Непрерывность функции

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Функция, непрерывная в точке. Непрерывность слева и справа. Теоремы о функциях, непрерывных в точке. Непрерывность элементарных функций. Классификация точек разрыва. Функция, непрерывная на отрезке. Теоремы о функциях, непрерывных на отрезке.

Анимация понятий непрерывности и разрывности функции. Анимация галереи разрывных функций.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Применение системы *Mathematica* для задания и исследования разрывных функций.

7 апреля 2012 г.

К понятию непрерывности люди пришли, наблюдая процессы, происходящие в окружающей среде. Например, если у вас в комнате выключатель света снабжен диммером (светорегулятором), то плавно вращая ручку регулятора, вы видите как плавно, без скачков изменяется интенсивность освещения комнаты. Если вы плавно нажимаете на педаль тормоза, автомобиль плавно, без рывков замедляет движение. Вообще непрерывная связь между явлениями заключается в том, что малым изменениям явления-причины отвечают малые же изменения явления-следствия. Такая плавность взаимосвязанных процессов в физическом мире породила в математике понятие непрерывности.

1 Функция, непрерывная в точке

Мы будем знакомиться с непрерывностью на примере непрерывных функций. Строгое определение таково. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** $x_0 \in \mathbb{R}$, если она определена в некоторой окрестности этой точки, в том числе и в самой точке x_0, и выполнено условие:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,.} \tag{1}$$

Вспоминая определение предела, это условие можно записать в виде

$$\forall(\varepsilon>0)\,\exists(\delta>0)\,\forall(x\in\mathbb{R})\ |x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon. \tag{2}$$

Это утверждение показывает, что для непрерывной функции мы можем получить сколь угодно малое приближение $f(x)$ к $f(x_0)$, задав достаточно малое ε, потому что всегда найдется δ, которое сможет такое приближение обеспечить. Точка x_0 называется ***точкой непрерывности*** функции.

Примерами функций, непрерывных в любой точке числовой оси, могут служить постоянная $y=C=\mathrm{const}$ и линейная $y=x$ функции. Для первой, как мы видели на лекции «Предел функции», $\lim_{x\to x_0} C = C$, а для второй, чтобы утверждение (2) выполнилось, достаточно взять $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$ и заметить, что $|x-x_0|<\delta(\varepsilon)=\varepsilon \Longrightarrow |x-x_0|<\varepsilon$.

Если функция не является непрерывной в точке $x_0\in\mathbb{R}$, то говорят, что она имеет ***разрыв в этой точке***, или ***разрывна*** в ней. Точка $x_0\in\mathbb{R}$ при этом называется ***точкой разрыва***. Из определения непрерывности (1) следует, что функция $f(x)$ разрывна в точке x_0, если выполнено хотя бы одно условие:

1) функция $f(x)$ не определена в точке x_0 или в некоторой ее окрестности;

2) предел $\lim_{x\to x_0} f(x)$ не существует или равен $\pm\infty$;

3) функция определена, и предел конечен, но $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Рис. 1, а) с помощью анимации демонстрирует поведение функции $f(x)$, непрерывной в точке x_0. В соответствии с терминологией утверждения (2) на рис. показан горизонтальный ε-коридор, которому отвечает вертикальный δ-коридор (то $\delta>0$, которое может быть найдено по $\varepsilon>0$). В пересечении коридоров получается прямоугольник (зеленого цвета), содержащий *весь* фрагмент графика функции, построенный над интервалом $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. В прямоугольнике для всех точек графика выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Анимация показывает, что уменьшение ε вызывает соответствующее уменьшение δ, прямоугольник сжимается, но неравенство продолжает выполняться и в новом прямоугольнике. В конце концов прямоугольник сжимается в точку $(x_0, f(x_0))$, а это означает, что график функции с обеих сторон устремляется к этой точке и в конце концов сливается с ней.

На рис. 1, б) показано, почему утверждение (2) не выполняется в точке x_0 разрыва функции. Здесь сразу можно указать ε-коридор, для которого нельзя подобрать δ такое, чтобы фрагмент графика функции, построенный над интервалом $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, весь оставался в зеленом прямоугольнике. Часть графи-

