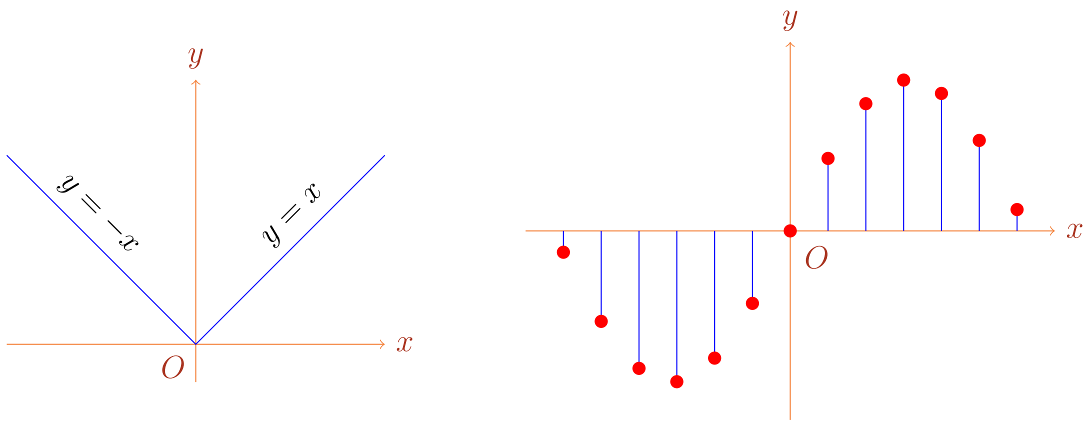


Рис. 4. График: а) функции $y = |x|$, б) последовательности.

Вот несколько примеров аналитического задания функции:

$$y = \frac{\lg(a + \sin^3 x + \operatorname{arctg} x)}{1 + x^2}, \tag{1}$$

$$y = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$y = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \tag{3}$$

$$y = \underbrace{\cos(\cos(\ldots \cos x}_{\infty} \ldots)). \tag{4}$$

Для функций, заданных формулой, часто областью определения считают область допустимых значений аргумента, т.е. таких его значений, для которых вычисление значения функции может быть доведено до числа.

Аналитический способ задания функции наиболее популярен в математике, так как позволяет применить для исследования функции всю мощь методов математического анализа. Кроме того, используя в определении функции параметры (переменные, характеризующие какое-либо свойство функции и не являющиеся ее аргументом), можно аналитически исследовать целые классы функций. Например, в формуле (1) параметром является величина a.

К недостаткам этого способа задания функции относятся малая наглядность и практическая невозможность задать некоторые виды функций (см. алгоритмический способ задания).

1.2.2 Графический способ задания

Функция задается своим графиком, а, чаще всего, некоторым фрагментом своего графика. Примерами могут быть графики, которые чертят на движущейся бумажной ленте приборы-самописцы, графики, которые высвечиваются на экранах осциллографов и других электронных приборов.

Достоинством метода является наглядность и возможность визуального изучения многих особенностей поведения функции.

К недостаткам относится низкая точность получения значений функции из ее графика, невозможность исследования функции аналитическими методами, часто фрагментарность графика.

1.2.3 Табличный способ задания

Хорошо известны таблицы синусов, косинусов и других тригонометрических функций, таблицы логарифмов и т.д. Все это — примеры табличного задания функции.

Достоинством метода является возможность выбора из таблицы значений функции для табличных значений аргумента с достаточной точностью.

В недостатки следует записать отсутствие наглядности в таком описании функции, невозможность ее исследования аналитическими методами, необходимость применения интерполяции для вычисления значений функции, соответствующих нетабличным значениям аргумента.

1.2.4 Алгоритмический способ задания

Функция задается с помощью алгоритма, который вычисляет ее значение по заданному значению аргумента. Примером может служить рассмотренный на лекции «Числа» алгоритм вычисления квадратного корня при фиксированной точности вычислений.

К достоинствам метода следует отнести возможность вычисления очень сложных функций, которые аналитически задать бывает или очень трудно, или нецелесообразно. Кроме того, алгоритм, реализованный в виде программы для ЭВМ, позволяет получить значения функции с очень высокой точностью, построить ее график, а, если надо, то и составить таблицу значений.

Недостатками являются невозможность исследования функции аналитическими методами, в том числе классов функций при наличии в определении функции параметров (что́ не исключает получения, например, графиков функции для отдельных значений параметров).

1.3 Классификация функций

Функция $f\left(x\right)$ называется ***ограниченной сверху*** на множестве $D\subset X\subset\mathbb{R}$, если

$$\exists\left(M\in\mathbb{R}\right)\forall\left(x\in D\right)\ f\left(x\right)\leq M.$$

Например, парабола $y = -x^2$ ограничена сверху.

Функция $f(x)$ называется ***ограниченной снизу*** на множестве $D \subset X \subset \subset \mathbb{R}$, если

$$\exists (m \in \mathbb{R}) \forall (x \in D) \;\; f(x) \geq m.$$

Примером ограниченной снизу функции может служить функция $y = x^2$.

Функция $f(x)$ называется ***ограниченной*** на множестве $D \subset X \subset \mathbb{R}$, если она ограничена на этом множестве и сверху, и снизу. К ограниченным функциям относятся, например, синус и косинус.

Функция $f(x)$ ***возрастает*** на множестве $D \subset X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall (x_1, x_2 \in D) \;\; x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Если заменить знак нестрогого неравенства знаком строгого, получится определение ***строгого возрастания*** функции. Так, функция $y = x^3$ строго возрастает на всей числовой оси.

