Дифференциал

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Понятие дифференциала, его геометрический смысл. Приближенные вычисления с помощью дифференциала. Инвариантность формы дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков. Механический смысл производной второго порядка.

Анимация наглядного представления дифференциала, его геометрического смысла и механического смысла второй производной.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Вычисление производных высших порядков в системе *Mathematica*.

29 октября 2012 г.

1 Понятие дифференциала

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в окрестности точки x, а ее производная в этой точке $f'(x) \neq 0$. По определению производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ — приращение функции. По доказанной на одной из предыдущих лекций[†] теореме выражение под знаком предела можно представить как сумму $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где α — б. м. при $\Delta x \to 0$. Последнее равенство перепишем в виде

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha \Delta x. \tag{1}$$

Мы видим, что приращение функции состоит из двух слагаемых. Оценим вклад каждого из них в величину приращения функции. Для этого найдем следующие пределы:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{f'(x)\,\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\,\Delta x + \alpha \Delta x}{f'(x)\,\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\alpha}{f'(x)}\right) = 1,$$

[†]Лекция «Предел функции».

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\Delta x}{f'(x)\,\Delta x+\alpha\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{f'(x)/\alpha+1}=0.$$

Значение первого предела показывает, что первое слагаемое в формуле (1) является б. м., эквивалентной приращению функции, а значение второго предела свидетельствует о том, что второе слагаемое в формуле (1) есть б. м., более высокого порядка малости, чем приращение функции. Это говорит о том, что основной вклад в приращение функции при малых Δx вносит первое слагаемое, которое в связи с этим называют ***главной частью*** приращения функции, или ***линейной частью*** ее приращения, или ее ***дифференциалом***.

Таким образом, дифференциалом функции называется произведение ее производной на приращение аргумента:

$$\boxed{dy\overset{\triangle}{=}f'(x)\ \Delta x.}$$

Пример 1. *Найти дифференциал функции* $y=\ln\operatorname{ctg}x^2$.

Решение. Сначала найдем производную функции:

$$y'=-\frac{1}{\operatorname{ctg}x^2}\cdot\frac{1}{\sin^2x^2}\cdot 2x=-\frac{2x}{\cos x^2\sin x^2}=-\frac{4x}{\sin 2x^2}.$$

Теперь умножим найденную производную на приращение аргумента и получим дифференциал заданной функции:

$$dy=-\frac{4x}{\sin 2x^2}\,\Delta x.$$

Пример 2. *Найти дифференциал функции* $y=x$.

Решение. В данном случае $dy=x'\Delta x=1\cdot\Delta x=\Delta x$. Но, так как $y=x$, то $dy=dx$. Следовательно, $\Delta x=dx$. Таким образом, приращение аргумента и его дифференциал сопадают. Поэтому далее записи дифференциала в виде $dy=f'(x)\ \Delta x$ и $dy=f'(x)\ dx$ считаются равносильными.

Пример 3. *Найти приращение и дифференциал функции* $y=x^2$ *и сравнить их между собой.*

Решение. Найдем приращение функции:

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\,\Delta x+(\Delta x)^2\,,$$

а затем ее дифференциал:

$$dy=\left(x^2\right)'\Delta x=2x\,\Delta x.$$

Сравним эти величины геометрически. Заметим, что x^2 представляет собой площадь S квадрата со стороной, равной x. Построим такой квадрат. Увеличим сторону квадрата на величину Δx; площадь нового квадрата будет выражаться формулой $S_1=$ $=(x+\Delta x)^2$. Тогда разность площадей будет приращением рассматриваемой функции: $\Delta y=S_1-S$.

