Комплексные числа

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Понятие комплексного числа. Его изображение на плоскости. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Операции над комплексными числами.

Анимация геометрического представления комплексных чисел, сложения и вычитания векторов, расположения корней из комплексного числа на комплексной плоскости. Тест по арифметике комплексных чисел.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Операции комплексной арифметики в системе *Mathematica*. Модификация операторов этой системы для согласования с традициями отечественного преподавания.

26 ноября 2010 г.

1 Понятие комплексного числа

Комплексные числа возникли при решении алгебраических уравнений. Математики не могли согласиться с тем, что уравнение $z^2 - 1 = 0$ имеет решение, а уравнение $z^2 + 1 = 0$ – нет. Поскольку среди действительных чисел нет ни одного, квадрат которого бы равнялся -1, то договорились, что таким свойством будет обладать символ j. То есть, что $j^2 = -1$. Поэтому уравнение $z^2 + 1 = 0$ имеет два решения: $z = j$ и $z = -j$, как и обычное квадратное уравнение. Так появились сначала в математической среде, а потом и в технических науках комплексные числа. В настоящее время раздел комплексного анализа – современная ветвь математики, широко развитая, которая находит применение во многих инженерных дисциплинах. Что касается вашей специальности, то комплексные числа помогают анализировать электрические цепи переменного тока, проводить расчеты электростатических полей и т.п.

Комплексное число определяется выражением

$$\boxed{z = a + jb,} \tag{1}$$

где $a = \operatorname{Re} z$ – действительное число, которое называется ***действительной частью*** комплексного числа, $b = \operatorname{Im} z$ – действительное число, которое называется ***мнимой частью***, а символ j, о котором мы уже говорили, называется ***мнимой единицей***. Все множество комплексных чисел обозначается буквой $\mathbb{C}$. Формула (1) называется также ***алгебраической формой*** записи комплексного числа. Примеры комплексных чисел: $2 + 3j$, $-5j$, 2, $-1 - j$.

Если $b = 0$, комплексное число превращается в действительное: $z = b$. Поэтому множество действительных чисел является подмножеством комплексных чисел: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Комплексное число, у которого $b \neq 0$, $a = 0$, называется ***чисто мнимым***. Комплексный нуль – это $0 + 0j$. Но пишут и просто 0.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + jb_1$ и $z_2 = a_2 + jb_2$ считаются ***равными***, если равны их действительные и мнимые части: $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$. Неравенства для комплексных чисел смысла не имеют.

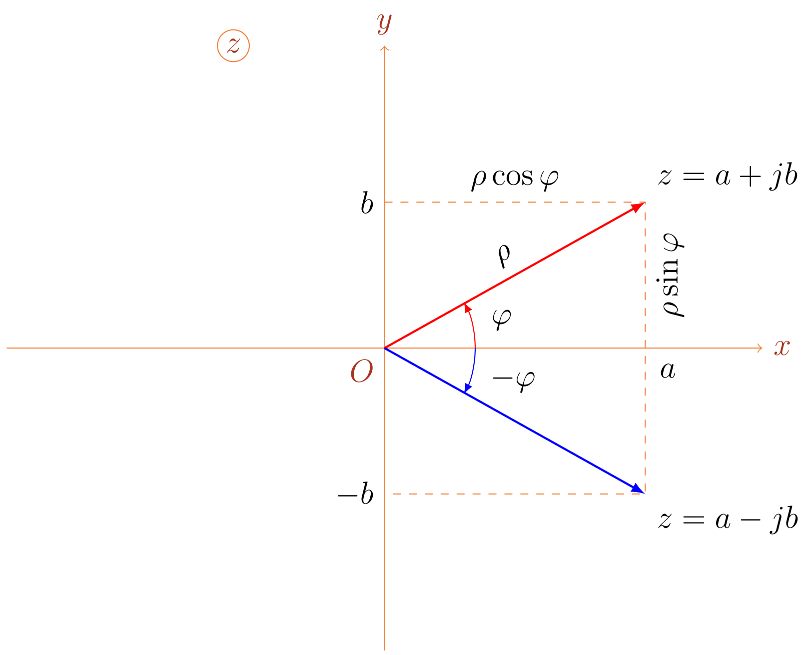
Если действительные части двух комплексных чисел одинаковы, а мнимые части отличаются только знаком, то такие числа называются ***комплексно-сопряженными***. Обозначают число, комплексно-сопряженное к числу $z = a + jb$, так: $\overline{z} = a - jb$.