Функция $f(x)$ ***убывает*** на множестве $D \subset X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall (x_1, x_2 \in D) \;\; x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Если заменить знак нестрогого неравенства знаком строгого, получится определение ***строгого убывания*** функции. Например, функция $y = -x^3$ строго убывает на всей числовой оси.

Возрастающая или убывающая функция называется ***монотонной***. Строго возрастающая или строго убывающая функция называется ***строго монотонной***.

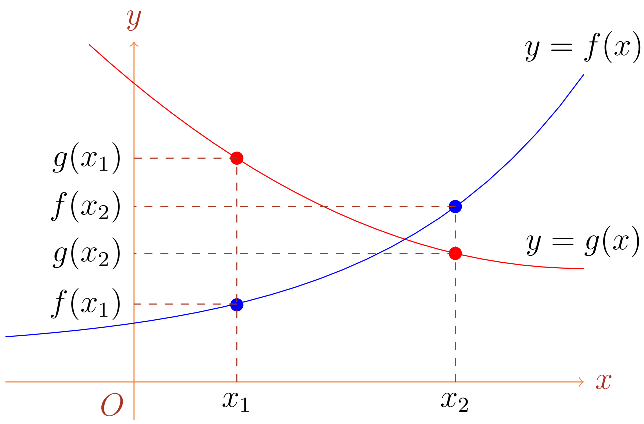


Рис. 5. Функции $f(x)$ возрастает, а функция $g(x)$ убывает.

Множество $D \subset \mathbb{R}$ называется ***симметричным***, если

$$\forall (x \in D) \;\; -x \in D.$$

Функция $f(x)$ называется ***четной*** на симметричном множестве $D \subset X \subset \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall (x \in D) \;\; f(-x) = f(x) \, .$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат. Примеры четных функций: $y = x^2$, $y = \cos x$.

Функция $f(x)$ называется ***нечетной*** на симметричном множестве $D \subset \subset X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall (x \in D) \;\; f(-x) = -f(x) \, .$$

График нечетной функции центрально симметричен относительно начала координат. Примеры нечетных функций: $y = x^3$, $y = \sin x$.

Функция $f(x)$ называется ***периодической*** с периодом $\omega > 0$ на симметричном множестве $D \subset X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall (x \in D) \;\; (x + \omega \in D \wedge x - \omega \in D) \Longrightarrow f(x) = f(x + \omega) = f(x - \omega) \, .$$

Периодическими являются, например, тригонометрические функции.

Для функций $f : X \longrightarrow U$, $g : U \longrightarrow Y$ можно определить ***сложную*** функцию $h : X \longrightarrow Y$: $h(x) = g(f(x))$, $x \in X$. Или по-другому: $u = f(x)$, $y = g(u)$. Сложная функция h называется также ***суперпозицией*** функций f и g.

Конструкция сложной функции показана на рис. 6. Видно, что функция h выполняет действие, которое заключается в поочередном применении функций f и g.

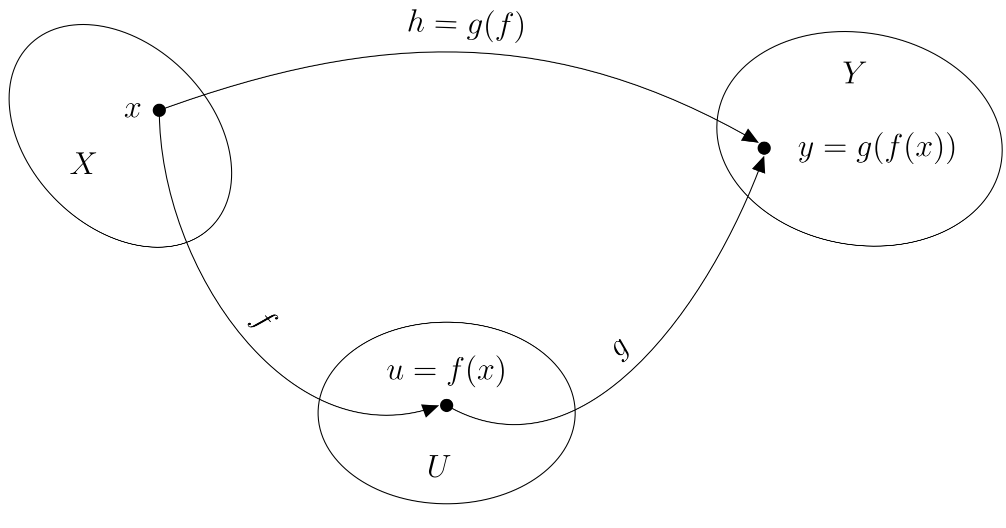


Рис. 6. К понятию сложной функции.

Следующий рис. 7 с анимацией демонстрирует, как график сложной функции образуется из графиков составляющих ее функций. Изменение аргумента

x на первом графике вызывает синхронное изменение этого же аргумента на третьем графике. Кроме того, изменение x приводит на первом графике к изменению величины $u = f(x)$. Это изменение с помощью биссектрисы координатного угла второго графика переводится в изменение такой же величины на оси абсцисс этого графика. Последнее влечет изменение величины $y = g(u)$ на втором графике, которая становится ординатой третьего графика, изменяющейся в соответствии с абсциссой x на этом же графике. Были использованы функции $f(x) = x^2$, $g(u) = \sin u$ и $h(x) = \sin x^2$. Для лучшего понимания процесса, полезно изучить его в пошаговом режиме.