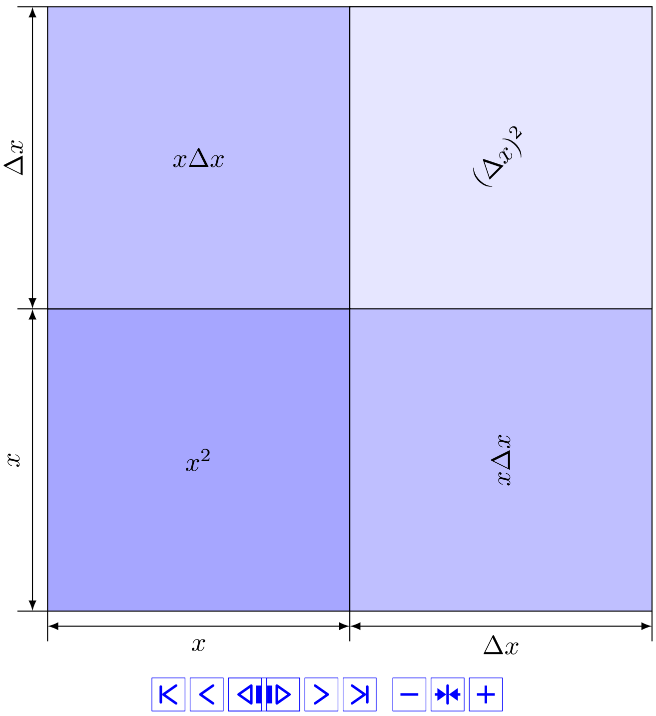

Рис. 1. К дифференциалу функции $y = x^2$.

Как видно из рис. 1, эта разность равна сумме площадей $2x\,\Delta x$ двух прямоугольников (дифференциал функции) и квадрата площадью $(\Delta x)^2$. Запустив анимацию на этом рис., можно убедиться в том, что при уменьшении Δx площадь квадрата, помеченного надписью $(\Delta x)^2$, вначале довольно большая, становится значительно меньше площади двух прямоугольников, что еще раз демонстрирует справедливость названия дифференциала – «главная часть приращения функции».

2 Приближенные вычисления

Тот факт, что дифференциал функции содержит основную часть ее приращения, позволяет использовать его в приближенных вычислениях, заменяя приращение функции ее дифференциалом. Считая, что $\Delta y \approx dy$, получаем

$$\boxed{f\left(x+\Delta x\right) \approx f\left(x\right) + f'\left(x\right)\,\Delta x.} \tag{2}$$

Эта формула является основой для расчетов, причем, точность расчетов тем выше, чем меньше Δx.

Пример 4. *Найти приближенное значение* $\sqrt{10}$.

Решение. Представим заданное число в виде $\sqrt{10} = \sqrt{9+1}$. Если ввести обозначения $f\left(x\right) = \sqrt{x}$, $x = 9$, $\Delta x = 1$, то, используя формулу (2), в которой $f'\left(x\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, получим

$$\sqrt{10} = \sqrt{9+1} \approx \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 1 = 3 + \frac{1}{6} \approx 3,16667.$$

Значение $\sqrt{10}$ с пятью верными цифрами после запятой: $\sqrt{10} \approx 3,16228$. Видим, что в приближении, полученном с помощью дифференциала, точность составляет $0,01$. Это неплохой результат, учитывая, что Δx не очень мало! □

Рассматриваемые ниже свойства дифференциала прямо следуют из аналогичных свойств для производной.

1° *Дифференциал суммы или разности двух функций равен, соответственно, сумме или разности дифференциалов этих функций:*

$$d\,(u \pm v) = du \pm dv.$$

2° *Дифференциал произведения:*

$$d\,(uv) = v\,du + u\,dv.$$

Обратимся к формуле производной произведения и определению дифференциала: $(uv)' = u'v + uv'$. Тогда

$$d(uv) = (u'v + uv')\,dx = v(u'dx) + u(v'dx) = v\,du + u\,dv.$$

3° *Дифференциал частного:*

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Мы доказали только второе свойство. Остальные свойства доказываются аналогично.

3 Инвариантность формы дифференциала

Для функции $y = f(x)$ дифференциал был определен как

$$dy = f'\,(x)\;dx. \tag{3}$$

Предположим теперь, что функция является сложной, $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, и найдем дифференциал такой функции:

$$dy = f'_{\varphi}\,(\varphi\,(x))\,\varphi'\,(x)\;dx = f'_u(u)(\varphi'\,(x)\;dx) = f'_u(u)\,d\varphi\,(x) = f'(u)\,du.$$

Таким образом,

$$dy = f'(u)\,du. \tag{4}$$

Мы видим, что равенства (3) и (4) выглядят одинаково. В этом заключается свойство ***инвариантности формы дифференциала***: *дифференциалы «простой» и сложной функции имеют один и тот же вид.*

