Предел и производная комплексной функции

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Бесконечно удаленная точка, стереографическая проекция. Классификация точек, окрестностей, областей и кривых. Предел и непрерывность комплексной функции. Аналитическая функция, условия Коши-Римана. Связь между аналитическими и гармоническими функциями. Геометрический смысл аргумента и модуля производной аналитической функции. Понятие о конформном отображении.

Анимация стереографической проекции.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Использование системы *Mathematica* в области аналитических функций.

3 октября 2015 г.

В этой лекции мы возвращаемся к комплексной функции. Будет показано, что она тесно связана с функциями нескольких переменных и векторным анализом на плоскости, который, как мы видели, является основой теории электромагнитных полей.

Итак, что такое комплексная функция вам известно, остается рассмотреть понятия, аналогичные понятиям обычного, действительного, анализа, то есть пределы, производные и интегралы. А с чего начиналось изучение пределов? Правильно, с введения бесконечности. В случае функции комплексного переменного мы поступим аналогичным образом, причем, подручных средств нам понадобится даже меньше: всего одна бесконечность и только два типа окрестностей. А само понятие предела комплексной функции практически ничем не будет отличаться от уже известного вам определения.

1 Бесконечно удаленная точка

Добавим к множеству комплексных чисел $\mathbb{C}$ символ ∞, который будем называть ***бесконечностью***, полученное множество назовем ***расширенным множеством комплексных чисел*** и обозначим $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Будем предполагать, что введенный символ обладает следующими свойствами:

$$\infty \pm z = z \pm \infty = \infty, \ \infty \cdot z = z \cdot \infty = \infty \cdot \infty = \infty,$$

$$\frac{z}{\infty} = 0, \frac{\infty}{z} = \infty, \ \frac{z}{0} = \infty,$$

$z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, а операции $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞ не имеют смысла.

Куда же нам «поместить» бесконечность? На числовых осях есть лево и право, верх и низ, поэтому существуют и две бесконечности: ∞ и $-\infty$. Но для комплексной плоскости есть еще вверху справа или внизу слева и т. п., так что либо надо вводить бесконечное множество бесконечностей, либо ... обойтись одной. Как ни парадоксально, был сделан второй выбор. В результате бесконечность «находится» в конце любого пути, начинающегося в любой точке комплексной плоскости и уходящего в ее необозримую даль в каком угодно направлении. Кстати, поскольку точкам комплексной плоскости сопоставлены комплексные числа, то ее следует пополнить еще одной точкой, отвечающей бесконечности. Эта точка называется ***бесконечно удаленной***.

Можно получить наглядное представление о точке ∞, если воспользоваться следующей моделью. Совместим комплексную плоскость с плоскостью xOy в трехмерной декартовой системе координат. Расположим сферу единичного радиуса на комплексной плоскости так, чтобы в упомянутой трехмерной системе координат центр сферы находился в точке $(0, 0, 1)$ (см. рис. 1). Точку $(0, 0, 0)$ сферы будем считать южным полюсом, а точку $(0, 0, 2)$ — северным.

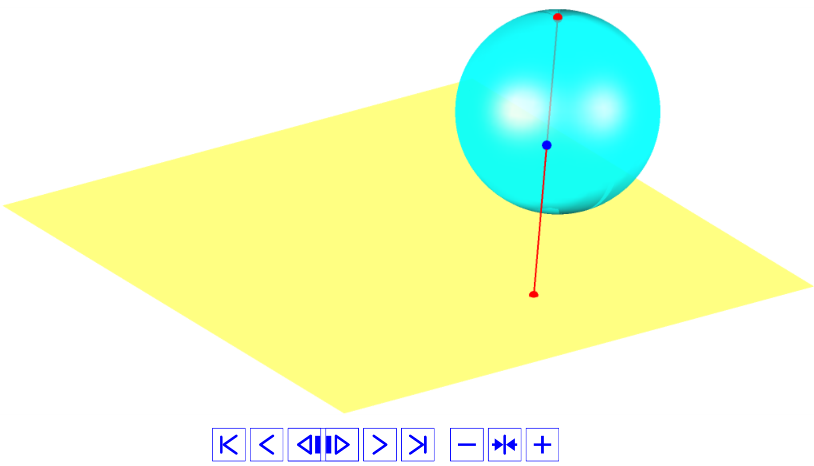

Рис. 1. Стереографическая проекция.

Проведем луч из северного полюса в какую-нибудь точку комплексной плоскости. По пути луч пересечет сферу в некоторой точке. Таким образом, каждой точке сферы будет сопоставлена точка комплексной плоскости. Это соответствие называется ***стереографической проекцией***. Его можно представить в виде формул[1)]

$$X = \frac{4x}{|z|^2 + 4}, \ Y = \frac{4y}{|z|^2 + 4}, \ Z = \frac{2\,|z|^2}{|z|^2 + 4}, \tag{1}$$

где (X, Y, Z) – трехмерные координаты точки сферы, (x, y) – соответствующие этой точке координаты комплексной плоскости, отвечающие комплексному числу $z = x + jy$. Стереографическая проекция позволяет визуализировать бесконечно удаленную точку. При удалении точки $z = x + jy$ от начала координат $|z|^2 \to \infty$, а точка (X, Y, Z), как это видно из равенств (1), стремится к северному полюсу сферы. Таким образом, этот полюс, которому не соответствует ни одна точка плоскости $\mathbb{C}$, и является образом бесконечно удаленной точки $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$. Луч в этом предельном положении становится параллельным комплексной плоскости. При этом совершенно не важно, в какую сторону комплексной плоскости и каким образом удаляется точка z от начала координат, лишь бы увеличивалось расстояние $|z|^2$.

2 Окрестности, области, кривые

Многие понятия, вводимые здесь, являются простыми переформулировками понятий, изученных в разделе функций нескольких переменных†. Так, ***окрестностью*** $U(z_0, r)$ радиуса r ***обыкновенной точки*** $z_0 \in \mathbb{C}$ называется внутренность круга $|z - z_0| < r$, а окрестностью $U(\infty, r)$ радиуса r ***бесконечности*** ∞ – внешняя часть круга $|z| < r$, то есть $U(\infty, r) = \{z : |z| > r\}$.

Имеется и соответствующая классификация точек комплексной плоскости по отношению к некоторому множеству D, расположенному в ней. Как и раньше, будут использоваться внутренние, внешние и граничные точки множества. Годится и прежнее определение открытого множества D. Множество граничных точек D будем называть его ***границей*** и обозначать ∂D. Множество называется ***связным***, если любые две его точки можно соединить ломаной с конечным числом звеньев, целиком принадлежащей множеству. ***Областью*** на комплексной плоскости называют открытое связное множество. Если к области D присоединить ее границу, то есть образовать множество $D \cup \partial D$, то получим множество, которое будем обозначать $\overline{D} = D + \partial D$ и называть ***замкнутой областью***, или ***замыканием*** области D.

Кривой на комплексной плоскости называется множество точек $z(t) \in \mathbb{C}$, описываемое равенством

$$z(t) = x(t) + jy(t), \; t \in [t_0, T], \tag{2}$$

где $x(t)$, $y(t)$ – действительные функции, называемые координатными, t – некоторый действительный параметр, $t_0, T \in \overline{\mathbb{R}}$. Таким образом, кривая задается однопараметрической функцией на плоскости‡.

