Комплексная функция

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Функция комплексного переменного. Экспонента с чисто мнимым показателем. Показательная форма комплексного числа. Гармонические колебания в электрических цепях. Разложение многочлена на множители.

Анимация комплексного отображения.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Комплексные функции, решение комплексных уравнений, разложение многочленов на множители в системе *Mathematica*.

12 мая 2012 г.

Комплексная функция является расширением понятия функции действительного аргумента так же, как комплексное число является расширением понятия действительного числа. Комплексные функции широко используются в технических дисциплинах. С их помощью, например, электрические контуры с гармоническими колебаниями рассчитываются так же просто, как контуры постоянного тока. Внутри самой математики комплексные функции способствуют более глубокому пониманию природы даже привычных для нас действительных функций, выявляя важные связи между различными классами функций, которые в действительной области совсем не очевидны.

1 Определение комплексной функции

Комплексной переменной назовем величину $z = x + jy$, где x, y — действительные переменные, j — мнимая единица. Величина x называется ***действительной***, а y — ***мнимой*** частью комплексной переменной.

Пусть D — некоторое множество на комплексной плоскости (z), G — некоторое множество на комплексной плоскости (w). ***Функцией комплексного***

переменного, или ***комплексной функцией*** называется правило, по которому каждому элементу $z \in D$ ставятся в соответствие элементы $w \in G$.

Сразу видно, чем отличается определение комплексной функции от определения действительной функции. В соответствие ставится не *единственный* элемент множества G, а неизвестно сколько. В дальнейшем мы увидим, что на самом деле может ставиться в соответствие и один элемент, и несколько, и даже бесконечное множество! В первом случае функция называется ***однозначной***, во втором — ***многозначной***, в третьем — ***бесконечнозначной***.

Комплексная функция обозначается $w = f(z)$, $w = w(z)$, или $f : D \to G$, или $D \xrightarrow{f} G$. Множество D называется ***областью определения***, или ***областью существования*** функции, а множество $E = \{w : w = f(z)\}$ — ***множеством*** ее ***значений***. Как и для действительной функции, множества E и G не обязательно совпадают. Переменная z называется ***аргументом***, или ***независимой переменной***, а переменная w — ***зависимой переменной***, или ***функцией***.

Поскольку переменная w — комплексная, то и ее можно записать в алгебраической форме: $w = u + jv$. Величину u называют ***действительной частью***, а величину v — ***мнимой частью*** комплексной функции. Так как w является функцией z, то и u, v — тоже функции z и можно записать, что $w(z) = u(z) + jv(z)$. Но и z является функцией, она зависит от x и y, поэтому самой развернутой будет такая запись:

$$f(z) = w(z) = u(x, y) + jv(x, y).$$

Что нам показывает последняя формула? Прежде всего то, что комплексная функция является функцией двух действительных переменных. Еще нетрудно понять, что построить график такой функции невозможно. Построить можно только графики отдельно действительной и отдельно мнимой части комплексной функции. Это будут некоторые поверхности над и/или под комплексной плоскостью z.

На рис. 1 графики действительной и мнимой частей функции $w = z^2$ показаны в виде таких поверхностей. Так как $z^2 = (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + j2xy$, то $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$. Таким образом, упомянутые поверхности являются гиперболическими параболоидами, по-разному расположенными в пространстве. На первом из них красной линией показана знакомая всем парабола $w = x^2$, которая получается из функции $w = z^2$, когда комплексная переменная является действительной: $z = x$ (при $y = 0$).

Вместо того, чтобы строить сложное трехмерное изображение поверхности, можно представить ее в виде линий уровня на плоскости. Линия уровня — это кривая, на которой функция двух переменных сохраняет одно и то же