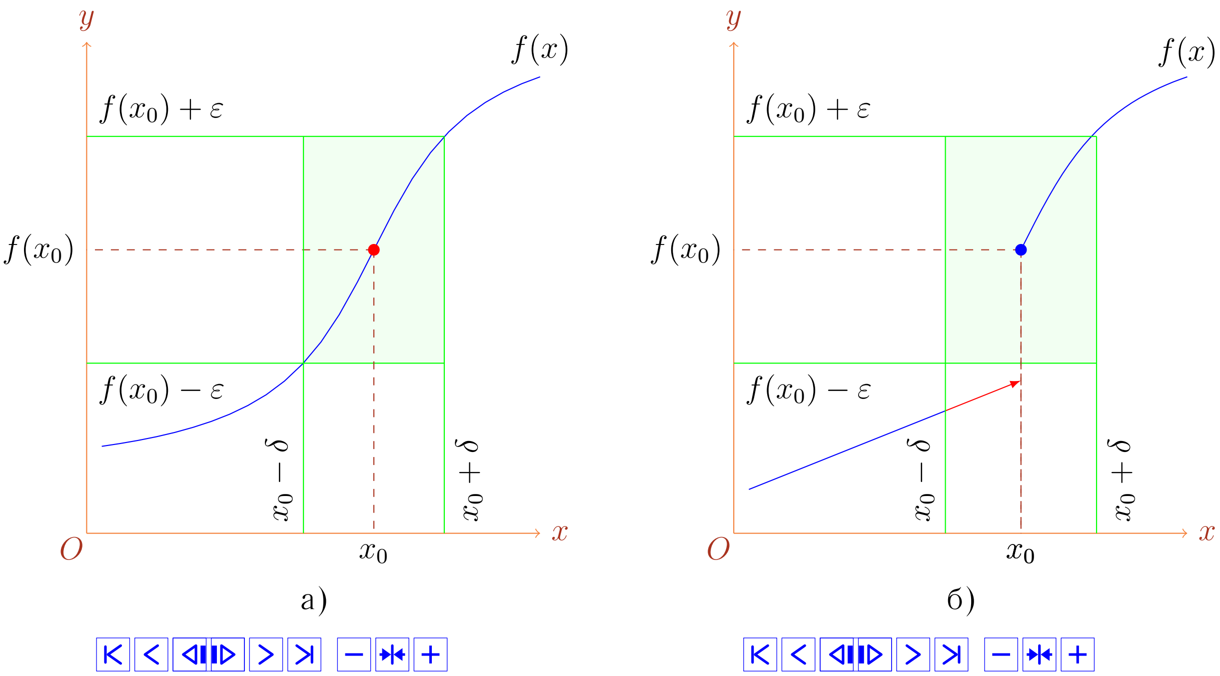


Рис. 1. К непрерывности в точке.

ка функции, показанная красным цветом, не попадает в прямоугольник и, как показывает анимация, никакое уменьшение δ этот красный цвет не устраняет.

Теорема 1. *Если функции $f\left(x\right)$ и $g\left(x\right)$ непрерывны в некоторой точке x_0, то непрерывны их сумма, разность, произведение и частное $f(x)/g(x)$, если $g\left(x_0\right) \neq 0$.*

Доказательство. Простое следствие теорем о пределе суммы, произведения и частного.

Теорема 2 (о непрерывности сложной функции). *Пусть функция $\varphi\left(x\right)$ непрерывна в точке x_0 и $\varphi\left(x_0\right) = u_0$, а функция $f\left(u\right)$ непрерывна в точке u_0. Тогда сложная функция $f\left(\varphi\left(x\right)\right)$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Получается из теоремы о пределе сложной функции.

Следствие 1 (замена переменной под знаком предела). *Для непрерывных функций f и φ справедливо равенство:*

$$\lim_{x \to x_0} f\left(\varphi\left(x\right)\right) = \lim_{u \to u_0} f\left(u\right), \; u_0 = \varphi\left(x_0\right).$$

Следствие 2 (переход к пределу под знаком непрерывной функции). *Для непрерывных функций f и φ справедливо равенство:*

$$\lim_{x \to x_0} f\left(\varphi\left(x\right)\right) = f\left(\lim_{x \to x_0} \varphi\left(x\right)\right).$$

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной слева в точке*** $x_0 \in \mathbb{R}$, если $f(x_0 - 0) = f(x_0)$. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной справа в точке*** $x_0 \in \mathbb{R}$, если $f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Теорема 3. *Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, тогда и только тогда, когда*

$$\boxed{f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)\,.}$$

Доказательство. Равенство односторонних пределов равносильно существованию предела. Если эти пределы равны значению функции в точке, то это эквивалентно ее непрерывности. □

Если односторонние пределы функции конечны в некоторой точке x_0, но не равны друг другу или хотя бы один из них не равен значению функции в этой точке, то говорят, что функция имеет в этой точке ***разрыв I рода*** или ***скачок***. Сама точка x_0 называется ***точкой разрыва I рода***. Величина скачка определяется выражением $|f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|$.

Теорема 4. *Монотонная на промежутке*[†] *функция может иметь в нем точки разрыва только первого рода.*

Доказательство приведено в Приложении[1)].

Теорема 5. *Если функция $f(x)$ монотонна в промежутке S и $f(S)$ — промежуток , то функция $f(x)$ непрерывна в S.*

Доказательство приведено в Приложении[2)].

Рассмотренные теоремы позволяют убедиться в том, что основные элементарные функции непрерывны всюду, где они определены.

Пример 1. *Доказать непрерывность показательной функции $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.*

Решение. Показательная функция $y = a^x$ монотонна на всей числовой оси, так что S из теоремы 5 есть $(-\infty, \infty)$. Но $f(S) = (0; \infty)$ (любой $y \in (0; \infty)$ имеет прообразом $x = \log_a y$). Следовательно, показательная функция непрерывна на всей числовой оси.

Пример 2. *Доказать непрерывность логарифмической функции $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.*

Решение. Логарифмическая функция монотонна и определена в интервале $S = (0, \infty)$, причем, $f(S) = (-\infty; \infty)$ (любой y имеет прообраз $x = a^y$). Следовательно, логарифмическая функция непрерывна.