†Лекция «Частные производные».
‡Лекция «Функция II».

В дальнейшем подразумевается, что рассматриваемые нами кривые непрерывны. Кривая в точке $z_1 = z(t_1) = x(t_1) + jy(t_1)$ (2) называется ***непрерывной***, если

$$\lim_{t \to t_1} |z(t) - z(t_1)| = 0. \tag{3}$$

Если кривая $z(t)$ непрерывна в точке $z_1 = z(t_1)$, то пишут

$$\lim_{t \to t_1} z(t) = z_1.$$

Очевидно, определение (3) может быть следующим образом записано на языке «$\varepsilon - \delta$»:

$$\forall (\varepsilon > 0) \, \exists (\delta > 0) \, \forall (t \neq t_1) \;\; |t - t_1| < \delta \Longrightarrow |z(t) - z(t_1)| < \varepsilon. \tag{4}$$

Лемма 1. *Кривая* (2) *непрерывна в точке* $z_1 = z(t_1)$ *тогда и только тогда, когда ее координатные функции* $x(t)$ *и* $y(t)$ *непрерывны в точке* t_1.

Доказательство отнесено в Приложение[2)].

Таким образом, можно сказать, что непрерывность комплексной кривой равносильна непрерывности ее координатных функций.

Точка $z(t_1)$, $t_1 \in (t_0, T)$, называется ***точкой самопересечения*** кривой $z(t)$, если найдется такое значение параметра $t_2 \neq t_1$, что $z(t_1) = z(t_2)$.

Кривая $z(t)$ называется ***замкнутой кривой***, или ***контуром***, если она не имеет точек самопересечения и $z(t_0) = z(T)$. Область, ограниченная контуром γ, обозначается D_γ. Направления обхода контура и соответствующие обозначения сохраняются[†]. Остаются в силе понятия одно-, много- и n-связной областей, понятие разреза[‡].

3 Предел комплексной функции

Предел функции комплексного переменного определим на языке «$\varepsilon - \delta$». Скажем, что величина $A \in \overline{\mathbb{C}}$ является ***пределом*** функции $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, при $z \to z_0$, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, если

$$\forall (\varepsilon > 0) \, \exists (\delta > 0) \, \forall (z \neq z_0) \;\; z \in U(z_0, \delta) \Longrightarrow f(z) \in U(A, \varepsilon).$$

По форме это определение ничем не отличается от определения предела функции действительного аргумента. Надо только понимать, что все величины в этом определении комплексные, а окрестности определены на плоскости, а не на прямой. Если предел функции существует, пишут

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A.$$

[†]Лекция «Работа и циркуляция».
[‡]Лекция «Ротор и дивергенция».

Для z_0, $A \in \mathbb{C}$ окрестности имеют вид $U(z_0,\delta) = \{z : |z-z_0| < \delta\}$, $U(A,\varepsilon) = \{w : |w-A| < \varepsilon\}$, и определение предела можно переписать так:

$$\forall(\varepsilon>0)\,\exists(\delta>0)\,\forall(z\neq z_0)\ \ |z-z_0|<\delta \Longrightarrow |f(z_0)-A|<\varepsilon. \qquad (5)$$

Это равносильно тому, что

$$\lim_{|z-z_0|\to 0}|f(z)-A| = 0.$$

Лемма 2. *Функция $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ имеет предел $A = a + jb \in \mathbb{C}$ в точке $z_0 = x_0 + jy_0 \in \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда существуют пределы*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = a,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = b. \qquad (6)$$

Доказательство см. в Приложении[3)].

Комплексная последовательность $\{z_n\}$ определяется обычным образом, как функция $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$, то есть каждому натуральному числу ставится в соответствие некоторое комплексное число. Таким образом, последовательность является комплексной функцией, определенной на множестве натуральных чисел и поэтому к ней применимо сформулированное определение предела. Именно, число $\zeta \in \overline{\mathbb{C}}$ называется ***пределом последовательности*** $\{z_n\}$ при $n\to\infty$, если

$$\forall(\varepsilon>0)\exists(N>0)\forall(n)\, n>N \Longrightarrow z_n \in U(\zeta,\varepsilon).$$

Для $\zeta \in \mathbb{C}$, это высказывание можно переписать как

$$\forall(\varepsilon>0)\exists(N>0)\forall(n)\, n>N \Longrightarrow |z_n-\zeta|<\varepsilon$$

и тогда понятно, что ζ будет пределом $\{z_n\}$, если $\lim_{n\to\infty}|z_n-\zeta| = 0$.

Если ζ является пределом $\{z_n\}$, пишут

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \zeta.$$

Поскольку определение предела комплексной функции практически не отличается от определения предела функции действительного аргумента, то оказываются справедливыми теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного двух комплексных функций (предел знаменателя не равен нулю), если пределы этих функций конечны.

Функция $f(z)$ называется ***непрерывной в точке*** $z_0 \in \mathbb{C}$, если она определена в этой точке и выполняется равенство

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Поскольку непрерывность определена через предел, то нетрудно видеть, что справедливо утверждение, вытекающее из леммы 2.

Лемма 3. *Для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ была непрерывна в точке $z_0 = x_0 + jy_0$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были непрерывны в точке (x_0, y_0).*

Функция называется ***непрерывной в области***, если она непрерывна в каждой точке этой области. Сказанное о теоремах, касающихся арифметических операций над пределами комплексных функций, можно повторить и в отношении непрерывности. Следовательно, сумма, разность и произведение двух непрерывных комплексных функций непрерывны. Частное непрерывно во всех точках, в которых делитель не равен нулю.

4 Производная

Производной комплексной функции $f(z)$ в точке z называется предел

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \tag{7}$$

если он существует.

Если в точке z существует конечная производная $f'(z)$, то в этой точке функция $f(z)$ называется ***дифференцируемой***.

Пример 1. *Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = \operatorname{Re} z = x$.*

Решение. Возьмем вначале приращение $\Delta z = \Delta x$ и найдем предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x} + \Delta x - \cancel{x}}{\Delta x} = 1.$$

Теперь пусть $\Delta z = j\Delta y$, тогда

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x - x}{j\Delta y} = 0.$$

Поскольку предел не имеет определенного значения, то он не существует, следовательно, заданная функция не дифференцируема ни в одной точке. □

Замечание 1. *Пример показывает, что дифференцируемости функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ недостаточно для дифференцируемости комплексной функции $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$. Функции $u(x, y) = x$ и $v(x, y) = 0$ дифференцируемы как функции двух переменных, но функция $f(z) = \operatorname{Re} z$ недифференцируема.*

Итог таков: дифференцируемая функция для комплексного анализа недостаточно «хороша»; чтобы быть «хорошей», комплексная функция должна быть аналитической.

Функция, дифференцируемая в некоторой области и имеющая в ней непрерывную производную, называется ***аналитической*** в этой области.