В Приложении рассматриваются возможности системы *Mathematica* для работы с комплексными числами[1)].

2 Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Так как комплексное число имеет две компоненты, действительную и мнимую части, его можно трактовать и как точку координатной плоскости и как двумерный вектор. Обе возможности используются в математике. ***Комплексной плоскостью*** называют декартову плоскость, на которой изображают комплексные числа. На оси Ox откладывают действительную часть числа и потому эту ось называют также ***действительной***, а на оси Oy откладывают мнимую часть комплексного числа, поэтому ось Oy – ***мнимая***. Чтобы отличать комплексную плоскость от обычной декартовой, ее обозначают символом z. Рис. 1 демонстрирует изображение комплексного числа на комплексной плоскости как в виде точки, так и в виде радиус-вектора этой точки.

Если на комплексной плоскости ввести полярную систему координат, то комплексное число можно связать также с полярным радиусом ρ и полярным углом φ. Из рис. 1 видно, что действительная часть комплексного числа равна



Щелкая на рисунке мышью, наблюдайте как изменяет свое положение вектор $\overline{z}$, комплексно-сопряженный вектору z. Обратите внимание, как изменяются углы наклона векторов к оси абсцисс.

Рис. 1. Геометрическая интерпретация

$\rho\cos\varphi$, а его мнимая часть совпадает с $\rho\sin\varphi$. Поэтому вообще комплексное число можно также записать в виде:

$$\boxed{z = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi),}$$

который называется ***тригонометрической формой*** комплексного числа. Величина $\rho = |z|$ называется его ***модулем***, а $\varphi = \operatorname{Arg} z$ – ***аргументом***.

Очевидно, аргумент определен лишь с точностью до постоянного слагаемого $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому равенство двух комплексных чисел в тригонометрической форме можно сформулировать так: *два комплексных числа равны, если они имеют одинаковые модули, а их аргументы отличаются на* $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Одно из значений $\operatorname{Arg} z$, которое принадлежит интервалу длины 2π, называют ***главным значением*** и обозначают $\arg z$. Отметим, что аргумент числа 0 не определен. Мы будем брать главное значение из интервала $(-\pi, \pi]$ [2)], поэтому

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$
$$-\pi < \arg z \leq \pi.$$

Таким образом, от тригонометрической формы комплексного числа к его алгебраической форме можно перейти, воспользовавшись формулами

$$\boxed{a = \rho\cos\varphi,\ b = \rho\sin\varphi,}$$

а обратно — с помощью равенств:

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2+b^2},$$
$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \text{не определен}; & a=0,\ b=0; \\ \frac{\pi}{2}; & a=0,\ b>0; \\ -\frac{\pi}{2}; & a=0,\ b<0; \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a}; & a>0; \\ \pi+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}; & a<0,\ b\geq 0; \\ -\pi+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}; & a<0,\ b<0. \end{cases} \tag{2}$$

Пример 1. *Число $z=-1+j$ задано в алгебраической форме. Найти его тригонометрическую форму.*

Решение. Найдем модуль заданного числа: $z=\rho\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$ и главное значение аргумента:

$$\arg z = \varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{-1} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Поэтому тригонометрическая форма числа $-1+j$ имеет вид

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + j\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

3 Арифметика комплексных чисел

Для двух комплексных чисел

$$z_1 = a_1 + jb_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1),$$
$$z_2 = a_2 + jb_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)$$

рассмотрим четыре арифметических действия.

3.1 Сложение

Чтобы найти ***сумму*** двух комплексных чисел, надо отдельно сложить их действительные и мнимые части:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = a_1 + a_2 + j(b_1 + b_2).$$