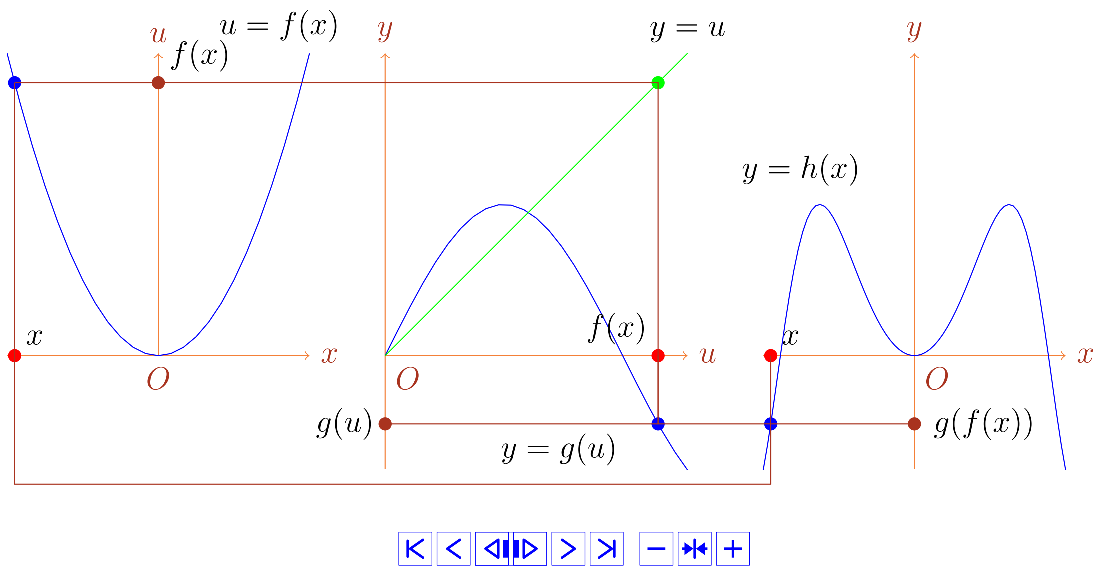


Рис. 7. Суперпозиция функций $y = h(x) = g(f(x))$.

Говорят, что для функции $f : X \longrightarrow Y$, $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ существует ***обратная*** для нее функция $f^{-1} : Y \longrightarrow X$, если

$$\forall\,(x \in X)\;\; f^{-1}\,(f\,(x)) = x$$

и

$$\forall\,(y \in Y)\;\; f(f^{-1}(y)) = y.$$

Из определения видно, что функция $f(x)$ является обратной к функции $f^{-1}(y)$, поэтому эти функции называют также ***взаимно обратными***.

Так, например, функции $f(x) = 10^x$ и $g(y) = \lg y$ являются взаимно обратными на множествах $X = (-\infty, \infty)$ и $Y = (0, \infty)$, так как $g(f(x)) = \lg 10^x = x$ и $f(g(y)) = 10^{\lg y} = y$.

Функции же $f(x) = \operatorname{tg} x$ и $g(y) = \operatorname{arctg} y$ не являются взаимно обратными на множествах $X = (-\infty, \infty)$ и $Y = (-\infty, \infty)$, потому что, хотя $\operatorname{tg} \operatorname{arctg} y = y$, но $\operatorname{arctg} \operatorname{tg} \pi = \operatorname{arctg} 0 = 0 \neq \pi$. В то же время при изменении множества X на $X = (-\pi/2, \pi/2)$ эти функции становятся взаимно обратными.

Напомню, что графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

1.4 Элементарные функции

Чаще всего при решении задач математического анализа используются одни и те же функции, которые вы изучали в школе и которые называют ***основными элементарными функциями***. Приведу список этих функций.

1°. *Степенная функция:* $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

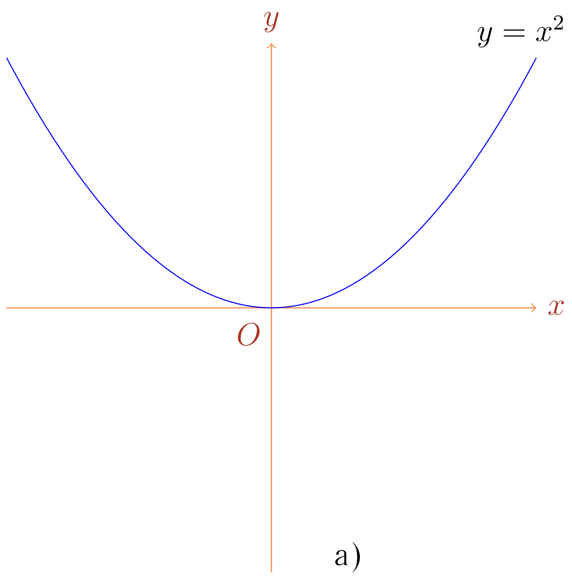
2°. *Показательная функция:* $y = a^x$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

3°. *Логарифмическая функция:* $y = \log_a x$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

4°. *Тригонометрические функции:* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

5°. *Обратные тригонометрические функции:* $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Щелкая мышкой по анимированным рис. 8 и 9, можно получить представление о разновидностях степенной, показательной и логарифмической функций, увидеть графики тригонометрических и обратных тригонометрических функций.