В следующей теореме сформулированы условия, при которых функцию можно считать аналитической в некоторой области.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ была аналитической в области D, необходимо и достаточно, чтобы в этой области существовали непрерывные первые частные производные функций u и v, которые бы удовлетворяли условиям Коши-Римана:*

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.} \tag{8}$$

При этом производная вычисляется по формуле:

$$\boxed{f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\,\frac{\partial v}{\partial x}.} \tag{9}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $w = f(z)$ – аналитическая в области D функция, то есть в каждой точке $z \in D$ существует непрерывная производная (7). Выбрав $\Delta z = \Delta x$, получим

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + jv(x+\Delta x, y) - u(x, y) - jv(x, y)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + j \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + j\,\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Возьмем теперь $\Delta z = j\Delta y$, тогда

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) + jv(x, y+\Delta y) - u(x, y) - jv(x, y)}{j\Delta y} = \\ &= -j \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} = \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - j\,\frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$

Сравнивая полученные выражения для производной, получаем условия (8). Непрерывность частных производных функций u и v следует из непрерывности $f'(z)$.

Достаточность. Доказана в Приложении[4)]. □

Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющие в некоторой области условиям Коши-Римана, называют ***сопряженными*** друг другу в этой области.

Следствие 1. *В полярных координатах $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ условия Коши-Римана* (8) *приобретают вид*

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi},} \tag{10}$$

а производная вычисляется по правилу

$$\boxed{f'(z) = \frac{\rho}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + j\,\frac{\partial v}{\partial \rho}\right).} \tag{11}$$

Доказательство см. в Приложении[5)].

Пример 2. *Доказать аналитичность функции $w = e^z$ и найти ее производную.*

Решение. Пусть $z = x + jy$, выделим действительную и мнимую части экспоненты:

$$e^z = e^{x+jy} = e^x\cos y + je^x\sin y,$$
$$u(x, y) = e^x\cos y, \quad v(x, y) = e^x\sin y.$$

Ясно, что функции u и v и их производные непрерывны. Условия Коши-Римана тоже выполняются:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Следовательно, комплексная экспонента аналитична. Найдем ее производную по формуле (9):

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + j\,\frac{\partial v}{\partial x} = e^x\cos y + je^x\sin y = e^z.$$

Получилась формула, аналогичная формуле для действительной экспоненты.

Пример 3. *Найти производную логарифма $w = \operatorname{Ln} z$.*

Решение. Пусть $z = \rho e^{\varphi}$. Раскроем логарифм в полярной системе координат:

$$\operatorname{Ln} z = \ln\rho + j(\varphi + 2k\pi), \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Имеем $u(\rho, \varphi) = \ln\rho$, $v(\rho, \varphi) = \varphi + 2k\pi$. Проверим условия Коши-Римана (10):

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \rho} = 0 = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Таким образом, комплексный логарифм аналитичен всюду, кроме начала координат. Вычислим его производную по формуле (11):

$$f'(z) = \frac{\rho}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + j\,\frac{\partial v}{\partial \rho}\right) = \frac{\rho}{\rho e^{\varphi}}\left(\frac{1}{\rho} + j0\right) = \frac{1}{\rho e^{\varphi}} = \frac{1}{z}.$$

□

Аналогичным образом можно показать, что вся таблица производных для действительных функций остается в силе и для комплексных. Остаются справедливыми для аналитических функций и теоремы о производных суммы, разности, произведения и частного, теорема о производной сложной функции.

Пусть функция $w = f(z)$ отображает множество D на множество G. Функция $z = f^{-1}(w)$ называется ***обратной*** к функции $w = f(z)$, если каждой точке $w \in G$ ставится в соответствие совокупность всех тех точек $z \in D$, которые функцией $w = f(z)$ отображаются в точку w.

Пусть функция $w = f(z)$ однозначна в области D . Если любым двум прообразам $z_1 \neq z_2 \in D$ соответствуют разные образы $w_1 \neq w_2$, то отображение $w = f(z)$ называется ***взаимно однозначным*** или ***однолистным***, а сама функция $w = f(z)$ – ***однолистной***.

Теорема 2. *Пусть отображение $w = f(z)$ однолистно в D. Если функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то обратная функция $z = f^{-1}(w)$ дифференцируема в точке $w_0 = f(z_0)$ и её производная вычисляется по формуле*

$$\left[f^{-1}(w_0)\right]' = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Доказательство приведено в Приложении[6)].

Мы убедились в том, что, несмотря на некоторые отличия, свойства аналитических функций совпадают со свойствами действительных функций. Теперь познакомимся с тремя специфическими свойствами аналитических функций.

Теорема 3. *Для того чтобы функция $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ была аналитической в области D, необходимо и достаточно, чтобы функции u и v были сопряженными гармоническими[†] функциями в этой области.*

Доказательство см. в Приложении[7)].

Теорема 4. *Если действительная часть аналитической функции $f(z)$ гармонична в области D, то ее мнимая часть определяется с точностью до произвольной постоянной. Точно так же определяется действительная часть по известной гармонической мнимой части.*

В Приложении имеется доказательство и пример применения теоремы[8)].

Теорема 5. *Пусть $f(z)$ – аналитическая в области D функция. Тогда линии уровня ее действительной и мнимой частей ортогональны.*

Доказательство приведено в Приложении[9)].

[†]Лекция «Потенциальность и соленоидальность».

5 Геометрический смысл производной

Пусть $f(z)$ – функция, заданная в области D комплексной плоскости (z) и принимающая значения в области G комплексной плоскости (w). Пусть в точке $z_0 \in D$ выполняется $f'(z_0) \neq 0$ и $w_0 = f(z_0)$. Возьмем какую-нибудь кривую γ_1, проходящую через точку z_0 на плоскости (z), и отобразим ее с помощью функции $f(z)$ на плоскость (w) в кривую Γ_1, проходящую через точку w_0 (рис. 2). Пусть φ_1 – угол между касательной к γ_1 в точке z_0 и осью Ox, а Φ_1 – угол между касательной к Γ_1 в точке w_0 и осью Ou. Представим производную функции $f(z)$ следующим образом:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = k e^{j\alpha},$$

так что k – модуль, а α – аргумент производной.

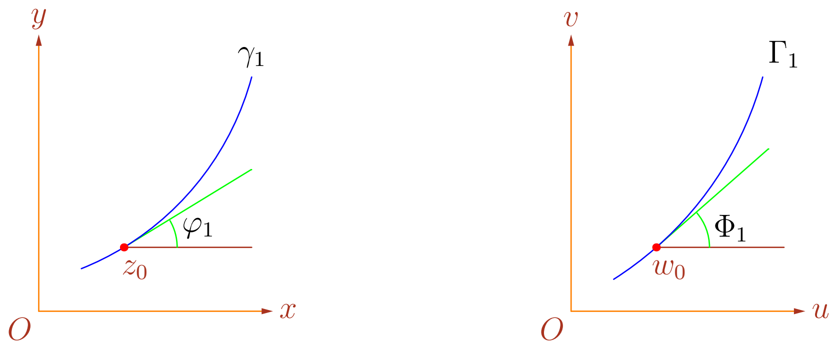

Рис. 2. К геометрическому смыслу аргумента и модуля производной.

Равенство $k = |f'(z)| = \lim_{\Delta z \to 0} |\Delta w / \Delta z|$ позволяет записать, что с точностью до б. м. более высокого порядка малости, чем $|\Delta z|$, выполняется

$$|\Delta w| \approx k\, |\Delta z|\,.$$

Последнее означает, что отображение, осуществляемое функцией $f(z)$, достаточно малый круг $|\Delta z| \leq r$, переводит в нечто, подобное кругу $|\Delta w| \leq kr$, с коэффициентом подобия k. О таком отображении говорят, что оно обладает свойством *постоянства растяжения*.