Например, $(3-5j)+(-2+7j)=3-2+j(7-5)=1+2j$. Возникает вопрос, можно ли таким образом складывать действительные числа, трактуя их как комплексные? Ответ положительный; например,

$$4+1=(4+j\cdot 0)+(1+j\cdot 0)=4+1+j(0+0)=5+j\cdot 0=5.$$

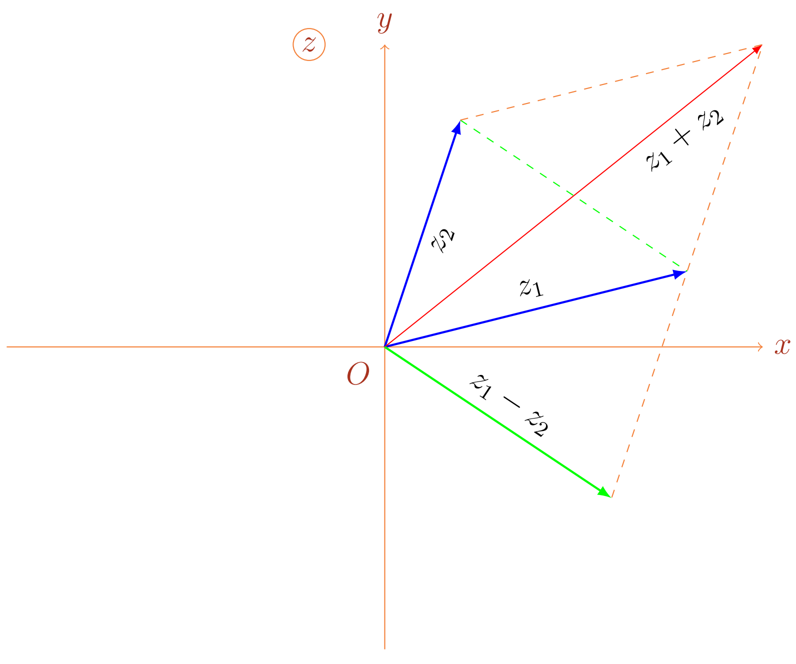
Заметим, что сумма комплексно-сопряженных чисел является действительным числом:

$$z + \overline{z} = (a + jb) + (a - jb) = 2a.$$

3.2 Вычитание

Вычитание комплексных чисел определяют как действие, обратное сложению. Поэтому действительная и мнимая части разности $z_1 - z_2$ равны, соответственно, разности действительных и мнимых частей чисел z_1 и z_2.

Сложение и вычитание комплексных чисел можно выполнять и в геометрической форме, учитывая их представление в виде векторов. Начала векторов совмещают с началом координат. Сумму находят по правилу параллелограмма (рис. 2) как одну из его диагоналей, выходящую из начала координат, а разность — как другую диагональ, перенесенную параллельным переносом к началу координат.



Щелкая на рисунке мышью, наблюдайте как изменяют свои значения векторы суммы и разности. Заметьте, что длина вектора разности может быть больше длин векторов z_1 и z_2 и больше длины их суммы.

Рис. 2. Сложение и вычитание векторов

3.3 Умножение

Комплексные числа умножают по правилам умножения многочленов, принимая во внимание, что $j^2 = -1$:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = a_1a_2 + ja_1b_2 + ja_2b_1 + j^2b_1b_2 = \\ &= a_1a_2 - b_1b_2 + j(a_1b_2 + a_2b_1). \end{aligned} \tag{3}$$

Например,

$$(2-3j)(1+2j) = 2-3j+4j-6j^2 = 8+j,$$
$$0\cdot(3+4j) = 0, \quad 1\cdot(1-j) = 1-j.$$

Если z_1 и z_2 — действительные числа, то есть $z_1 = a_1 + j\cdot 0$, $z_2 = a_2 + j\cdot 0$, то их произведение, полученное по формуле (3), равно $a_1 \cdot a_2$, что соответствует правилу умножения действительных чисел.

Важное значение имеет результат умножения комплексно-сопряженных чисел:

$$z\cdot\overline{z} = (a+jb)(a-jb) = a^2+b^2 = |z|^2.$$

Как видите, он оказывается действительным числом, которое равно квадрату модуля этих чисел. Это свойство комплексно-сопряженных чисел используется в операции деления комплексных чисел (см. далее).