4 Геометрический смысл дифференциала

Возьмем точки $M(x, f(x))$ и $M_1\,(x + \Delta x, f\,(x + \Delta x))$ на графике функции, см. рис. 2, и проведем в точке M касательную к графику. Пусть угол наклона касательной к оси Ox равен α. Отрезок M_1N — это приращение функции, а отрезок TN — приращение ординаты касательной, соответствующие приращению аргумента Δx. Из прямоугольного треугольника MTN получаем, что

$$TN = MN \cdot \operatorname{tg}\alpha = f'(x)\,\Delta x = dy.$$

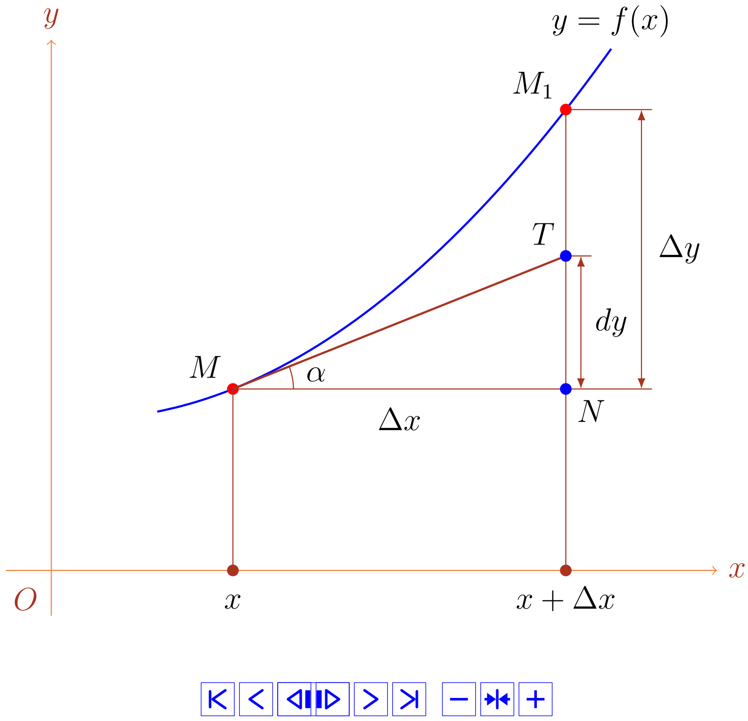

Рис. 2. Геометрический смысл дифференциала.

Полученная формула выражает собой геометрический смысл дифференциала: *дифференциал функции численно равен приращению ординаты касательной к графику функции при заданном приращении аргумента*.

Щелкая на анимационном рис. 2 мышкой или запуская плеер, можно наблюдать, как при уменьшении Δx дифференциал вбирает в себя все бóльшую часть приращения функции. Точка M_1 движется по кривой и поэтому длина отрезка M_1N (приращение функции) изменяется нелинейно, а точка T движется по прямой и поэтому длина отрезка TN (дифференциал функции) изменяется линейно. И действительно $dy = f'(x)\,\Delta x$ линейно зависит от Δx. Поэтому дифференциал можно назвать линейным прогнозом изменения функции.

В простейших случаях для предвидения результатов своей деятельности человек строит именно линейный прогноз. Например, инженеру становится известно, что за год производство контрольно-измерительных систем на заводе выросло на 48 единиц. Значит, прикидывает он, через три года оно вырастет на 144 единицы. Что за вычисления он проделал? Он взял скорость роста производства, 48 приборов в год (производная) и умножил ее на приращение аргумента-времени — т. е. вычислил дифференциал!

А как насчет точности прогноза? Точность вызывает серьезные сомнения — за три года многое может измениться! Возьмем меньший временной интервал, например, 1 месяц $= 1/12$ года. Тогда прогноз станет таким: в следующем месяце завод произведет на $48 \cdot \frac{1}{12} = 4$ прибора больше, чем в предыдущем. Такой прогноз, на ближайшее время, вполне правдоподобен — чем меньше приращение аргумента — тем точнее прогноз!