[†]Промежуток может быть отрезком, интервалом или полуинтервалом, в том числе с бесконечными концами.

Пример 3. *Исследовать на непрерывность степенную функцию $y = x^\alpha$, $\alpha \neq 0$.*

Решение. Степенную функцию можно представить в виде $y = e^{\alpha \ln x}$. Тогда она непрерывна на $(0; \infty)$ в силу непрерывности логарифма и экспоненты и теоремы о непрерывности сложной функции. Если $\alpha > 0$, то $0^\alpha = 0$ и, как было показано на лекции «Предел функции» $\lim_{x \to 0+0} x^\alpha = 0$. Поэтому при $\alpha > 0$ степенная функция непрерывна и в нуле (справа).

Пример 4. *Показать что функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ непрерывны.*

Решение. При выводе формулы первого замечательного предела для $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ оказалось справедливым неравенство $\sin^2 x \leq x^2$, которое равносильно неравенству $|\sin x| \leq |x|$. Следовательно, выполняется

$$\forall\,(\varepsilon > 0)\,\exists\,(\delta = \varepsilon > 0)\,\forall\,(x : x \neq x_0)\ \ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon,$$

потому что

$$|x - x_0| < \varepsilon \Longrightarrow |\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq$$
$$\leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq |x - x_0| < \varepsilon.$$

Это и доказывает непрерывность синуса в любой точке x_0. Непрерывность косинуса следует из его представления $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Константа $\pi/2$ и функция x непрерывны, их разность непрерывна по доказанной теореме, синус — функция непрерывная, поэтому по теореме о непрерывности сложной функции непрерывна и функция $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, т. е. $\cos x$.

Пример 5. *Исследовать на непрерывность функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.*

Решение. Функция $y = \operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ непрерывна во всех точках числовой оси, в которых $\cos x \neq 0$, как отношение двух непрерывных функций, синуса и косинуса. В окрестностях нулей косинуса $x_k = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, представим тангенс в виде $1/(\cos x \cdot \frac{1}{\sin x})$. Выражение в скобках есть произведение б. м. $(\cos x)$ при $x \to x_k$ на ограниченную функцию $(1/\sin x)$, поэтому является б. м. Следовательно, тангенс при $x \to x_k$ — б. б. Но слева от x_k тангенс положителен, а справа — отрицателен, поэтому $\operatorname{tg}(\pi/2 + \pi k - 0) = \infty$, $\operatorname{tg}(\pi/2 + \pi k + 0) = -\infty$. Точно так же доказывается непрерывность котангенса на всей числовой оси, кроме точек πk, $k \in \mathbb{Z}$, в которых $\operatorname{ctg}(\pi k - 0) = -\infty$, $\operatorname{ctg}(\pi k + 0) = \infty$.

Пример 6. *Доказать непрерывность обратных тригонометрических функций.*

Решение. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастает и определена на всей числовой оси, а образом этой оси при таком отображении является интервал $(-\pi/2, \pi/2)$ (так как любой y из этого интервала имеет прообраз $x = \operatorname{tg} y$). Аналогично доказывается непрерывность других обратных тригонометрических функций. □

Кроме того,

$$\lim_{x \to -1+0} \arcsin x = \langle x = \sin y \rangle = \lim_{y \to -\pi/2} \arcsin(\sin y) = \lim_{y \to -\pi/2} y = -\frac{\pi}{2}.$$

Аналогично,

$$\lim_{x\to 1-0} \arcsin x = \frac{\pi}{2}, \ \lim_{x\to 1-0} \arccos x = 0, \ \lim_{x\to -1+0} \arccos x = \pi.$$

Мы доказали, что все основные элементарные функции непрерывны всюду, где они определены. Поэтому справедлива следующая

Теорема 6. *Элементарная функция непрерывна всюду, где она определена.*

Доказательство. Элементарная функция сконструирована из основных элементарных функций и констант с помощью арифметических операций и операции суперпозиции. Но все эти операции сохраняют непрерывность, а основные элементарные функции непрерывны всюду, где они определены. Значит, и составленная с их помощью элементарная функция тоже непрерывна там, где она определена. □

Из этой теоремы следует, например, что все многочлены непрерывны.

Рассмотрим две элементарные функции:

$$y = \frac{\operatorname{arctg} e^x}{1+x^2}, \quad y = \frac{x^2 \sin x^3}{x^2-1}.$$

Первая из них всюду определена и потому непрерывна, а вторая не определена в точках $x = \pm 1$ и поэтому непрерывна только в интервалах $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; \infty)$.

Формулу (1) можно считать правилом для вычисления предела непрерывной функции $f(x)$ в точке ее непрерывности $x_0 \in \mathbb{R}$. Например,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} e^x}{1+x^2} = \frac{\operatorname{arctg} e^0}{1+0^2} = \frac{\pi}{4}.$$

2 Классификация точек разрыва

Мы уже ввели понятие точки разрыва первого рода. Продолжим классификацию точек разрыва функции.

Если хотя бы один односторонний предел функции в точке x_0 не существует или равен $\pm\infty$, то говорят, что функция имеет в этой точке ***разрыв II рода***. Соответственно, точку x_0 называют ***точкой разрыва II рода***.