Формулу (3) можно представить в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= [\rho_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)][\rho_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)] = \\ &= \rho_1\rho_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + j(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)]; \end{aligned}$$

то есть

$$\boxed{z_1z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + j\sin(\varphi_1+\varphi_2)].}$$

Следовательно, в этом случае правило умножения звучит так: *чтобы перемножить два комплексных числа в тригонометрической форме, надо умножить их модули, а аргументы сложить*. Так,

$$\begin{aligned} (1+j)(\sqrt{3}-j) &= \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right] = \\ &= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + j\sin\frac{\pi}{12}\right); \end{aligned}$$

с другой стороны, если умножить эти числа в алгебраической форме, получим

$$\begin{aligned} &(1+j)(\sqrt{3}-j) = \\ &\qquad = 1+\sqrt{3}+j(-1+\sqrt{3}) = 2\sqrt{2}\left(\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{8} + j\frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{8}\right) = \\ &\qquad = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + j\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right). \end{aligned}$$

Сравнивая тригонометрическую и алгебраическую формы произведения, находим точные значения синуса и косинуса угла $\pi/12$:

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}, \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Так как $j = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}$, то *умножение* любого *комплексного числа* $z = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ *на мнимую единицу приводит к повороту вектора* z *на угол* $\frac{\pi}{2}$ *на комплексной плоскости*:

$$z \cdot j = \rho\left[\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Этот факт используется при расчете векторных диаграмм тока и напряжения в электрических цепях.

3.4 Деление

Чтобы разделить комплексное число z_1 *на число* $z_2 \neq 0$ *в алгебраической форме, надо числитель и знаменатель дроби* z_1/z_2 *умножить на число* $\overline{z}_2$*, комплексно-сопряженное знаменателю*:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2^2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} =$$
$$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Например,

$$\frac{2-3j}{3+5j} = \frac{(2-3j)(3-5j)}{(3+5j)(3-5j)} = \frac{6-15+j(-9-10)}{9+25} = -\frac{9}{34} - j\frac{19}{34}.$$

Как и для предыдущих арифметических действий, результаты деления двух действительных чисел $z_1 = a_1 + j\cdot 0$ и $z_2 = a_2 + j\cdot 0$, $a_2 \neq 0$, выполненных в действительной и комплексной формах совпадают:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + 0\cdot 0}{a_2^2 + 0^2} + j\frac{a_2\cdot 0 - a_1\cdot 0}{a_2^2 + 0^2} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Деление в тригонометрической форме выполняется так: *модули комплексных чисел делятся, а их аргументы вычитаются*:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right].}$$

Докажите это самостоятельно[3)].

3.5 Возведение в натуральную степень

Из правила умножения комплексных чисел в тригонометрической форме следует так называемая ***формула Муавра***, предназначенная для возведения комплексного числа в натуральную степень:

$$\boxed{z^n = [\rho(\cos\varphi + j\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + j\sin n\varphi).}$$

Ее удобно использовать, когда n достаточно велико:

$$(1-j)^{20} = \left\{\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}^{20} =$$
$$= 2^{10}[\cos(-5\pi) + j\sin(-5\pi)] = 1024[\cos(6\pi - 5\pi) + j\sin(6\pi - 5\pi)] =$$
$$= 1024(\cos\pi + j\sin\pi) = -1024.$$

Протестируйте себя на выполнение арифметических действий с комплексными числами. Щелкая первый раз мышкой, получите вопрос, попробуйте на него ответить и проверьте ответ, щелкнув мышкой второй раз. И т.д.

$$(-1+4j) + (5-2j) = ?$$

Рис. 3. Тест по арифметике комплексных чисел

3.6 Извлечение корня

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число w, которое удовлетворяет уравнению

$$w^n = z, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если $z = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi)$, $w = r(\cos\psi + j\sin\psi)$, то такое уравнение можно переписать в виде

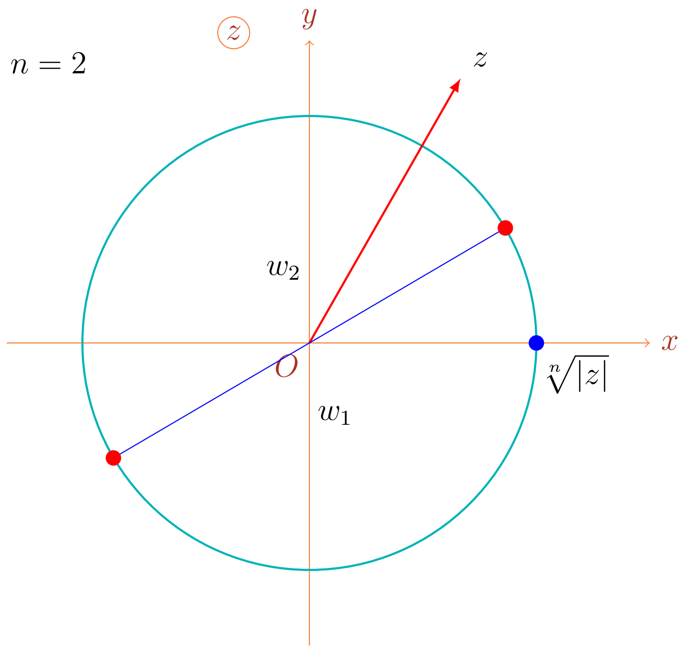
$$r^n(\cos n\psi + j\sin n\psi) = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi).$$