5 Производные высших порядков

5.1 Определения

Поскольку производная функции $y = f(x)$ сама является функцией, можно говорить о дифференцировании производной. Получающаяся при этом производная называется производной второго порядка функции $y = f(x)$ или просто второй производной этой функции. Таким образом, вторая производная — это производная от производной функции. Такая производная обозначается $f''(x)$ или y'' и по определению выражается формулой

$$f''(x) \triangleq (f'(x))'.$$

Продолжая в этом же духе, определим ***производную n-го порядка***, или n-ю производную как производную от производной $(n-1)$-го порядка:

$$\boxed{f^{(n)}(x) \triangleq \left(f^{(n-1)}(x)\right)'}$$

Отметим, что производные с 1-го порядка по 6-й обычно нумеруются римскими цифрами, с 7-го и далее — арабскими цифрами в круглых скобках. Кроме того, существуют и другие обозначения производных, например,

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

В дальнейшем для удобства будем считать, что сама функция является производной нулевого порядка:

$$f^{(0)}(x) \triangleq f(x),$$

а производную $f'(x)$ будем также называть ***производной первого порядка***, или первой производной.

Если производная n-го порядка функции в некоторой точке (на некотором множестве) существует и конечна, то говорят, что функция ***n раз дифференцируема*** в этой точке (на этом множестве).

Функция называется n раз ***непрерывно дифференцируемой*** в некоторой точке, если ее n-я производная в этой точке непрерывна (следовательно, в этой точке непрерывны все производные функции до порядка n включительно). Функция ***непрерывно дифференцируема*** на множестве, если она непрерывно дифференцируема в каждой точке этого множества. При $n = 1$ говорят просто о ***непрерывной дифференцируемости*** функции.

Пример 5. *Найти третью производную функции*

$$y = x \sin x.$$

Решение. Просто поочередно вычисляем производные:

$$\begin{aligned} y' &= \sin x + x \cos x, \\ y'' &= (\sin x + x \cos x)' = 2 \cos x - x \sin x, \\ y''' &= (2 \cos x - x \sin x)' = -3 \sin x - x \cos x. \end{aligned}$$

5.2 Механический смысл второй производной

Вернемся к примеру прямолинейного движения материальной точки. Для такого движения средним ускорением называется отношение приращения скорости $v(t)$ движения к приращению времени:

$$w_{\text{ср}}(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v\,(t + \Delta t) - v\,(t)}{\Delta t}.$$

Чем меньше Δt, тем точнее эта формула отражает ускорение материальной точки в момент времени t. Поэтому ускорением $w(t)$ материальной точки называется предел среднего ускорения, когда $\Delta t \to 0$:

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} w_{\text{ср}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v\,(t + \Delta t) - v\,(t)}{\Delta t}.$$

Последний предел является производной скорости, и мы получаем, что:

$$w(t) = v'(t).$$

Но скорость сама есть производной пути $s(t)$ по времени. Значит, ускорение является второй производной пути по времени:

$$w = (s'(t))' = s''(t).$$

На основании этой формулы делаем вывод, что ***механический смысл второй производной*** заключается в том, что *ускорение прямолинейного движения материальной точки есть вторая производная пути по времени.*