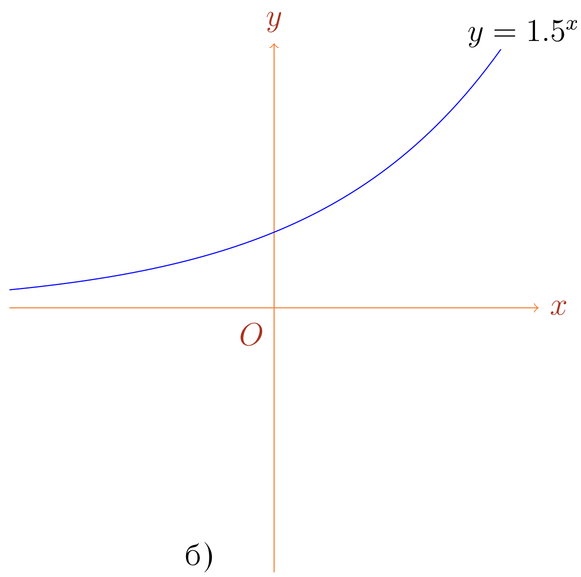
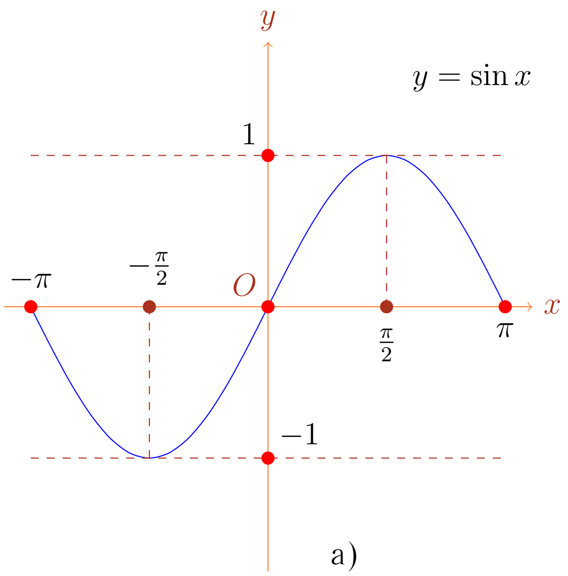


Рис. 8. Функции: а) степенная, б) показательная и логарифмическая.

Из этих функций можно, применяя к ним четыре арифметических действия и операцию суперпозиции, конструировать новые функции. Если при этом придерживаться определенных ограничений, то будут получаться все еще в достаточной степени простые функции. Точное определение таково.



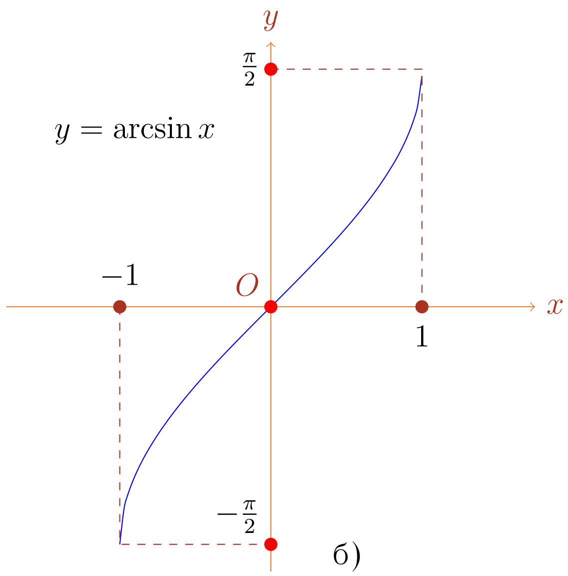


Рис. 9. Функции: а) тригонометрические, б) обратные тригонометрические.

Функция называется ***элементарной***, если она получена с помощью конечного числа арифметических действий и конечного числа суперпозиций из основных элементарных функций и констант.

Из определения следует, что основные элементарные функции являются элементарными (но не наоборот).

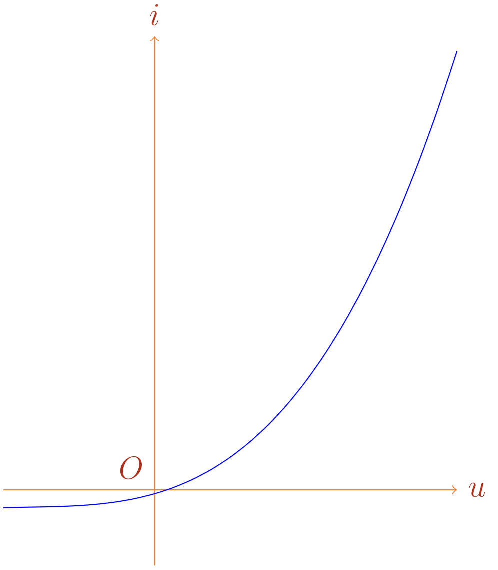
Примером элементарной функции может служить функция (1). Функция (2) неэлементарна, так как в ее определении участвует логическое условие вида «если...», «то...». Функция (3) неэлементарна, так как в определяющем ее выражении использовано бесконечное число сложений. Причина неэлементарности функции (4) заключается в бесконечном применении суперпозиции функции косинуса. Тем не менее, неэлементарные функции являются функциями и будут нами изучаться и применяться в соответствующих разделах высшей математики.

В Приложении[2)] приведены некоторые примеры использования системы *Mathematica* при работе с основными элементарными функциями, возможности задания собственных функций и построения графиков функций.