Отсюда

$$r = \sqrt[n]{\rho},\ n\psi = \varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

или
$$r=\sqrt[n]{\rho},\ \psi=\frac{\varphi+2k\pi}{n},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Различные корни получаются лишь для $k=0,1,\ldots,n-1$.



Щелкая на рисунке мышью, наблюдайте, как изменяется расположение корней на окружности и углы.

Рис. 4. Расположение корней из комплексного числа

Таким образом, если $z\neq 0$, то корень $\sqrt[n]{z}$ имеет ровно n значений, которые находят по формуле

$$\boxed{w_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+j\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,\ldots,n-1.} \qquad (4)$$

Геометрически числа $w_k,\ k=0,1,\ldots,n-1$, изображают вершинами правильного n-угольника, вписанного в круг радиуса ρ с центром в начале координат (рис. 4).

Главным значением $\sqrt[n]{z}$ корня считается то, которое получается при $k=0$.

Пример 2. *Найти все значения* $\sqrt[4]{-1}$.

Решение. Используя представление числа $\sqrt[4]{-1}$ в тригонометрической форме, получаем
$$w_k=\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{\cos\pi+j\sin\pi}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+j\sin\frac{\pi+2k\pi}{4},\ k=\overline{0,3};$$
следовательно,
$$w_1=\cos\frac{\pi}{4}+j\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$w_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + j\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$w_3 = \cos\frac{5\pi}{4} + j\sin\frac{5\pi}{4} = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + j\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$w_4 = \cos\frac{7\pi}{4} + j\sin\frac{7\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

На рис. 5 изображен четырехугольник, вершинами которого являются числа w_1, w_2, w_3, w_4.

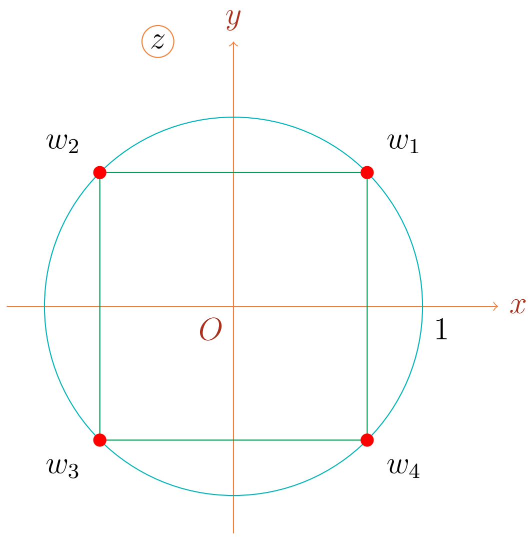


Рис. 5. Корни $\sqrt[4]{-1}$

Приложение

[1)]Система *Mathematica* умеет работать с комплексными числами. Правда, мнимая единица в ней обозначается буквой I или контурной буквой i, которая выщелкивается мышью из палитры инструментов или набирается как `Esc ii Esc` с помощью клавиатуры. Все множество комплексных чисел в этой системе именуется `Complexes`.

Например, чтобы выделить действительную или мнимую часть числа, следует выполнить операторы

```
Re[2 − 3I]
Im[2 − 3I]
2
−3
```

Оператор `Conjugate` дает на выходе число, комплексно-сопряженное данному:

```
Conjugate[−4 + 5I]
−4 − 5I
```

Mathematica может выполнять действия и с символьными комплексными выражениями. Например,

```
Re[a + bI]
-Im[b] + Re[a]
-Im[b] + Re[a]
-Im[b] + Re[a]
```

Ответ кажется странным, но он правилен, так как никакой информации о числах a и b не поступило. Поэтому система решила, что они (и в общем случае это резонно) — комплексные. Значит, если предполагается, что a и b действительны, требуется дополнительный оператор, `ComplexExpand`, который раскрывает комплексные выражения, считая, что все переменные в них — действительны. Вот как это выглядит:

```
ComplexExpand[Re[a + bI]]
ComplexExpand[Im[a + bI]]
ComplexExpand[Conjugate[a + bI]]
a
b
a - Ib
```