Если односторонние пределы функции в точке x_0 конечны и равны друг другу: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, а значение функции в этой точке им не равно или функция в этой точке не существует, то говорят, что функция имеет в этой точке ***устранимый разрыв***. Точку x_0 называют ***точкой устранимого разрыва*** функции. Название связано с тем, что, если функцию $f(x)$, имеющую в точке x_0 устранимый разрыв, переопределить, введя вместо нее функцию

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x - \text{точка непрерывности функции } f(x); \\ f(x-0), & x - \text{точка устранимого разрыва,} \end{cases}$$

то функция $g(x)$ уже будет непрерывна.

На рис. 2 с помощью анимации показаны некоторые варианты разрывов функции, соответствующие введенной классификации. Щелкая мышкой на каждом из рис., можно наблюдать различные разрывы I и II рода, а также устранимые разрывы.

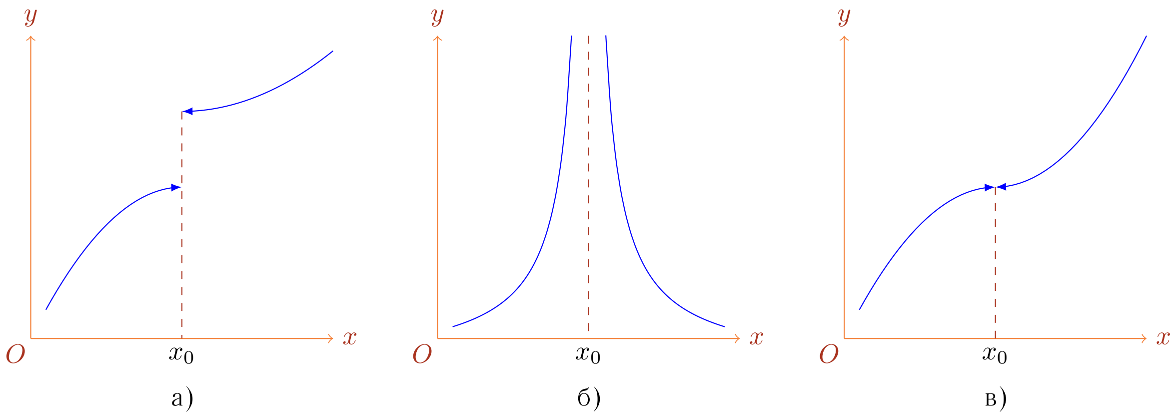


Рис. 2. Разрывы функции: а) I рода, б) II рода, в) устранимые.

На этом рис. значение функции в точке разрыва изображено точкой, а односторонние пределы, не совпадающие со значением функции, — стрелкой. Этих обозначений будем придерживаться и в дальнейшем.

3 Функция, непрерывная на множестве

Функция называется ***непрерывной*** на множестве A, если она непрерывна в каждой его точке. В необходимых случаях непрерывность понимается как непрерывность слева или справа. Например, функция считается непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в интервале (a,b), непрерывна справа при $x = a$ и непрерывна слева при $x = b$.

Теорема 7. *Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на нем.*

Доказательство приведено в Приложении[3)].

Теорема 8 (о существовании корня). *Если функция непрерывна на отрезке и принимает на его концах значения разных знаков, то на отрезке есть точка, в которой функция обращается в нуль:*

$$f - \textit{непрерывна} \ \wedge f(a)\, f(b) < 0 \Longrightarrow \exists\, (c \in [a, b])\ f(c) = 0.$$

Доказательство приведено в Приложении[4)].

Теорема 9. *Непрерывная на отрезке функция принимает на нем наименьшее и наибольшее значения.*

Доказательство приведено в Приложении[5)].

Теорема 10 (о промежуточном значении). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором промежутке и в двух точках этого промежутка a и b $(a < b)$ принимает разные значения $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тогда для любого числа C, лежащего между A и B, найдется такая точка c между a и b, что $f(c) = C$.*

Доказательство. Пусть для определенности $A < B$, так что $A < C < B$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - C$. Она непрерывна на $[a, b]$ и на его концах имеет разные знаки: $\varphi(a) = A - C < 0$, $\varphi(b) = B - C > 0$. По теореме о существовании корня на отрезке $[a, b]$ найдется точка c такая, что $\varphi(c) = 0$. Но тогда $f(c) = C$, что и требовалось доказать.

Следствие 3. *Непрерывная на отрезке функция принимает на нем все значения, промежуточные между ее наименьшим и наибольшим значениями.*

В соответствии с доказанными теоремами на рис. 3 показано, как ведет себя непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$. Поскольку на концах отрезка она имеет значения противоположных знаков, на этом отрезке имеется ее корень $x = c$. Внутри отрезка в точке x_{max} функция принимает свое наибольшее M, а на конце b отрезка — свое наименьшее значение m. Кроме того, она принимает все значения между m и M и ограничена на $[a, b]$: $m \leq f(x) \leq M$.

Рис. 4 демонстрирует, что нарушение условий теорем может привести к невыполнению их заключений. На рис. 4, а) видно, что разрывная функция на отрезке может быть неограниченной, не иметь на нем корня (даже, если имеет на концах отрезка значения противоположных знаков) и не принимать ни наибольшего, ни наименьшего значений.