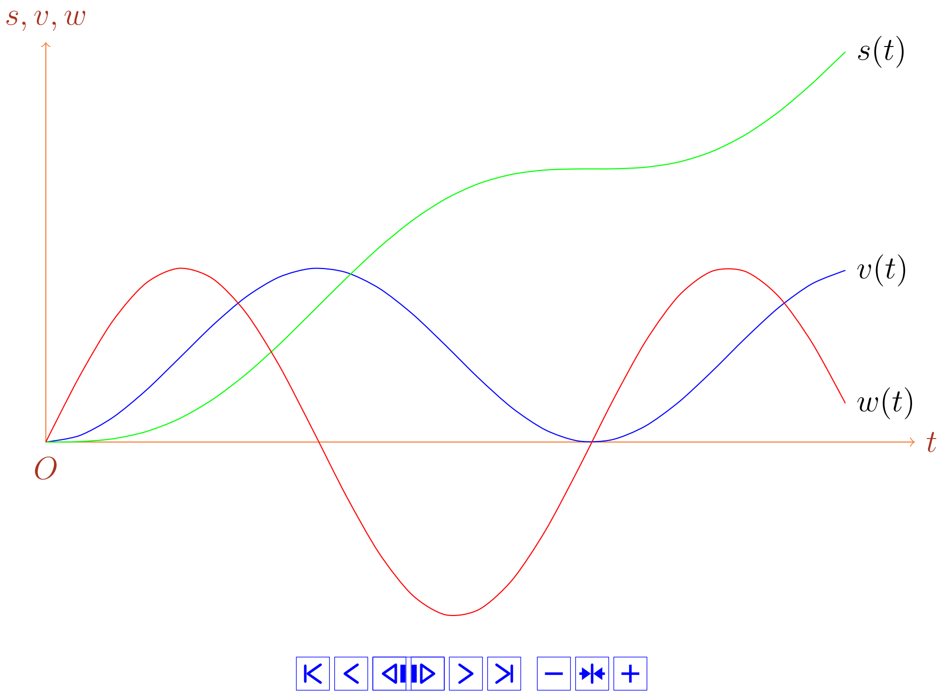

Рис. 3. Механический смысл второй производной.

Анимационный рис. 3 демонстрирует, как изменяется скорость $v(t)$ и ускорение $w(t)$ точки M, движущейся по вертикальной координатной оси, в зависимости от времени, изменение которого показано на оси Ot. Закон изменения пути $s(t)$ от времени t был взят в виде $s(t) = 50(t - 0{,}5 \sin 2t)$, из чего следует, что $v(t) = s'(t) = 100 \sin^2 t$, $w(t) = v'(t) = 100 \sin 2t$.

5.3 Формула Лейбница

Эта формула помогает вычислить производную n-го порядка от произведения двух функций, которые мы обозначим $u(x)$ и $v(x)$. Формула для производной первого порядка вам уже известна:

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{5}$$

Найдем вторую производную:

$$(uv)'' = (u'v + uv')' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv''. \tag{6}$$

Не правда ли, это что-то напоминает? Напоминает квадрат суммы двух слагаемых:

$$(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2,$$

если в соответствие показателям степеней поставить порядки производных. Но обобщением квадрата суммы является бином Ньютона†:

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^k v^{n-k}.$$

Так не будет ли верна для производной n-го порядка формула

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}, \tag{7}$$

похожая на бином Ньютона? Оказывается, будет, и даже имеет название формулы Лейбница. Доказательство приведено в Приложении[1)].

Пример 6. *Пользуясь формулой Лейбница, найти производную седьмого порядка функции*

$$y = e^{-x} \operatorname{sh} x.$$

Решение. По формуле Лейбница

$$y^{(7)} = \sum_{k=0}^{7} C_7^k (e^{-x})^{(k)} (\operatorname{sh} x)^{(7-k)}.$$

Очевидно, что

$$(e^{-x})^{(k)} (\operatorname{sh} x)^{(7-k)} = \begin{cases} e^{-x} \operatorname{ch} x \text{ при четном k}, \\ -e^{-x} \operatorname{sh} x \text{ при нечетном k}. \end{cases}$$

Биномиальные коэффициенты для этих выражений берутся из треугольника Паскаля: 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1. Четным k соответствуют черные коэффициенты, нечетным — красные. Суммы черных и красных чисел одинаковы и равны 64. Поэтому искомая производная будет такой:

$$y^{(7)} = 64e^{-x}(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x).$$

□

В Приложении[2)]показано, как вычислять производные n-го порядка с помощью системы *Mathematica*.

5.4 Вторая производная параметрически заданной функции

Пусть имеется параметрически заданная функция: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Ранее было найдено выражение для первой производной такой функции:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

†Лекция «Числа». Там же см. треугольник Паскаля и используемое при доказательстве формулы Лейбница равенство для биномиальных коэффициентов.