Переход от полярных координат к декартовым осуществляется просто исполнением тригонометрической формы комплексного числа:

```
2(Cos[−π/4] + I Sin[−π/4])
(1 - I)√2
```

Мы видим, что полученная алгебраическая форма записана не совсем правильно. Чтобы распечатывать ответ в привычной форме, напишем специальную функцию:

```
TrigCart[z_]:=
   Which[Im[z] > 0, Print[Re[z], " + I ", Im[z]],
         Im[z] < 0,Print[Re[z], " - I ", Abs[Im[z]]],
         Im[z] == 0, Print[Re[z]]];
```

В ней использован условный оператор `Which[test`$_1$`,value`$_1$`,test`$_2$`,value`$_2$`,...]`, который вычисляет логические условия `test`$_i$ до тех пор, пока не встретит истинное логическое условие, и тогда он выдает соответствующее ему значение `value`$_i$.
Теперь ответ запишется совершенно правильно:

```
TrigCart[2 (Cos[-π/4] + I Sin[-π/4])]
√2 - I√2
```

Для обратного перехода, от декартовых координат к полярным, в системе *Mathematica* имеются операторы `Abs` (модуль) и `Arg` (аргумент):

```
Abs[√2 - I √2]
Arg[√2 - I √2]
2
```
$-\frac{\pi}{4}$

Чтобы получить тригонометрическую форму в требуемом виде, сконструируем еще одну функцию:

```
CartTrig[z_] :=
  (
  If[Abs[z] == 1, qul = ""; qur = "", qul = "["; qur = "]"];
  If[Arg[z] < 0, brl = "("; brr = ")", brl = ""; brr = ""];
  Which[Abs[z] == 0, Print[0],
        Arg[z] == 0, Print[If[Abs[z] != 1, Abs[z], ""],
          qul <> "Cos 0 + I Sin 0" <> qur],
        Arg[z] < 0, Print[If[Abs[z] != 1, Abs[z], ""],
          qul <> "Cos" <> brl, Arg[z],
          brr <> " + I Sin" <> brl, Arg[z], brr <> qur],
        Arg[z] > 0, Print[If[Abs[z] != 1, Abs[z], ""],
          qul <> "Cos ", Arg[z]," + I Sin ", Arg[z], qur]]
   );
```

Какие новые возможности системы *Mathematica* задействованы в правой части этой функции? Во-первых, вся правая часть взята в круглые скобки, а операторы внутри скобок отделены друг от друга точкой с запятой. Это позволяет считать все, что заключено в скобки, одним большим (составным) оператором, определяющим значение функции. Операторы в круглых скобках выполняются один за другим, и результат выполнения последнего из них становится вычисленным значением функции.

Во-вторых, появился новый условный оператор `If`, который в наиболее общей форме имеет вид `If[condition,t,f,u]`. Если `condition` дает `True`, значение этого оператора равно `t`, если дает `False`, значение равно `f`; если же `condition` не равно ни `True`, ни `False`, то оператор принимает значение `u`.

Вот применение созданной функции:

```
CartTrig[√2 + I √2]
```
$2[\mathrm{Cos}\frac{\pi}{4} + \mathrm{I}\ \mathrm{Sin}(\frac{\pi}{4})]$

Действия над комплексными числами в алгебраической форме *Mathematica* выполняет так же просто, как и над действительными:

$$\frac{(2-5\text{I})+(3+4\text{I})-5\text{I}}{(1-4\text{I})(1+\text{I})}$$

$$\frac{43}{34}-\frac{15\text{I}}{34}$$

$$(1-\text{I})^{20}$$

```
-1024
```

Из комплексного числа *Mathematica* извлекает только главное значение корня и при этом еще требуется дополнительный оператор `ComplexExpand`:

`ComplexExpand[`$\sqrt[4]{-1}$`]`

$$\frac{1+\text{I}}{\sqrt{2}}$$

Определим свой оператор, который будет давать на выходе весь список корней (z — число, из которого извлекается корень, n — порядок корня):

```
ComplexRoots[z_,n_]:=(L=List[ⁿ√z];
  Do[L=Append[L,L[[1]](Cos[2πi/n] + I Sin[2πi/n])],
             {i, 1, n - 1}];
ComplexExpand[L]);
```

В правой части выражения, задающего оператор, мы находим новые конструкции системы *Mathematica*.