На рис. 4, б) показано, что, если вместо отрезка $[a, b]$ взять интервал (a, b), то последствия могут быть аналогичными (нет ни наибольшего, ни наименьшего значения, функция не ограничена). Корень в интервале имеется, но это

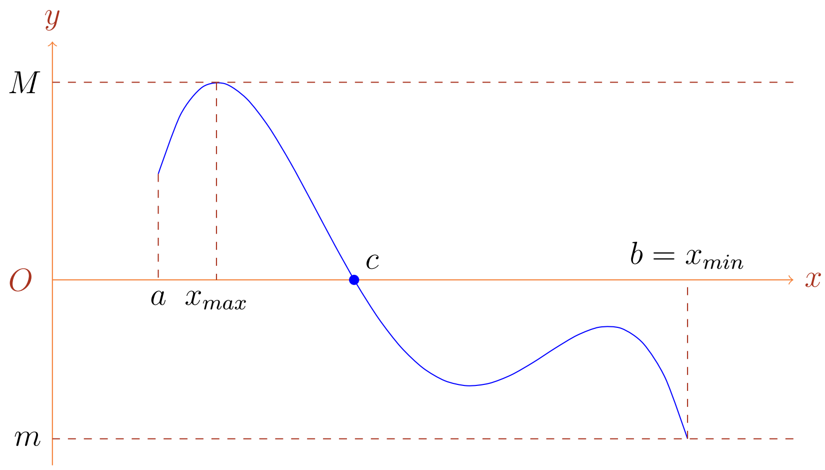


Рис. 3. Поведение непрерывной на отрезке функции.

не является следствием того, что функция имеет значения противоположных знаков на концах интервала, так как на этих концах она не определена.

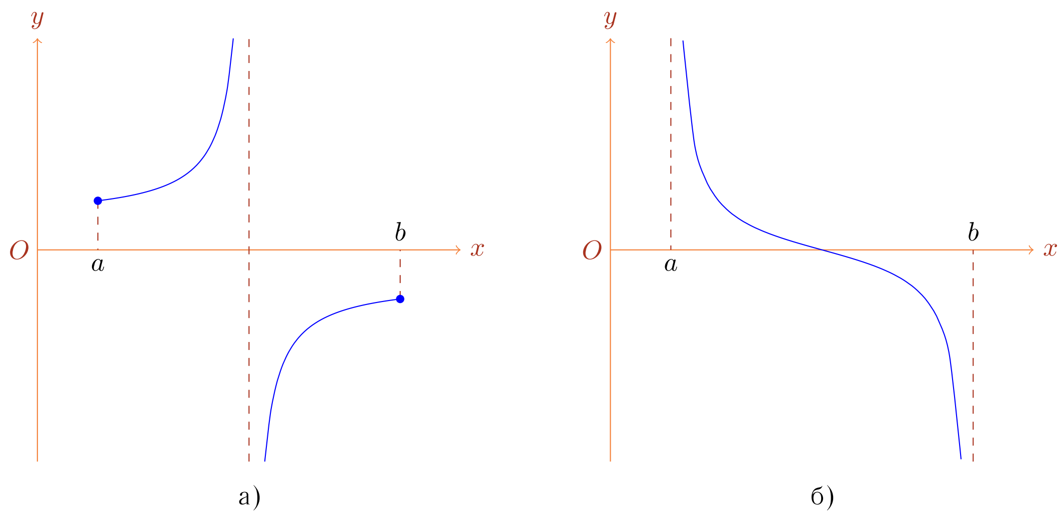


Рис. 4. Нарушение условий теорем.

Теорема 11. *Если функция $y = f\,(x)$ определена, строго возрастает (строго убывает) и непрерывна в некотором промежутке S, то на множестве $B = f\,(S)$ значений этой функции существует обратная функция $f^{-1}\,(y)$, также строго возрастающая (строго убывающая) и непрерывная на B.*

Доказательство приведено в Приложении[6)].

Там же[7)] обсуждаются особенности применения непрерывных и разрывных функций в технических приложениях, а также примеры использования системы *Mathematica* для задания и исследования разрывных функций.

Приложение

[1]) *Доказательство теоремы 4.*

Пусть функция, обозначим ее $f(x)$, возрастает на промежутке S, а точка x_0 принадлежит промежутку, но не является его левым концом. Рассмотрим промежуток $(a, x_0]$, где $a \in S$. Функция на нем ограничена: $f(x) \leq f(x_0)$. Следовательно, в точке x_0 она имеет конечный предел слева $f(x_0 - 0)$. Если $f(x_0 - 0) = f(x_0)$, то функция в точке x_0 непрерывна, в противном случае она имеет в этой точке скачок.

Подобным же образом выясняется, что в каждой точке S, не служащей его правым концом, функция либо непрерывна справа, либо имеет скачок.

Случай убывающей функции рассматривается аналогично.