Обратимся теперь к аргументу производной. Вспоминая, что аргумент дроби равен разности агументов числителя и знаменателя, получим, что

$$\begin{aligned} \alpha = \arg f(z) = \arg \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \\ = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z. \end{aligned} \tag{12}$$

Пусть точка $z_0 + \Delta z \in \gamma_1$, тогда $w_0 + \Delta w \in \Gamma_1$. Ясно, что $\Delta z = (z_0 + \Delta z) - z_0$ является секущей к кривой γ_1 в точке z_0, а $\Delta w = (w_0 + \Delta w) - w_0$ – секущей к кривой Γ_1 в точке w_0. Тогда должно выполняться

$$\varphi_1 = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z, \qquad \Phi_1 = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta w,$$

и равенство (12) становится таким:

$$\alpha = \arg f\,(z) = \Phi_1 - \varphi_1. \tag{13}$$

Мы видим, что аргумент производной представляет собой *разность углов между касательными к кривой на комплексной плоскости* z *и к ее образу в плоскости* w.

Возьмем еще одну кривую, γ_2, проходящую через точку z_0, и ее образ в виде кривой Γ_2, проходящей через точку w_0. Обозначим углы, которые образуют касательные к соответствующей кривой в соответствующей точке, φ_2 и Φ_2. Очевидно и для этих углов будет справедливо равенство вида (13):

$$\alpha = \Phi_2 - \varphi_2.$$

Таким образом, $\Phi_1 - \varphi_1 = \Phi_2 - \varphi_2$, и для углов между кривыми и их образами обнаруживается связь

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \varphi_1 - \varphi_2.$$

В силу произвольности кривых γ_1 и γ_2 можно утверждать, что отображение, реализуемое функцией $f\,(z)$, обладает свойством *сохранения углов между кривыми*.

Итак, отображение, осуществляемое функцией $f\,(z)$, обладает свойствами *постоянства растяжения и сохранения углов между кривыми*. Такие отображения называются ***конформными*** (в точке z_0).

В Приложении[10)] можно познакомиться с визуализацией конформного отображения $w = e^z$.

Там же[11)] имеется материал о применении конформных отображений к расчету плоских электростатических полей.

Далее в Приложении[12)] рассмотрено использование системы *Mathematica* для решения задач из области аналитических функций.

Приложение

[1] Точка с координатами (1), с одной стороны, принадлежит сфере, так как

$$X^2+Y^2+(Z-1)^2=\frac{16x^2+16y^2}{\left(|z|^2+4\right)^2}+\left(\frac{2\,|z|^2}{|z|^2+4}-1\right)^2=$$

$$=\frac{16\,|z|^2}{\left(|z|^2+4\right)^2}+\frac{\left(|z|^2-4\right)^2}{\left(|z|^2+4\right)^2}=\frac{|z|^4+8\,|z|^2+16}{\left(|z|^2+4\right)^2}=1,$$

а, с другой стороны, находится на луче, который выходит из северного полюса $(0,0,2)$ и проходит через точку $(x,y,0)$. Уравнения луча имеют вид

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z-2}{-2}$$

и координаты точки (1) ему удовлетворяют:

$$\frac{4}{|z|^2+4}=\frac{4}{|z|^2+4}=-\left(\frac{2\,|z|^2}{|z|^2+4}-2\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{|z|^2+4}.$$

[2] *Необходимость*. Пусть кривая непрерывна в точке z_1. Тогда из неравенства

$$|x\,(t)-x\,(t_1)|\le\sqrt{[x\,(t)-x\,(t_1)]^2+[y\,(t)-y\,(t_1)]^2}=|z\,(t)-z\,(t_1)|$$

следует, что справедливость утверждения (4) автоматически влечет справедливость такого же утверждения для функции $x\,(t)$, так что последняя будет непрерывна. Аналогично доказывается непрерывность $y\,(t)$.

Достаточность. Пусть теперь непрерывны функции $x\,(t)$ и $y\,(t)$. В этом случае можно записать, что

$$\lim_{t\to t_1}|z\,(t)-z\,(t_1)|=\lim_{t\to t_1}\sqrt{|x\,(t)-x\,(t_1)|^2+|y\,(t)-y\,(t_1)|^2}=0,$$

так как $\lim_{t\to t_1}|x\,(t)-x\,(t_1)|=0$, $\lim_{t\to t_1}|y\,(t)-y\,(t_1)|=0$ в силу непрерывности модуля[†]. Следовательно, кривая $z\,(t)$ в соответствии с определением (3) непрерывна.

[3] *Необходимость*. Пусть $\lim_{z\to z_0}f\,(z)=A$. Тогда из неравенства

$$|u\,(x,y)-a|\le\sqrt{[u\,(x,y)-a]^2+[v\,(x,y)-b]^2}=|f\,(z)-A|$$

следует, что справедливость высказывания (5) приводит к выполнению первого из равенств (6). Аналогично доказывается справедливость второго из этих равенств.

Достаточность. Пусть теперь выполняются равенства (6). Тогда

$$\lim_{z\to z_0}|f\,(z)-A|=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\sqrt{|u\,(x,y)-a|^2+|v\,(x,y)-b|^2}=0,$$

а это означает, что $\lim_{z\to z_0}f\,(z)=A$.

[†] Лекция «Производная», пример 5.

[4]) Пусть частные производные функций u и v непрерывны на множестве D, тогда эти функции дифференцируемы на D и справедливы равенства†

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\Delta y + o_1\left(\Delta r\right), \qquad \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\,\Delta y + o_2\left(\Delta r\right),$$

где o_1, o_2 — б. м. относительно $\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Пусть $\Delta z = \Delta x + j\Delta y$; составим отношение

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta u + j\Delta v}{\Delta x + j\Delta y} = \frac{u'_x\,\Delta x + u'_y\,\Delta y + o_1\left(\Delta r\right) + j\left[v'_x\,\Delta x + v'_y\,\Delta y + o_2\left(\Delta r\right)\right]}{\Delta x + j\Delta y}$$

и, используя условия (8), преобразуем его:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{u'_x\Delta x - v'_x\,\Delta y + o_1\left(\Delta r\right) + j\left[v'_x\,\Delta x + u'_x\,\Delta y + o_2\left(\Delta r\right)\right]}{\Delta x + j\Delta y} = \\ &= u'_x\,\frac{\Delta x + j\Delta y}{\Delta x + j\Delta y} + v'_x\,\frac{-\Delta y + j\Delta x}{\Delta x + j\Delta y} + \frac{o_1\left(\Delta r\right) + jo_2\left(\Delta r\right)}{\Delta x + j\Delta y} = \\ &= u'_x + jv'_x + \frac{\zeta\left(\Delta r\right)}{\Delta z},\end{aligned} \tag{П1}$$

где $\zeta\left(\Delta r\right) = o_1\left(\Delta r\right) + jo_2\left(\Delta r\right)$. Поскольку

$$\lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{o_i\left(\Delta r\right)}{\Delta z}\right| = \lim_{\Delta r\to 0}\frac{\left|o_i\left(\Delta r\right)\right|}{\Delta r} = 0,\ i = \overline{1,2},$$

то $\lim_{\Delta z\to 0}\zeta\left(\Delta r\right)/\Delta z = 0$. Переходя в (П1) к пределу при $\Delta z \to 0$, получим (9). Так как u'_x и v'_x непрерывны в D, то в силу леммы 3 непрерывна и $f'(z)$, так что функция $f\left(z\right)$ аналитична в области D.