Оператор `List` создает список с именем `L`, который состоит из единственного корня n-й степени из комплексного числа z (он всегда соответствует нулевому значению k в формуле (4)).

Далее, во второй строке записи, следует оператор цикла `Do` вида `Do[oper,{i,`$\mathtt{i_{min}}$`,`$\mathtt{i_{max}}$`}]`, где `oper` — оператор, который вообще говоря зависит от `i` и исполняется для каждого `i` от $\mathtt{i_{min}}$ до $\mathtt{i_{max}}$.

Этим оператором, исполняемым в теле цикла, является оператор вида `Append[list,elem]`, добавляющий в конец списка `list` элемент `elem`. В нашем случае

$$\texttt{elem = L[[1]](Cos[}2\pi\texttt{i/n] + I Sin[}2\pi\texttt{i/n])},$$

где `L[[1]]` — первый и единственный элемент списка L, которым является $\sqrt[n]{z}$ для $k=0$ в формуле (4) (вообще j-й элемент списка L извлекают с помощью двойных квадратных скобок как `L[[j]]`. Таким образом, этот корень умножается на число $\cos(2\pi i/n)+\text{I}\sin[2\pi i/n)$ при $i=1$ и получается следующее значение корня, которое оператор `Append` добавляет в конец списка `L`: `L = Append ...`; затем происходит умножение на то же число, но при $i=2$ и т.д., пока не будут получены все значения $\sqrt[n]{z}$.

Затем ко всему списку применяется оператор `ComplexExpand`, и получаемый в результате список становится значением созданного нами оператора.

Вот как выглядит его применение:

`ComplexRoots[-1, 4]`

$$\left\{\frac{1+\text{I}}{\sqrt{2}},-\frac{1-\text{I}}{\sqrt{2}},-\frac{1+\text{I}}{\sqrt{2}},\frac{1-\text{I}}{\sqrt{2}}\right\}$$

[2)] Иногда главным значением аргумента считают значение, которое принадлежит не интервалу $(-\pi;\pi]$, а интервалу $[0;2\pi)$. В этом случае, чтобы перейти к алгебраической форме комплексного числа, надо воспользоваться формулами

$$\rho=|z|=\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \text{не определен}; & a = 0,\ b = 0; \\ \frac{\pi}{2}; & a = 0,\ b > 0; \\ \frac{3\pi}{2}; & a = 0,\ b < 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a}; & a > 0,\ b \geq 0; \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}; & a < 0; \\ 2\pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}; & a > 0,\ b < 0. \end{cases} \qquad (\Pi 1)$$

Если угол φ, вычисляемый по формуле (П1), обозначить $\varphi_{[0;2\pi)}$, а угол φ из формулы (2) записать как $\varphi_{(-\pi;\pi]}$, то эти углы можно связать равенством

$$\varphi_{[0;2\pi)} = \begin{cases} \varphi_{(-\pi;\pi]}, & \varphi_{(-\pi;\pi]} > 0; \\ 2\pi + \varphi_{(-\pi;\pi]}, & \varphi_{(-\pi;\pi]} < 0. \end{cases}$$

Mathematica для вычисления угла $\varphi_{(-\pi;\pi]}$ предлагает оператор `ArcTan[a,b]`, а для нахождения угла $\varphi_{[0;2\pi)}$ соответствующий оператор напишем сами:

```
arctan[a_,b_] := 2 π UnitStep[-ArcTan[a,b]] + ArcTan[a,b]
```

где функция `UnitStep[x]` равна 0 при `x` < 0 и равна 1 в других случаях.

Вот что дает применение рассмотренных операторов:

```
a = 1; b = -√3/3;
ArcTan[a,b]
```

$-\dfrac{\pi}{6}$

```
arctan[a,b]
```

$\dfrac{11\pi}{6}$

3)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - j\sin\varphi_2)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - j\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{\rho_1[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + j(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_1)]}{\rho_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} =$$
$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Дифференциальное и интегральное исчисление.* – М.: Наука, 1984, § 5.3.

[2] Свешников А.Г., Тихонов А.Н. *Теория функций комплексной переменной.* – М.: Наука, 1970, глава 1, § 1.

[3] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000, 1 часть, глава VI.