Производную y'_x тоже можно считать заданной параметрически: $y'_x = y'_t/x'_t$, $x = x(t)$. Поэтому, вычисляя первую производную от такой функции, получаем вторую производную параметрически заданной функции:

$$\boxed{y''_x = (y'_x)'_x = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^3} = \frac{\begin{vmatrix} x'_t & y'_t \\ x''_t & y''_t \end{vmatrix}}{(x'_t)^3}.}$$

Пример 7. *Найти производную y'' для эллипса*

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos t, \\ y = y_0 + b\sin t. \end{cases}$$

Решение. Первая производная была найдена ранее[†] и оказалась равной

$$y'_x = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t.$$

Вычислим вторую производную:

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{b/(a\sin^2 t)}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$

6 Дифференциалы высших порядков

Как от производной можно взять производную и получить вторую производную функции, так и от дифференциала можно взять дифференциал, получив в результате дифференциал второго порядка, или просто второй дифференциал:

$$d^2y \stackrel{\triangle}{=} d\,(dy) = d\,(f'\,(x)\;dx) = f''\,(x)\,(dx)^2 = f''\,(x)\;dx^2.$$

Принято обозначать $(dx)^2 = dx^2$ и вообще $(dx)^n = dx^n$. Из этого равенства можно получить, что

$$f''\,(x) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Аналогично, ***дифференциалом n-го порядка***, или просто n-м дифференциалом называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка:

$$d^ny \stackrel{\triangle}{=} d\left(d^{n-1}y\right) = d\left(f^{(n-1)}\,(x)\;dx^{n-1}\right) = f^{(n)}\,(x)\;dx^n.$$

Следовательно,

$$f^{(n)}\,(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

[†]Лекция «Производная»

Так что в правой части стоит не просто обозначение n-й производной, а настоящее отношение двух величин.

Для дифференциалов порядка выше первого свойство инвариантности не выполняется.

Приложение

[1)] Докажем формулу Лейбница методом математической индукции. Для производных 1-го и 2-го порядков эта формула верна, как это следует из равенств (5) и (6). Предположим, что она верна для некоторого $n \geq 2$ и докажем ее справедливость для $n+1$. Исходя из этого, найдем производную $(n+1)$-го порядка от произведения двух функций:

$$(uv)^{(n+1)} = \left((uv)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(u^{(k)} v^{(n-k)}\right)' =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(u^{(k+1)} v^{(n-k)} + u^{(k)} v^{(n-k+1)}\right) =$$
$$= C_n^0 u^{(0)} v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) u^{(k)} v^{(n-k+1)} + C_n^n u^{(n+1)} v^{(0)}.$$

В начале курса лекций было показано, что $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$. Учитывая это и то, что $C_n^0 = = C_{n+1}^0 = C_n^n = C_{n+1}^{n+1} = 1$, закончим вычисление производной:

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(k)} v^{(n-k+1)}.$$

Полученная формула полностью отвечает формуле Лейбница (7) при n, увеличенном на единицу.

[2)] Вы уже знаете, как находить производные первого порядка, используя различные операторы системы *Mathematica*[†]. Так как дифференциал функции отличается от ее производной лишь тем, что добавляется множитель приращения аргумента, то, следовательно, вы умеете вычислять и дифференциал в системе *Mathematica*. Перейдем к вычислению производных высших порядков.

Уже известный вам оператор `D` для вычисления производной n-го порядка принимает такой вид: `D[f,{x,n}]`, где `f` — функция, которую требуется продифференцировать, `x` — ее аргумент, `n` — порядок вычисляемой производной. Так как этот оператор можно выщелкнуть из палитры, то он имеет еще одну форму: $\partial_{\{x,n\}} f$.

Решим пару примеров, рассмотренных на лекции:

```
D[x Sin[x],{x,3}]
-x Cos[x] - 3 Sin[x]
```

$\partial_{\{x,7\}}(e^{-x}\,\mathrm{Sinh}[x])$

$64\,e^{-x}\,\mathrm{Cosh}[x] - 64\,e^{-x}\,\mathrm{Sinh}[x]$

Этот оператор способен находить производные для выражений общего вида:

$\partial_x(x\,f[x]\,f'[x])$

$f[x]\,f'[x] + x\,f'[x]^2 + x\,f[x]\,f''[x]$

Оператор `D` легко приспособить для вычисления второй производной параметрически заданной функции. Для примера из текста лекции получаем

```
x[t_]:=x0 + a Cos[t]
y[t_]:=y0 + b Sin[t]
```

[†]Лекция «Производная».

$$\frac{\partial_t(\partial_t y[t] / \partial_t x[t])}{\partial_t x[t]}$$

$$-\frac{b\,Csc[t]^3}{a^2}$$

Функция Csc — это косеканс: $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$.