[2]) *Доказательство теоремы 5.*

Пусть функция $f(x)$ возрастает в промежутке S. Предположим противное: функция имеет разрыв в точке $x_0 \in S$, например, слева (для случая разрыва справа доказательство проводится аналогично). В силу предыдущей теоремы этот разрыв может быть только скачком, т. е. должно выполняться $f(x_0 - 0) < f(x_0)$. Из-за возрастания функции слева от точки x_0 будет выполняться $f(x) \leq f(x_0 - 0)$, а справа — $f(x_0) \leq f(x)$. Таким образом, в промежутке $[f(x_0 - 0), f(x_0))$ не будет ни одного значения функции. Следовательно, $f(S)$ не может быть промежутком, что противоречит условию теоремы.

Для случая убывания функции доказательство проводится аналогично.

[3]) *Доказательство теоремы 7.*

Вначале рассмотрим понятие системы множеств, покрывающих некоторое множество. Система S множеств ***покрывает*** множество A, если любой элемент множества A содержится по крайней мере в одном множестве системы S. Подмножество системы множеств S само является системой множеств того же типа и называется ***подсистемой*** системы S.

Лемма П1 (о конечном покрытии). *В любой системе множеств, покрывающих отрезок, содержится конечная подсистема, покрывающая этот отрезок.*

Доказательство. Пусть S — система интервалов, покрывающая отрезок $I_1 = [a, b]$. Предположим противное: отрезок I_1 нельзя покрыть конечным числом интервалов из S. Поделив этот отрезок пополам, мы тогда получим, что одна из его половинок, I_2, тоже не допускает конечного покрытия. Продолжая и т. д., придем к бесконечной последовательности вложенных отрезков $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$, не допускающих покрытия конечным числом отрезков из S. При этом длина n-го отрезка стремится к 0. Тогда по лемме о вложенных отрезках (лекция «Предел функции») найдется единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам.

Так как $c \in I_1 = [a, b]$, найдется интервал $(\alpha, \beta) \in S$, содержащий точку c, т. е. выполнится неравенство $\alpha < c < \beta$. Возьмем $\varepsilon = \min(c - \alpha, \beta - c)$. Найдем в последовательности отрезков $\{I_n\}$ отрезок I_n, такой, что $|I_n| < \varepsilon$. Поскольку $c \in I_n$ и $|I_n| < \varepsilon$, получаем, что $I_n \subset (\alpha, \beta)$. Но это противоречит тому, что отрезок I_n нельзя покрыть конечным числом интервалов из S. □

Теперь приступим к доказательству теоремы 7.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Так как в каждой точке x отрезка непрерывная функция имеет конечный предел (равный ее значению в этой точке), то она ограничена в некоторой окрестности $U(x)$ этой точки. Совокупность таких окрестностей для всех точек отрезка образует его покрытие. Из этого покрытия по лемме о конечном покрытии можно извлечь конечное покрытие $U(x_1), \ldots, U(x_n)$ отрезка $[a, b]$.

Поскольку на множестве $U(x_k)$ функция ограничена: $m_k \leq f(x) \leq M_k$, $x \in U(x_k)$; $m_k, M_k \in \mathbb{R}$, то для любой точки $x \in [a, b]$ выполнится

$$\min(m_1, \ldots, m_n) \leq f(x) \leq \max(M_1, \ldots, M_n).$$

Это и означает ограниченность функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

4) *Доказательство теоремы 8.*

Разделим отрезок $[a, b]$ пополам. Если в точке деления функция не равна нулю, то на концах одного из двух полученных в результате деления отрезков функция снова принимает значения противоположных знаков. Этот отрезок тоже делим пополам и т. д. Тогда либо в одной из точек деления отрезков нам встретится точка c, в которой $f(c) = 0$, либо получим бесконечную последовательность вложенных отрезков $\{I_n\}$, длины которых стремятся к нулю. По лемме о вложенных отрезках найдется единственная точка c, общая для всех отрезков.

По построению существуют две последовательности концов $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ отрезков $\{I_n\}$ такие, что $f(x'_n) < 0$, $f(x''_n) > 0$, $\lim_{n\to\infty} x'_n = c$, $\lim_{n\to\infty} x''_n = c$. В силу непрерывности функции и теоремы о переходу к пределу в неравенстве получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x'_n\right) = f(c) \leq 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} f(x''_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x''_n\right) = f(c) \geq 0.$$

Чтобы не возникло противоречие, должно выполняться $f(c) = 0$.

5) *Доказательство теоремы 9.*

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и пусть $M = \sup f(x)$ на этом отрезке. Предположим противное: для любой точки x отрезка выполняется $f(x) < M$. Тогда непрерывная на $[a, b]$ функция $M - f(x)$ нигде на этом отрезке не равна нулю, но по свойству верхней грани может принимать значения как угодно близкие к нулю. Тогда функция $\frac{1}{M - f(x)}$ является непрерывной и неограниченной на $[a, b]$. Это противоречит теореме об ограниченности непрерывной на отрезке функции. Следовательно, существует точка $x_M \in [a, b]$, в которой $f(x_M) = M$. Аналогично доказывается, что существует точка $x_m \in [a, b]$, в которой $f(x_m) = m$, где $m = \inf f(x)$ на этом отрезке.

6) *Доказательство теоремы 11.*

Вначале докажем вспомогательное утверждение.