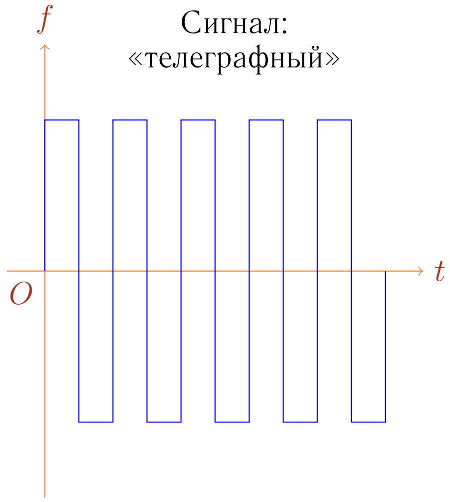
Приложение

[1)] Теория современной элементной базы в области электро- и радиотехники, электроники включает в себя описание так называемых вольт-амперных, вебер-амперных, вольт-кулонных характеристик элементов. Например, вольт-амперная характеристика показывает, как влияет изменение напряжения на входе элемента на ток в нем. Таким образом, эти характеристики представляют собой функции одного действительного аргумента. Графики некоторых из них можно увидеть, щелкая мышкой на анимационном рис. 10, а).

Сигналы, подающиеся на вход систем автоматики, проходящие через них и после преобразования поступающие на выход, также являются своеобразными функциями. Их аргументом всегда является время, обычно обозначаемое буквой t. Они часто разрывны, часто имеют вид импульса (кратковременного воздействия) и периодичны. Примеры сигналов показаны на анимационном рис. 10, б).



а)



б)

Рис. 10. Функции: а) вольт-амперные и т.п. характеристики, б) сигналы.

[2)] *Mathematica* предоставляет пользователю огромное количество самых разных функций от основных элементарных до специальных и узко специальных. Познакомимся сначала с основными элементарными функциями.

Степенную функцию можно задавать в виде x^a, а *показательную* — в виде a^x, вычисляя их значения следующим образом:

```
Print["5^2 = ", 5^2, ",  ", HoldForm[(-1/3)^3], " = ", (-1/3)^3, ",  2^π = ", 2^π, ",
    2^π//N = ", 2^π//N]
```

5^2 = 25, $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$, $2^\pi = 2^\pi$, 2^π//N = 8.82498

Естественно, число 2^π *Mathematica* не стала обрабатывать, так как оно упрощению не подлежит, а вот его приближенное значение 2^π//N вычислила с точностью до шести цифр. Оператор `HoldForm` не позволяет системе *Mathematica* преобразовывать выражение, являющееся аргументом этого оператора. Поэтому `HoldForm`$\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right]$ дает $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$, а $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$ дает $-\frac{1}{27}$.

Далее получается нечто не совсем понятное:

$(-1)^{3/2}$

−I

$(-1)^{2/3}$

$(-1)^{2/3}$

В первом случае действие в области действительных чисел выполнить нельзя, но *Mathematica* какой-то ответ все же выдает. Во втором случае ясно, что в ответе должна быть единица, но *Mathematica* никаких действий не выполняет. Дело в том, что *Mathematica* предпочитает работать в области комплексных чисел, которые мы с вами еще «не проходили», поэтому в первом ответе она выдает комплексное число (I — так называемая мнимая единица), а во втором случае не выдает ничего. Попробуем для второго случая получить приближенный ответ:

$(-1)^{2/3}$ // N

```
-0.5 + 0.866025 I
```

Опять-таки получили комплексное число. А где же 1? Оказывается, *Mathematica* из всех возможных ответов выдает только один, так называемое главное значение комплексной функции. А оно не всегда совпадает с действительным числом, которое тоже является ответом. Что же делать?

Самое простое — записать по-другому степень:

$\left((-1)^2\right)^{1/3}$

1

Другое решение — подключить к документу с помощью оператора `Needs` пакет `RealOnly`, который ориентирует систему *Mathematica* на работу с действительными числами:

```
Needs["Miscellaneous`RealOnly`"]
```

```
General::obspkg: Miscellaneous‘RealOnly‘ is now obsolete. The legacy
version being loaded may conflict with current Mathematica functionality.
See the Compatibility Guide for updating information. >>
```

Сообщение, выданное системой *Mathematica*, означает, что пакет `RealOnly` устарел и его подключение может нарушить нормальную работу системы. Если немного углубиться в этот вопрос, то в документации можно найти совет вместо пакета `RealOnly` воспользоваться возможностями, предоставляемыми операторами `Refine`, `Reduce`, `Assuming` и т.п. Но знакомство с этими возможностями увело бы нас далеко в сторону от темы «Функция», и поэтому мы все же воспользуемся нежелательным, но пока еще не ликвидированным пакетом `RealOnly`. С ним вычисление степеней будет выглядеть иначе:

$(-1)^{3/2}$

```
Nonreal::warning: Nonreal number encountered.
Nonreal
```

$(-1)^{2/3}$

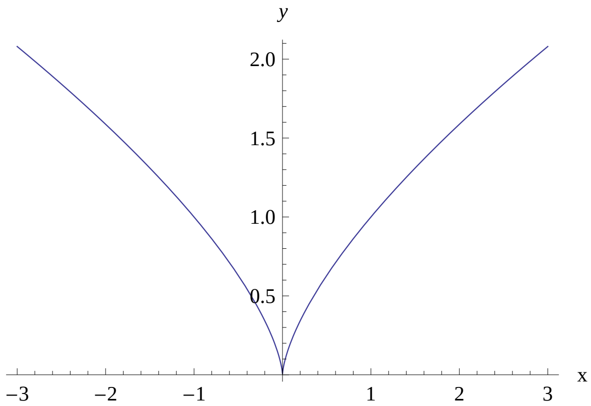
1

Для первой степени и сообщение, и ответ говорят об одном, что степень действительным числом не выражается. Для второго примера наконец-то получена единица!