[5]) Применяя правило дифференцирования сложной функции и учитывая условия (8), для $u\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)$ и $v\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)$ получим

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial\rho} &= \frac{\partial u}{\partial x}\,\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi,\\ \frac{\partial u}{\partial\varphi} &= \frac{\partial u}{\partial x}\left(-\rho\sin\varphi\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\,\rho\cos\varphi;\end{aligned}\right. \tag{П2}$$

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial\rho} &= \frac{\partial v}{\partial x}\,\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial y}\,\sin\varphi,\\ \frac{\partial v}{\partial\varphi} &= \frac{\partial v}{\partial x}(-\rho\sin\varphi) + \frac{\partial v}{\partial y}\,\rho\cos\varphi.\end{aligned}\right. \tag{П3}$$

Решим эти системы относительно производных по x и y по правилу Крамера. Поскольку вторая система получается из первой заменой v на u, то решив первую, найдем и решение второй. Решение системы (П2):

$$\Delta = \begin{vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix} = \rho,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial\rho} & \sin\varphi\\ \dfrac{\partial u}{\partial\varphi} & \rho\cos\varphi\end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial\rho}\,\rho\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial\varphi}\,\sin\varphi,$$

†Лекция «Полный дифференциал».

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \dfrac{\partial u}{\partial \rho} \\ -\rho\sin\varphi & \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial \rho}\,\rho\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\,\cos\varphi - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\sin\varphi, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial \rho}\,\sin\varphi. \qquad (\Pi 4)$$

Тогда решение системы (П3) имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho}\,\cos\varphi - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi}\,\sin\varphi, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi}\,\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial \rho}\,\sin\varphi. \qquad (\Pi 5)$$

Подставляя эти выражения в условия Коши-Римана (8), получим два равенства:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial \rho}\,\cos\varphi - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\sin\varphi = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi}\,\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial \rho}\,\sin\varphi, \\ &\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial \rho}\,\sin\varphi = -\frac{\partial v}{\partial \rho}\,\cos\varphi + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi}\,\sin\varphi, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)\cos\varphi = \left(\frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\sin\varphi, \\ &\left(\frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\cos\varphi = \left(-\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)\sin\varphi. \end{aligned}$$

Перемножение равенств и вычитание затем из левой части правой дает

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 0,$$

откуда уже и следует выполнение соотношений (10).

Вычислим производную в полярной системе координат. Для этого вначале используем формулу (9) и первые равенства из (П4) и (П5):

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\,\cos\varphi - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi + j\left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\,\cos\varphi - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi}\sin\varphi\right).$$

Далее в силу условий (10):

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial \rho}\,\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial \rho}\sin\varphi + j\left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\,\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi\right) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho}\,(\cos\varphi - j\sin\varphi) + j\,\frac{\partial v}{\partial \rho}\,(-j\sin\varphi + \cos\varphi) = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + j\,\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)(\cos\varphi - j\sin\varphi) = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + j\,\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)\frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\cos\varphi + j\sin\varphi} = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + j\,\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)\frac{\rho}{\rho\,(\cos\varphi + j\sin\varphi)} = \frac{\rho}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + j\,\frac{\partial v}{\partial \rho}\right). \end{aligned}$$

[6)] Поскольку отображение $w = f(z)$ однолистно в D, то обратная функция $z = f^{-1}(w)$ однозначна в области $G = f(D)$. Тогда отображения $w = f(z)$ и $z = f^{-1}(w)$ взаимно однозначны и

$$[f^{-1}(w_0)]' = \lim_{\Delta w\to 0}\frac{f^{-1}(w_0+\Delta w)-f^{-1}(w_0)}{\Delta w} = \lim_{\Delta w\to 0}\frac{\cancel{z_0}+\Delta z-\cancel{z_0}}{\Delta w} =$$
$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta w/\Delta z} = \frac{1}{f'(z_0)},$$

где $\Delta w = f(z_0+\Delta z) - f(z_0)$.

[7] *Необходимость.* Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D. На следующей лекции будет показано, что такая функция дифференцируема неограниченное число раз, а значит, и функции u и v имеют частные производные любого порядка. Поскольку для аналитической функции удовлетворяются условия Коши-Римана (8), продифференцируем первое из них по x, а второе — по y и сложим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}-\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\equiv 0.$$

Получили уравнение Лапласа для функции u, что означает ее гармоничность. Аналогично, если продифференцировать первое уравнение по y , а второе — по x и вычесть почленно второе уравнение из первого, получим уравнение Лапласа для функции v.

Достаточность. Пусть функции u и v гармоничны и сопряжены, тогда они удовлетворяют условиям Коши-Римана, и, следовательно, составленная из них комплексная функция $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ аналитична.

[8] Пусть $u(x,y)$ — гармоническая функция, которая является действительной частью $f(z)$. Так как $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то $u''_{xx}+u''_{yy}=0$, или $\left(-u'_y\right)'_y = (u'_x)'_x$, из чего видно, что выражение $-u'_y\,dx + u'_x\,dy$ есть полный дифференциал[†]. Но в силу аналитичности $f(z)$ выполняются условия Коши-Римана (8), так что $-u'_y\,dx+u'_x\,dy = v'_x\,dx + v'_y\,dy$ и тогда следующий криволинейный интеграл II рода зависит лишь от начальной и конечной точек интегрирования:

$$v(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy. \tag{П6}$$

Пример П1. *Отыскать аналитическую функцию $f(z)$ по ее действительной части $u(x,y) = x^2-8xy-y^2+1$, если $f(0)=1$.*

Решение. Заданная функция гармонична: $u''_{xx}+u''_{yy} = 2-2 = 0$. Рассмотрим способ решения задачи, при котором можно обойтись без применения формулы (П6). Из первого уравнения Коши-Римана (8) имеем

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x-8y,$$

откуда в результате интегрирования по y получим $v(x,y) = 2xy-4y^2+C(x)$.

Из второго условия Коши-Римана следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -8x-2y = -2y - C'(x) = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

так что $C'(x) = 8x$, $C(x) = 4x^2+\alpha$, $\alpha = \mathrm{const}$. Итак, $v(x,y) = 4x^2+2xy-4y^2+\alpha$,

$$f(z) = x^2-8xy-y^2+1+j\left(4x^2+2xy-4y^2+\alpha\right).$$

[†] Лекция «Уравнения в полных дифференциалах».

По условию $f(0) = 1$, поэтому $\alpha = 0$ и окончательно получаем

$$f(z) = x^2 - 8xy - y^2 + 1 + j\left(4x^2 + 2xy - 4y^2\right).$$

□

[9)] Линии уровня действительной и мнимой частей выражаются формулами

$$u(x,y) = C_1 = \text{const}, \qquad v(x,y) = C_2 = \text{const}.$$

Перемножим градиенты этих функций и учтем условия (8):

$$\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} =$$
$$= \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Это и означает ортогональность линий уровня[†].