Лемма П2. *При непрерывном отображении образом промежутка является промежуток.*

Доказательство. Пусть $m = \inf f(x)$, $M = \sup f(x)$ на промежутке S, на котором определена функция $f(x)$ и пусть $B = f(S)$. По определению верхней грани найдутся $x_1, x_2 \in S$ такие, что для всякого y_0 между m и M выполнится неравенство $m \leq f(x_1) < y_0 < f(x_2) \leq M$. По теореме о промежуточном значении на отрезке $[x_1, x_2]$ существует точка x_0 такая, что $f(x_0) = y_0$. Следовательно, $y_0 \in B$. $\square$

Перейдем к доказательству теоремы 11.

Пусть функция $f(x)$ строго возрастает. Так как она непрерывна, то по лемме П2 $B = f(S)$ – промежуток, так что для каждого $y_0 \in B$ найдется по крайней мере одно значение $x_0 \in S$ такое, что $f(x_0) = y_0$. Из строгого возрастания $f(x)$ следует, что такое x_0 только одно: для любого $x_1 < x_0$ будем иметь $f(x_1) < f(x_0)$, а для любого $x_2 > x_0$ будем иметь $f(x_2) > f(x_0)$. Поэтому соответствие $y_0 \to x_0$ задает однозначную функцию $x = f^{-1}(y)$, обратную $f(x)$.

Функция $f^{-1}(y)$, как и $f(x)$, монотонно возрастает. Действительно, пусть $y' < y''$ и $x' = f^{-1}(y')$, $x'' = f^{-1}(y'')$. Из определения $f^{-1}(y)$ следует, что одновременно $y' = f(x')$, $y'' = f(x'')$. Если бы было $x' > x''$, то в силу строгого возрастания $f(x)$ было бы $y' > y''$, что противоречит предположению. Точно так же, если бы было $x' = x''$, то и было бы $y' = y''$, что тоже противоречит предположению. Остается $x' < x''$, что доказывает строгое возрастание $f^{-1}(y)$.

Непрерывность обратной функции следует из теоремы 5: $f^{-1}(y)$ строго возрастает и $f^{-1}(B) = S$. Чтобы доказать последнее, заметим, что для любого $x \in S$ выполняется $y = f(x)$, и, значит, именно для этого y будет $x = f^{-1}(y)$. Следовательно, любая точка S является образом точки из B при отображении $f^{-1}(y)$, а вне промежутка S функция $f(x)$ не определена, а, значит, не существует $f^{-1}(y) \notin S$.

[7)] В Приложении к лекции «Функция I» были показаны некоторые графики функций, используемых в технических науках вашей специальности. Нетрудно заметить, что часть этих функций была непрерывными, а часть — разрывными. Это говорит о том, что разрывность не является какой-то экзотикой, а представляет собой обыденную реальность, с которой сталкивается любой инженер, работающий с цифровыми, релейными и др. системами.

Следует заметить, что в технических приложениях не всегда поведение функции в точке разрыва бывает четко определено. Объясняется это тем, что значение функции в точке разрыва может быть несущественным с точки зрения работы устройства. Кроме того, в принципе одна и та же функция может встречаться в различных приложениях в разных ипостасях.

На рис. 5 показано, как может варьировать изображение, например, единичной ступенчатой функции, которая равна нулю для отрицательных x, единице — для чисел, строго бóльших нуля, а в нуле и сосредоточены отличия.

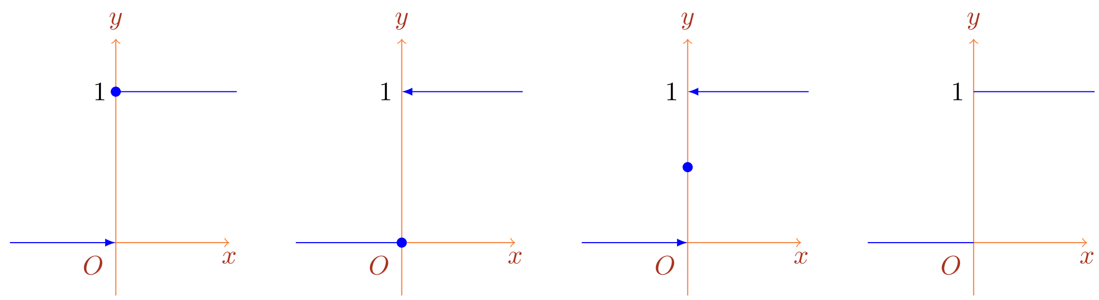


Рис. 5. Разновидности единичной ступенчатой функции.

Таким образом, значение этой функции может совпадать с одним из ее односторонних пределов, быть их полусуммой или оказаться неопределенным, как на последнем рис., где в точке разрыва график функции не оканчивается ни стрелкой, ни кружочком. Это означает, что значение функции в точке разрыва $x = 0$ несущественно.