С помощью оператора `Plot[f,{x,`x_{min}`,`x_{max}`},options]` *Mathematica* строит графики функций. Здесь `f` означает функцию, для которой строится график, список {x, x_{min}, x_{max}} содержит переменную-аргумент и диапазон ее изменения, `options` — опции, которые выражают те или иные требования пользователя к графику функции. Если вместо `f` подставить в оператор список $\{f_1 \ldots, f_n\}$, то на одном рисунке будут построены несколько графиков (тех функций, что перечислены в списке).

Построим график функции $y = x^{2/3}$:

```
Plot[x^(2/3),{x,-3,3},AxesLabel → {x,y}]
```



Опция `AxesLabel` задает названия осей координат. Кстати, стрелка при задании опции набирается на клавиатуре как `->`, а затем *Mathematica* превращает это сочетание символов в стрелку.

Еще одно замечание: без подключения пакета `RealOnly` *Mathematica* построила бы только правую ветвь графика!

Логарифмическая функция записывается как `Log[b,z]`, где `b` — основание, `z` — число, для которого вычисляется логарифм по основанию `b`. Отметим, что названия встроенных в систему *Mathematica* функций и операторов всегда начинаются с большой буквы, а их аргументы должны заключаться в квадратные, а не в круглые скобки. Вот пример вычисления значения логарифмической функции:

```
Log[10,1000]
3
```

Названия тригонометрических функций имеют следующее соответствие с привычными для нас названиями: `Sin` $\sim$ sin, `Cos` $\sim$ cos, `Tan` $\sim$ tg, `Cot` $\sim$ ctg. Аргумент тригонометрических функций по умолчанию задается в радианах:

`Sin[π/3]`

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

`Sin[π/3]//N`

`0.866025`

Если аргумент требуется задать в градусах, рядом с аргументом надо приписать слово `Degree`, или символ $^\circ$, который можно выщелкнуть мышкой из палитры, или визуализировать с помощью клавишного набора `Esc` `deg` `Esc`. Вот пример:

`Sin[60 °]`

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

В инженерных расчетах угол часто задается в градусах, минутах и секундах. Такой угол системе *Mathematica* требуется представить в виде строки, а затем перевести ее в градусы в виде обычной десятичной дроби. Этой цели служит оператор `FromDMS`:

```
FromDMS["20°3′1.45\""]
```

```
20.0504
```

Теперь можно вычислить тригонометрическую функцию такого угла:

```
Sin[% Degree]
```

```
0.342847
```

Mathematica способна сообщить о том, что тригонометрическая функция в заданной точке не существует:

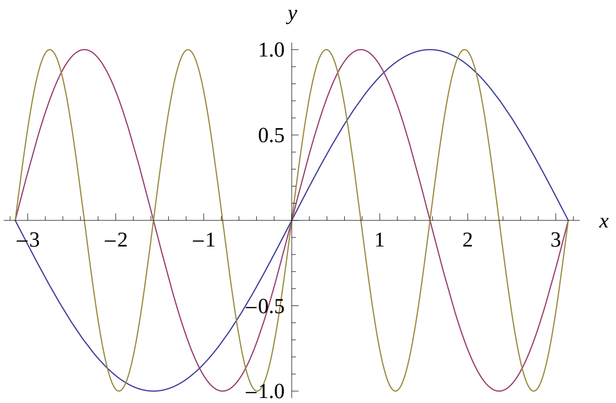
```
Tan[π/2]
```

```
ComplexInfinity
```

что́ означает «комплексная бесконечность» (не забывайте, что *Mathematica* предпочитает работать в комплексной области).

Покажем, как с помощью оператора `Plot` вывести на дисплей сразу несколько синусоид:

```
Plot[{Sin[x],Sin[2x],Sin[4x]},{x,−π,π},AxesLabel → {x,y}]
```



Названия обратных тригонометрических функций следующим образом соответствуют принятым у нас: `ArcSin` ∼ arcsin, `ArcCos` ∼ arccos, `ArcTan` ∼ arctg, `ArcCot` ∼ arcctg. Значения функций по умолчанию вычисляются в радианах:

```
ArcCos[1/2]
```

$\frac{\pi}{3}$

Чтобы получить ответ в градусах, надо применить следующую комбинацию операторов:

```
FullSimplify[ArcCos[1/2]/Degree]
```

```
60
```

Впрочем, для приближенных значений поступают проще:

```
ArcCos[0.9]/Degree
```

```
25.8419
```

Ответ получен в градусах в виде десятичной дроби. Чтобы перевести его в градусы, минуты и секунды, применим оператор `DMSString`:

```
DMSString[%]
```

```
25°50′30.95795″
```

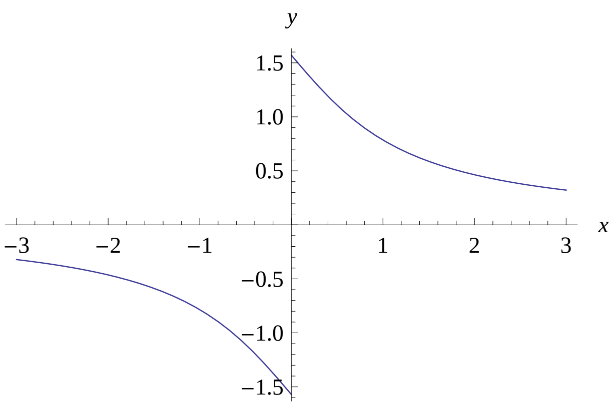
Одна из функций, `ArcCot`, не только названием отличается от arcctg, но и определена не совсем так, как мы привыкли. Например,

```
ArcCot[-1]
```

$-\frac{\pi}{4}$

Функция arcctg имеет множеством значений отрезок $[0, \pi]$, а функция `ArcCot` — $[-\pi/2, \pi/2]$, причем, `ArcCot[0]`$= \pi/2$. Ее график разрывен:

```
Plot[ArcCot[x],{x,−3,3},AxesLabel → {x,y}]
```



Это неудобство можно устранить, если ввести собственную функцию, обладающую свойствами функции arcctg. *Mathematica* предоставляет такую возможность, позволяя пользователю определять свои собственные функции, а затем использовать их по своему разумению.