Следующий уже известный вам оператор — это оператор Derivative. Для вычисления производной n-го порядка он должен быть записан так: Derivative[n][f], где f — функция, от которой берется производная. Однако, если вы именно в таком виде выполните дифференцирование, то получите странный ответ:

```
f[x_] := x Sin[x]
Derivative[2][f]
2 Cos[#1] - Sin[#1]#1&
```

Дело в том, что Derivative является функциональным оператором, который выполняет действия над функциями, чтобы в результате снова получить функцию. Аргумент функции ему безразличен, он просто заменяет его выражением #1. Значок & в конце ответа означает, что имеет место так называемая чистая функция. Но с этим понятием мы знакомиться не будем.

Чтобы получить ответ в привычной для нас форме, надо в конце оператора Derivative приписать аргумент функции, взятый в квадратные скобки:

```
f[x_] := x Sin[x]
Derivative[2][f][x]
2 Cos[x] - x Sin[x]
```

При вычислении первой производной мы видели, что оператор Derivative может принимать форму штриха, обозначающего производную. Оказывается, если надо взять производную n-го порядка, достаточно «проштриховать» функцию n раз. Возьмем таким образом, например, производные первого, второго, третьего и десятого порядков функции:

$f[x\_] := x^2\,Sin[2x]$

$f'[x]$

$f''[x]$

$f'''[x]$

$f''''''''''[x]$

$2\,x^2\,Cos[2x] + 2x\,Sin[2x]$

$8\,x\,Cos[2x] + 2\,Sin[2x] - 4\,x^2\,Sin[2x]$

$12\,Cos[2x] - 8\,x^2\,Cos[2x] - 24\,x\,Sin[2x]$

$10240\,x\,Cos[2x] + 23040\,Sin[2x] - 1024\,x^2\,Sin[2x]$

Но если вы хотите не только найти выражение для производной, но и одновременно найти ее значение в заданной точке, то придется все же использовать несокращенную форму оператора. Найдем, например, значение производной предыдущей функции в точке $x = \pi/4$:

$Derivative[2][f][\pi/4]$

$$2 - \frac{\pi^2}{4}$$

Оператор Dt тоже умеет вычислять производные высших порядков. Для этого его надо записать в виде Dt[f,{x,n}], где f — функция, которую требуется продифференцировать, x — ее аргумент, n — порядок искомой производной. Рассмотрим пример:

```
Dt[Sinh[x] - √x,{x,5}]
```
$$-\frac{105}{32\,x^{9/2}} + \mathrm{Cosh}[x]$$

Кроме того, оператор `Dt` применяют для отыскания дифференциалов функции:

```
Dt[Log[Cot[x^2]]] // Simplify
-4x Csc[2x^2] Dt[x]
```

`Dt[x]` следует читать как dx.

Этот оператор позволяет находить дифференциалы в общем случае произвольных функций, так что можно, например, с его помощью получить свойства дифференциала (оператор `Together` выполняет приведение к общему знаменателю):

```
Dt[f + g]
Dt[f] + Dt[g]
Dt[f g]
g Dt[f] + f Dt[g]
Together[Dt[f/g]]
```
$$\frac{\mathrm{g\,Dt[f] - f\,Dt[g]}}{\mathrm{g}^2}$$

```
Dt[f[φ]]
Dt[φ] f'[φ]
```

Найдем дифференциал второго порядка:

```
Dt[Dt[x^2]]
2 Dt[x]^2 + 2x Dt[Dt[x]]
```

Это следует понимать как $2dx^2 + 2x\,d^2x$. В случае независимой переменной x величина d^2x равна нулю и $d^2(x^2) = 2dx^2$, а, если x сам является функцией некоторого аргумента, то ответ будет таким, каким его представила *Mathematica*. Значит, эта система ориентирована на вычисление дифференциалов от функций, аргументы которых не обязательно независимы.

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.* — М.: Наука, 1984, — с. 140-149.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* — М.: Рольф, 2000. Ч. 1. — с. 155–185.