Задать и исследовать разрывную функцию можно с помощью системы *Mathematica* (как она работает с непрерывными функциями, мы уже познакомились на предыдущих лекциях). Для этого имеется специальный оператор `Piecewise[{{val₁,cond₁},{val₂,cond₂},...}]`, который определяет значения `valᵢ` разрывной функции в соответствии с условиями `condᵢ`. Возьмем функцию

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^4, & x < 1; \\ 7 - 2x, & 1 \le x \le 3; \\ \frac{3}{x-3} - 4, & x > 3; \end{cases}$$

и зададим ее в системе *Mathematica* с помощью указанного оператора:

```
f[x_] := Piecewise[{{(x - 1)^4, x < 1}, {-2 x + 7, 1 ≤ x ≤ 3},
        {3/(x - 3) - 4, x > 3}}]
```

Есть и более удобный способ ввода оператора `Piecewise`. Вначале надо набрать на клавиатуре `Esc pw Esc` в результате чего появится левая фигурная скобка. Затем надо нажать комбинацию клавиш `Ctrl + ,` (запятая) и ввод приобретет вид

$$\begin{cases} \square & \square \\ \square & \square \end{cases}$$

В квадратики первого столбца надо вводить значения функции, а второго — соответствующие условия. Если строк, чтобы ввести функцию не хватит, надо нажать `Ctrl + Enter`, чтобы добавить еще одну строку. Кстати, если понадобится добавить еще один столбец, надо нажать `Ctrl + ,`.

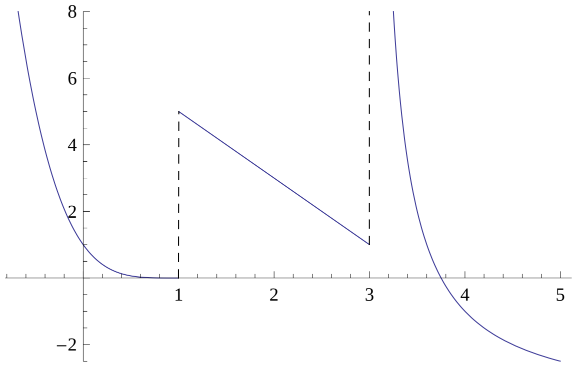
Ввод нашей функции в таком стиле имеет вид

$$f[x\_] := \begin{cases} (x - 1)^4 & x < 1 \\ -2\,x + 7 & 1 \le x \le 3 \\ \frac{3}{x - 3} - 4 & x > 3 \end{cases}$$

Замечу, что, если вы забудете задать свою функцию на каком-нибудь интервале, *Mathematica* сделает это за вас, правда, всегда на таком интервале она будет считать, что функция равна нулю.

Что можно делать с такой кусочно заданной функцией? Практически все то же, что и с более привычной непрерывной функцией. *Mathematica* это обеспечивает. Для начала построим график нашей функции:

```
Plot[f[x], {x,-0.7,5}, ExclusionsStyle → Dashed, PlotRange → {-2.5,8}]
```



В операторе `Plot` была использована опция `ExclusionsStyle` со значением `Dashed`, что обеспечивает изображение штриховых линий в точках разрыва. Отметим, что *Mathematica* не показывает, чему равно значение функции в точке разрыва.

Вычислим некоторые значения:

```
f[0]
f[1]
f[4]
1
5
-1
```

Видим, что все значения вычислены правильно, в том числе и в точке разрыва I рода $x = 1$. Найдем теперь односторонние пределы в этой точке:

```
Limit[f[x], x → 1, Direction → 1]
0
Limit[f[x], x → 1, Direction → -1]
5
```

Так же просто *Mathematica* находит односторонние пределы и для точки разрыва II рода:

```
Limit[f[x], x → 3, Direction → 1]
1
Limit[f[x], x → 3, Direction → -1]
∞
```

Наличие у функции разрывов не препятствует находить ее корни:

```
Reduce[f[x] == 0, x]
```

$$x == \frac{15}{4}$$

```
N[%]
3.75
```

причем, совершенно правильно *Mathematica* не посчитала корнем $x = 1$ – в этой точке, точке разрыва, функция равна не нулю, а 5.

Найдем все точки, в которых функция равна 1:

```
Reduce[f[x] == 1, x]
```

$$x = 0 \ || \ x = 3 \ || \ x = \frac{18}{5}$$

```
N[%]
x = 0. || x = 3. || x =3.6
```

Отметим, что найдена и точка разрыва $x = 3$, в которой функция тоже равна 1.

В заключение рассмотрим применение оператора `PiecewiseExpand` к кусочно заданной функции. Этот оператор упрощает сложную функцию, состоящую из нескольких вложенных друг в друга кусочно заданных функций, превращая ее в одну-единственную такую функцию. Наша функция и так проста, но применение упомянутого оператора покажет нам, какое внутреннее представление в системе *Mathematica* она имеет:

```
PiecewiseExpand[f[x]]
```

$$\begin{cases} 7 - 2x & 1 \le x \le 3 \\ \frac{15 - 4x}{-3 + x} & x > 3 \\ (-1 + x)^4 & \text{True} \end{cases}$$

Мы видим, что полученная запись нашей функции отличается от той, которой мы ее задавали, но в принципе все записано правильно. Последняя строка в записи функции означает, что везде, кроме указанных промежутков $[1; 3]$ и $(3; \infty)$, функция равна $(-1 + x)^4$.

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление*. – М.: Наука, 1984, – с. 84-101, 103-115.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*. – М.: Рольф, 2000. Ч. 1. – с. 130–136.