[10)] На рис. 3 показано, как аналитическая функция $f(z) = e^z$ преобразует окружности $|\Delta z| = r$, расположенные в комплексной плоскости (z) в их подобие на плоскости (w). Можно заметить, что при уменьшении радиуса окружности ее образ в плоскости (w) становится все больше похожим на окружность, а самый малый образ практически не отличается от своего прообраза. Коэффициент растяжения в данном случае равен $k = |f'(0)| = e^0 = 1$.

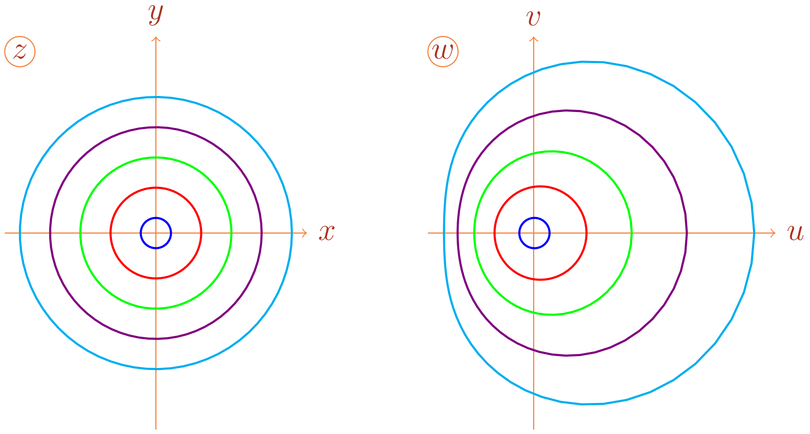

Рис. 3. Преобразование кругов отображением $f(z) = e^z$.

Рис. 4 показывает, как при этом сохраняются углы в $15°$ между прямыми на плоскости (z), переходя в углы между их образами-кривыми на плоскости (w).

[11)] Плоское электростатическое поле $\mathbf{E}(x,y) = E_1(x,y)\,\mathbf{i} + E_2(x,y)\,\mathbf{j}$ в вакууме описывается равенствами[‡]

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \tag{П7}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{П8}$$

где $\rho(x,y)$ — поверхностная плотность зарядов. Из уравнения (П7) следует, что поле $\mathbf{E}$ потенциально, т. е. существует потенциальная функция поля $v(x,y)$ такая, что

$$\mathbf{E} = -\nabla v,\ E_1 = -\frac{\partial v}{\partial x},\ E_2 = -\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{П9}$$

[†]Лекция «Скалярное поле».
[‡]Лекция «Потенциальность и соленоидальность», Приложение. Далее материал лекции используется без специальных ссылок на нее.

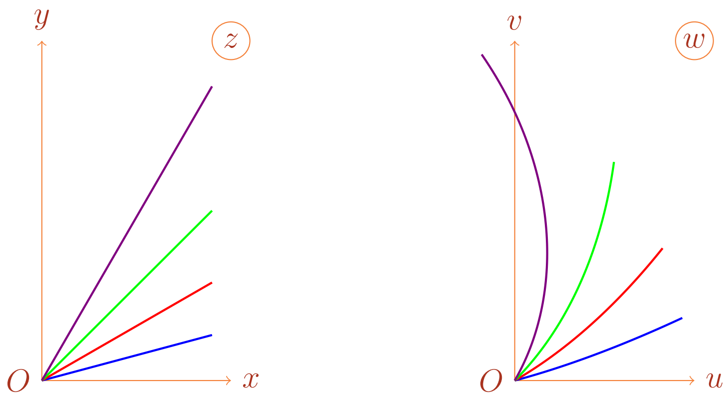

Рис. 4. Сохранение углов отображением $f(z) = e^z$.

причем, равенство (П8) приводит к выводу, что $u\,(x, y)$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\triangle v = -4\pi\rho.$$

В области, в которой нет зарядов, $\rho \equiv 0$, и уравнение Пуассона превращается в уравнение Лапласа

$$\triangle v = 0.$$

Следовательно, в этой области $v\,(x, y)$ является гармонической функцией, так что ее можно считать мнимой частью некоторой аналитической функции

$$f\,(z) = u\,(x, y) + jv\,(x, y)\,, \tag{П10}$$

действительную часть которой $u\,(x, y)$ по теореме 4 можно восстановить по функции $v\,(x, y)$ с точностью до постоянного слагаемого.

Функция (П10) называется *комплексным потенциалом* поля $\mathbf{E}$. Линии уровня ее мнимой части являются *эквипотенциальными линиями* данного поля. Вектор $\mathbf{E}$ в соответствии с формулами (П9) направлен по нормали к эквипотенциалям, а из теоремы 5 известно, что линии уровня функций $u\,(x, y)$ и $v\,(x, y)$ ортогональны. Это означает, что $\mathbf{E}$ направлен по касательной к линиям уровня функции $u\,(x, y)$, которые, таким образом, являются векторными линиями электрической напряженности $\mathbf{E}$.

Введем комплексную напряженность $\hat{\mathbf{E}} = E_1 + jE_2$. Используя равенства (П9) и условия Коши-Римана (8), получим, что

$$\hat{\mathbf{E}} = -\frac{\partial v}{\partial x} - j\,\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} - j\,\frac{\partial u}{\partial x} = -j\left(\frac{\partial u}{\partial x} - j\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -j\,\overline{f'\,(z)}.$$

Тогда

$$\left|\hat{\mathbf{E}}\right| = |\mathbf{E}| = |\,f'\,(z)|\,.$$

Трудность решения задач электростатики методом комплексного потенциала заключается в том, что последний не всегда бывает легко подобрать в конкретной задаче. Однако существует и обратный путь: взяв какую-нибудь аналитическую функцию, найти электростатическое поле, которое она описывает. Этот несколько неожиданный способ и будет продемонстрирован.

Рассмотрим, например, аналитическую функцию $w = f\,(z) = u + jv$, $z = x + jy$, обратная к которой функция имеет вид

$$z = A\,(e^{aw} + aw)\,, \tag{П11}$$

$a > 0$, $A > 0$. Перепишем равенство в развернутом виде:

$$x + jy = A\left(e^{au}\cos av + je^{au}\sin av + au + jav\right),$$

откуда

$$x = A\left(e^{au}\cos av + au\right), \qquad y = A\left(e^{au}\sin av + av\right). \tag{П12}$$

Упростим эти выражения, положив $av = \pm\pi$:

$$x\left(u\right) = A\left(au - e^{au}\right), \qquad y = \pm\pi A.$$

Покажем, что эти уравнения являются уравнениями двух лучей, параллельных оси Ox. Найдем производные

$$\frac{dx}{du} = aA\left(1 - e^{au}\right), \qquad \frac{d^2x}{du^2} = -a^2Ae^{au}.$$