Следует отметить, что в системе *Mathematica* имеется две конструкции функций: с немедленным и отложенным присваиванием. В первом случае функция одного переменного задается как `f[x_] = expr`, а во-втором — как `f[x_] := expr`, где `x_` — аргумент функции, `expr` — выражение, определяющее функцию и, вообще говоря, зависящее от `x`. В первом случае при задании функции выражение `expr` вычисляется и принимает свой окончательный вид, который и используется при вычислении значения функции. Во втором случае выражение `expr` представляет собой как бы программу, которая заново вызывается для выполнения при каждом обращении к функции.

Рассмотрим два примера. Зададим следующую функцию:

```
iex[x_] = Expand[(1 + x)^2]
1 + 2 x + x^2
iex[y + 2]
1 + 2(2 + y) + (2 + y)^2
```

В первой строке ввода задается функция пользователя `iex`, имя которой начинается с маленькой буквы. Этого требует элементарная предусмотрительность: если пользователь случайно назовет свою функцию тем же именем, которым называется какая-нибудь функция, встроенная в систему *Mathematica*, конфликтная ситуация не возникнет. Заметьте, что в списке аргументов в квадратных скобках после `x` стоит знак подчеркивания, а в правой части оператора присваивания такой знак отсутствует.

Следующая строка, строка вывода, показывает, что правая часть при задании функции немедленно выполнилась, т.е. скобки были раскрыты, и теперь функция при дальнейшем использовании всегда будет иметь вид `1 + 2 x + x`^{2}. Во второй строке ввода происходит обращение к функции с аргументом `y + 2`, в результате которого в выражение для функции вместо `x` подставляется (в скобках) сумма `y + 2`.

Во втором примере зададим похожую функцию `ex`, но с отложенным присваиванием:

```
ex[x_] := Expand[(1 + x)^2]
ex[y + 2]
9 + 6y + y^2
```

После строки ввода, определяющей функцию, строка вывода теперь не следует, потому что *Mathematica* «откладывает» все манипуляции с функций до момента обращения к ней. Это обращение реализуется во второй строке ввода. В результате этого обращения в правую часть оператора присваивания вместо `x` поступает выражение `y + 2` и выполняются следующие действия: к поступившему выражению прибавляется единица, получается выражение `y + 3` и для него раскрывается квадрат суммы. Полученный результат заносится в строку вывода. Мы видим, что обращения к функциям `iex` и `ex` приводят к различным выражениям.

Немедленное и отложенное присваивание имеют и другие отличия.

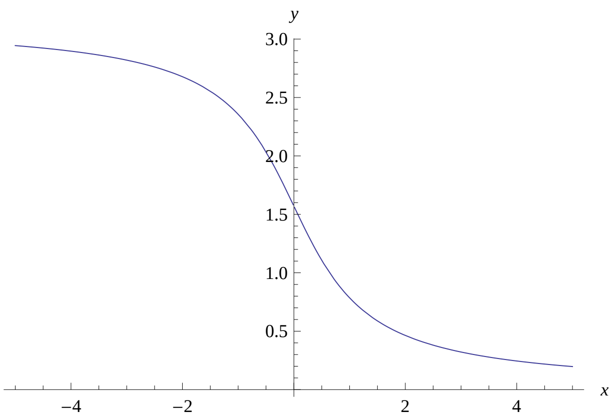
Мы в основном будем при задании функций пользоваться отложенным присваиванием.

Чтобы задать привычную для нас функцию арккотангенса, вспомним, что справедлива формула $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, которой мы и воспользуемся:

```
arcctg[x_] := π/2 - ArcTan[x]
arcctg[-1]
3π/4
```

Как видим, ответ правильный. Построим график введенной нами функции:

```
Plot[arcctg[x],{x,-5,5},AxesLabel → {x,y}]
```



При исследовании функции необходимо находить ее область определения и множество ее значений. Система *Mathematica* располагает средствами, облегчающими эту задачу. Предположим нам необходимо исследовать функцию

$$y = \frac{1}{\lg(4 - x^2)}.$$

В системе *Mathematica* она задается следующим образом:

```
f[x_] := 1/Log[10,4 - x^2]
```

Область определения данной функции состоит из тех значений аргумента, при которых знаменатель дроби не равен нулю, а выражение под знаком логарифма положительно. Т.е. функция существует, если выполняются неравенства: $\lg(4 - x^2) \neq 0$, $4 - x^2 > 0$. Для решения этой системы неравенств воспользуемся оператором `Reduce[expr,vars,dom]`, в котором `expr` — логическое выражение, представляющее собой в общем случае систему уравнений и неравенств, которую требуется решить; `vars` — переменные, относительно которых производится решение; `dom` — множество чисел, в котором решается задача: `Integers`, `Reals` или `Complexes`. С последним множеством мы познакомимся позднее.