Первая производная равна нулю при $u = 0$, а вторая свидетельствует о том, что в этой точке функция $x = x\left(u\right)$ имеет максимум. Его значение: $x_{\max} = -A$. При $u \to \pm\infty$ имеем $x \to -\infty$ и, таким образом, $x \in (-\infty, -A]$. При этом y остается постоянным, равным $-\pi A$ или πA. В результате получаем два луча, изображенных на рис. 5. Так как $av = \pm\pi$, то на луче $y = -\pi a$ потенциал поля $v_- = -\pi/a$, а на луче $y = \pi/a$ он имеет значение $v_+ = \pi/a$. Таким образом, разность потенциалов составляет $v_+ - v_- = 2\pi/a$, откуда

$$a = \frac{2\pi}{v_+ - v_-}.$$

Если обозначить d расстояние между лучами, то можно определить A как

$$A = \frac{d}{2\pi}.$$

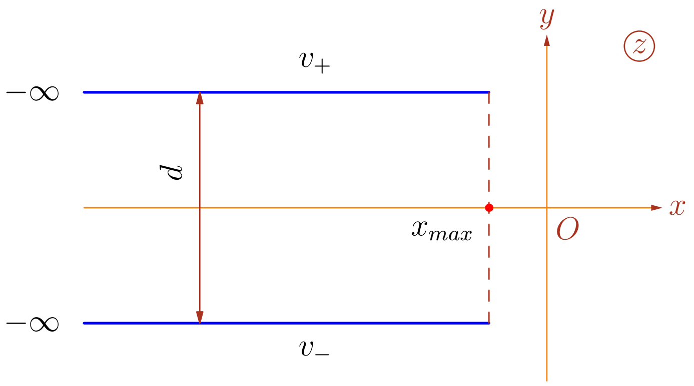

Рис. 5.

Теперь надо включить воображение и заметить, что эти два луча можно считать проекциями двух пластин конденсатора, расположенных перпендикулярно плоскости xOy, причем, с одной стороны пластины бесконечны, а с другой конечны. Чтобы получить комплексный потенциал для такого конденсатора, подставим найденные значения a и A в формулу (П11):

$$z = \frac{d}{2\pi}\left(e^{\frac{2\pi}{v_+ - v_-}w} + \frac{2\pi}{v_+ - v_-}w\right).$$

Выпишем для этой функции равенства, аналогичные (П12):

$$x\left(u, v\right) = \frac{d}{2\pi}\left(e^{\frac{2\pi u}{v_+ - v_-}}\cos\frac{2\pi v}{v_+ - v_-} + \frac{2\pi u}{v_+ - v_-}\right),$$

$$y(u,v)=\frac{d}{2\pi}\left(e^{\frac{2\pi u}{v_+-v_-}}\sin\frac{2\pi v}{v_+-v_-}+\frac{2\pi v}{v_+-v_-}\right).$$

Для изображения эквипотенциалей на плоскости xOy надо в выписанных формулах задать различные значения $u=u_n=\mathrm{const}$ и построить параметрические кривые $(x(u_n,v),y(u_n,v))$, зависящие от параметра v. Чтобы изобразить векторные линии поля $\mathbf{E}$, надо задать различные значения $v=v_n=\mathrm{const}$, $v_-\le v\le v_+$, и построить параметрические кривые $(x(u,v_n),y(u,v_n))$, зависящие от параметра u. Результат показан на рис. 6. Можно сделать вывод о том, что уже вблизи краев пластинок поле внутри конденсатора достаточно однородно, а снаружи конденсатора сильно искривлено.

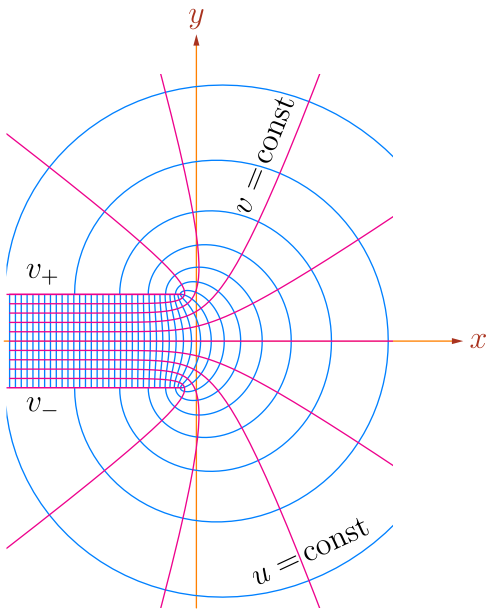

Рис. 6.

[12] Очевидно, систему *Mathematica* можно использовать при вычислении пределов комплексных функций, для проверки непрерывности кривых и условий Коши-Римана, для вычисления производных. Ничего особенно нового в этих уже привычных вычислениях нет, поэтому попробуем хотя бы облегчить поиск мнимой части аналитической функции по ее гармонической действительной части. Для этого напишем небольшую процедуру, осуществляющую такой поиск:

```
findV[a_,b_,c_,d_][u_]:=
  Block[{ss,v,w,ww,vv,vvv,f},
  v=∂x u[x, y];
  w=∫ v dy;
  ww=-∂y u[x, y]-∂x w;
  vv=∫ ww dx+p;
  vvv=vv+w;
  f:=u[x,y]+I vvv;
  ss=Solve[(f /.{x→a,y→b})==c+I d,p];
  f/.ss[[1]]
];
```

Эта процедура находит выражение для аналитической функции $f(z)$, удовлетворяющей условию $f(a + jb) = c + jd$, для которой задана лишь ее действительная часть `u`. Пример П1 с помощью `findV` может быть решен так:

```
u[x,y] := x^2 - 8 x y - y^2 + 1;
findV[0,0,1,0][u] // ComplexExpand
1 + x^2 - 8 x y - y^2 + I(4 x^2 + 2 x y - 4 y^2)
```

Решим еще один пример, в котором

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

а условие, обеспечивающее однозначное решение задачи, имеет вид $f(1) = 1 + j$:

```
u[x,y] := x/(x^2 + y^2)
findV[1,0,1,1][u] // ComplexExpand
x/(x^2 + y^2) + I(1 - y/(x^2 + y^2))
```

Эту же программу можно использовать для получения действительной части аналитической функции по ее гармонической мнимой части. В самом деле, пусть требуется найти действительную часть функции $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ по ее мнимой части при условии, что $f(a + jb) = c + jd$. Введем функцию

$$g(x, y) = jf(x, y) = ju(x, y) - v(x, y).$$

Упомянутое условие превращается в $g(a, b) = jf(a + jb) = jc - d$. Таким образом, можно по действительной части $-v(x, y)$ функции g найти ее мнимую часть, используя процедуру `findV` и условие $g(a, b) = jc - d$. Найденная мнимая часть g и будет искомой действительной частью функции f.

Пусть, например, требуется найти действительную часть функции f по ее мнимой части $v(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$ при условии $f(1, \pi) = -je$. Выполним для этого следующие операторы:

```
u[x,y] := -e^x (x Cos[y] - y Sin[y]);
findV[1,π,e,0][u] // ComplexExpand
-e^x x Cos[y] + e^x y Sin[y] + I(-eπ - e^x y Cos[y] - e^x x Sin[y])
```

Мнимая часть полученного результата является искомой действительной частью

$$u(x, y) = -e\pi - e^x(x \sin y + y \cos y).$$

Mathematica также может помочь визуализировать некоторые особенности конформных отображений, осуществляемых аналитическими функциями. Поскольку свойства конформных отображений проявляются, как мы видели, прежде всего при отображении окружностей и лучей, то создадим из них картинку (рис. 7):

```
x[t_,φ_] := Cos[φ] t;
y[t_,φ_] := Sin[φ] t;
plot1 = ParametricPlot[Evaluate[Table[{r Cos[t], r Sin[t]},
    {r,0.1,0.9,0.2}]],{t,0,2π}];
plot2 = ParametricPlot[Evaluate[Table[{x[t,φ],y[t,φ]},
    {φ,0,5π/6,π/6}]],{t,-1.2,1.2}];
```

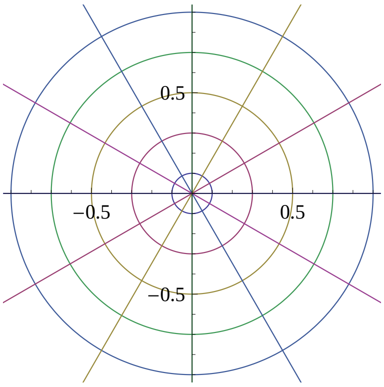

Рис. 7. Прообраз всех отображений.

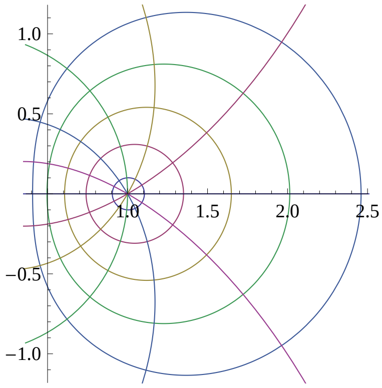

Рис. 8. $f(z) = e^z$.

```
Show[Graphics[plot1],Graphics[plot2]]
```

а затем напишем небольшую программу, которая позволит увидеть образ этой картинки, создаваемый с помощью аналитической функции. Вот эта программа:

```
u[x_,y_] := With[{z = x + I y},ComplexExpand[Re[f[z]]]];
v[x_,y_] := With[{z = x + I y},ComplexExpand[Im[f[z]]]];
plot1 = ParametricPlot[Evaluate[Table[{u[r Cos[t],r Sin[t]],
    v[r Cos[t],r Sin[t]]},{r,0.1,0.9, 0.2}]],{t,0,2π}];
plot2 = ParametricPlot[Evaluate[Table[{u[x[t,φ],y[t,φ]],
    v[x[t,φ],y[t,φ]]},{φ,0,5π/6,π/6}]],{t,−1.2,1.2}];
Show[Graphics[plot1],Graphics[plot2]]
```

Зададим, например, функцию

```
f[z_] := e^z;
```

и выполним весь ряд операторов программы. Результат показан на рис. 8.

Задавая другие функции и выполняя тот же ряд операторов, будем получать новые образы картинки 7. На рис. 9 и 10 показаны образы, созданные гиперболическим синусом и арккотангенсом. Вторая картинка состоит из двух частей, чт́о отражает факт разрывности арккотангенса, используемого системой *Mathematica* (см. лекцию «Основные элементарные комплексные функции»).

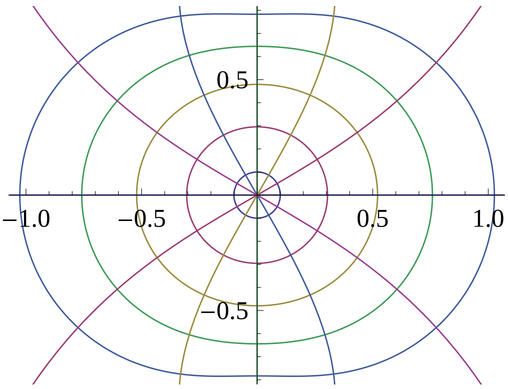

Рис. 9. $f(z) = \operatorname{sh} z$

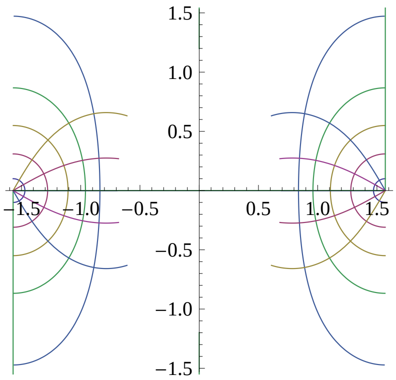

Рис. 10. $f(z) = \operatorname{arcctg} z$.

Иногда в подобном «художественном творчестве» возникают довольно экзотические «произведения» (рис. 11-16).

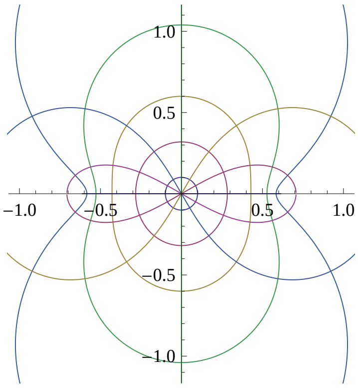

Рис. 11. $f(z) = \frac{z}{1+2z^2/3}$

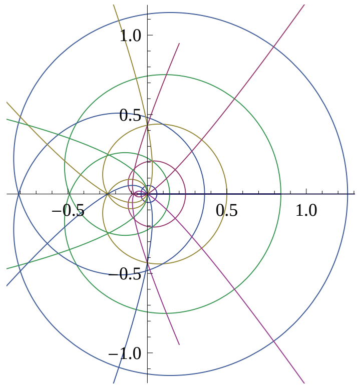

Рис. 12. $f(z) = z^2 - z/2$.

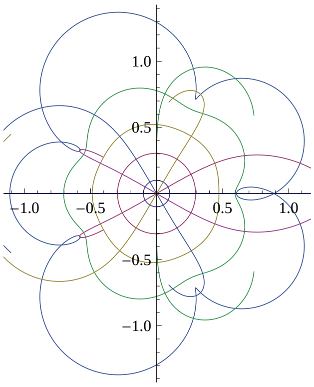

Рис. 13. $f(z) = \frac{\sin z}{1+z^5/2}$

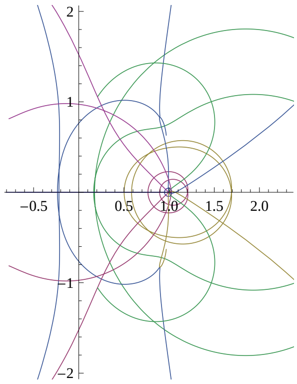

Рис. 14. $f(z) = \frac{\cos 2z}{1+\sin 4z/12}$.

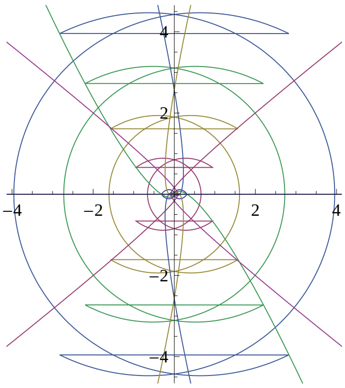

Рис. 15. $f(z) = z\ln(100z^2)$

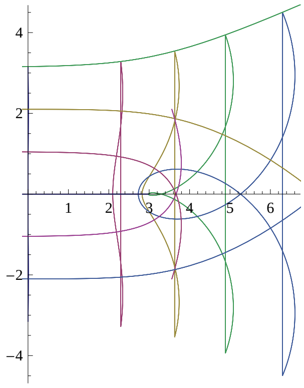

Рис. 16. $f(z) = \cos z \ln(100z^2)$.

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного* . – М.: Наука, 1985, – с. 368-374, 377-390.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 2. – с. 187, 192–199.