В нашем случае получаем

```
Reduce[Log[10,4 - x²] ≠ 0,x,Reals]
-2 < x < -√3 || -√3 < x < √3 || √3 < x < 2
```

Обратите внимание, что в операторе `Reduce` было задано только найти те значения `x`, при которых знаменатель не обращается в 0; область существования логарифма *Mathematica* исследовала и включила в решение сама.

Впрочем, для вычисления области определения функции *Mathematica* 10.0 уже имеет специальный оператор `FunctionDomain[func,vars,numb]`, где `func` — функция, `vars` — список ее аргументов, `dom` — см. выше:

```
FunctionDomain[f[x],x]
-2 < x < -√3 || -√3 < x < √3 || √3 < x < 2
```

Итак, область определения функции нами получена:

$$X = \left(-2, -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, 2\right).$$

Найдем множество ее значений. В простейших случаях для этого можно использовать вид данных системы *Mathematica* под названием `Interval` (интервал), причем многие функции этой системы принимают интервалы в качестве своих аргументов. А что же будет значением функции, взятой от интервала? Оказывается, тоже интервал (или совокупность интервалов), которые будут образом интервала-аргумента. Например,

```
1/x² /. x -> Interval[{-1, 1}]
Interval[{1,∞}]
```

Здесь вычислено значение функции $1/x^2$ от интервала $(-1, 1)$, значение равно интервалу $(1, \infty)$. Использована новая для нас конструкция системы *Mathematica*, `/.`, которая означает подстановку, в данном случае вместо `x` подставляется `Interval[{-1, 1}]`.

Остается применить нашу функцию к интервалу $(-2, 2)$, на котором существует логарифм, и мы получим область ее значений:

```
1/Log[10,4 - (Interval[{-2,2}])²]
1/Log[10,4 - (Interval[{-2,2}])²]//N
Interval[{-∞,0}, {Log[10]/Log[4], ∞}]
Interval[{-∞, 2.22507×10^-308},{1.66096,∞}]
```

Ответ дан и в точной, и в приближенной формах, хотя, конечно, решением является лишь точная форма: $E = (-\infty, 0) \cup (\ln 10/\ln 4, \infty)$. Здесь $\ln x$ — так называемый натуральный логарифм числа x, который в системе *Mathematica* обозначается `Log[x]`. Натуральные логарифмы имеют основанием число $e \approx 2{,}72$, с которым мы познакомимся в дальнейшем. Приближенное решение может быть необходимо, например, для построения графика функции.

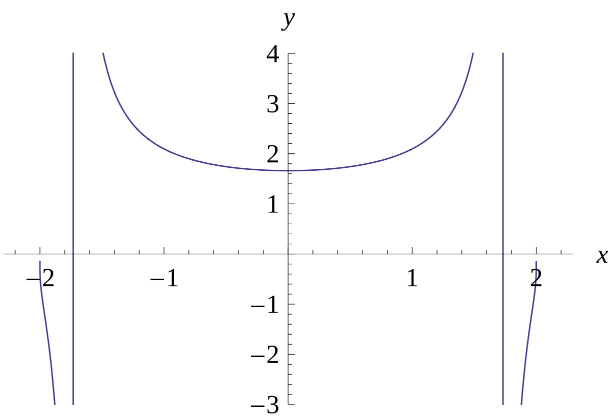
В системе *Mathematica* 10.0 то же решение получается так:

```
FunctionRange[f[x],x,y]
y < 0 || y ≥ Log[10]/(2 Log[2])
```

где `FunctionRange` — оператор, который находит множество значений функции.

Mathematica построит и график функции:

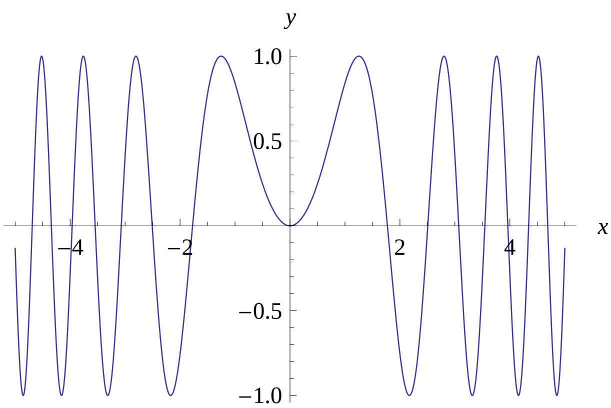
```
Plot[f[x],{x,-2.2,2.2},MaxRecursion→15,PlotRange→{-3,4},
    AxesLabel→{x,y}]
```



Опция `MaxRecursion` добавлена, чтобы точнее построить график вблизи точек $x = -2$ и $x = 2$. Эта опция позволяет улучшить качество построения за счет увеличения максимального числа разбиений интервала задания функции на дополнительные подынтервалы. Опция `PlotRange` в данном случае задает для графика диапазон изменения переменной y.

Вычислить значение сложной функция или построить ее график в системе *Mathematica* труда не составляет:

```
f[x_] := Sin[x]
g[x_] := x^2
h[x_] := f[g[x]]
h[2]
h[2]//N
Sin[4]
-0.756802
Plot[h[x],{x,-5,5},AxesLabel → {x,y}]
```



Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.* – М.: Наука, 1984, – с. 63-69.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 1. – с. 100–107.

[3] Вирченко Н.А., Ляшко И.И., Швецов К.И. *Графики функций: справочник.* – Киев: Наукова думка, 1981, – с. 5-20, 60-79.