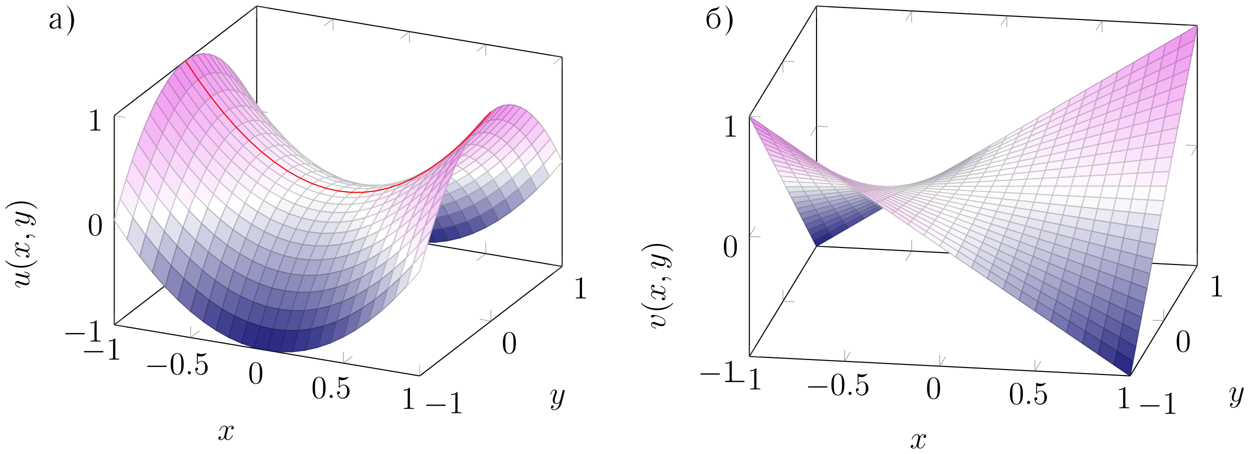


Рис. 1. Графики функций а) $u(x, y) = \operatorname{Re} z^2$, б) $v(x, y) = \operatorname{Im} z^2$.

значение. В различных разделах физики такие линии носят название изобар, изохор, изотерм, эквипотенциалей и т. п. На рис. 2 действительная и мнимая части функции $w = z^2$ изображены в виде линий уровня. Смысловую нагрузку несет и цвет: более светлые тона соответствуют бóльшим значениям функции, более темные — меньшим.

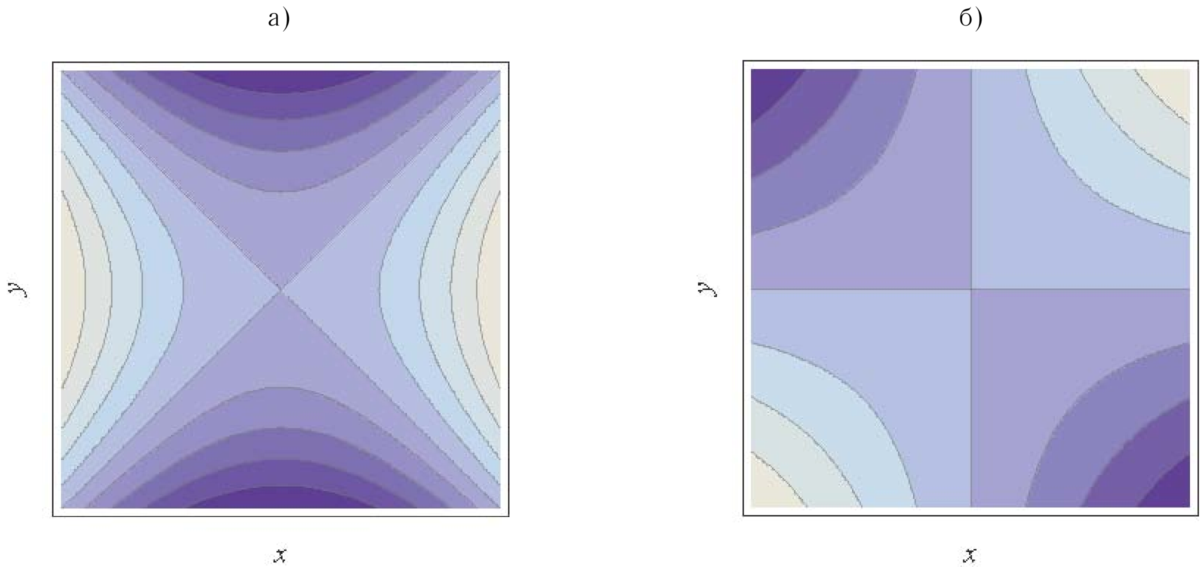


Рис. 2. Линии уровня функций: а) $u(x, y) = \operatorname{Re} z^2$, б) $v(x, y) = \operatorname{Im} z^2$.

Если считать комплексную функцию отображением, то можно строить прообразы и образы, соответствующие этому отображению, в комплексных плоскостях z и w и таким образом наглядно его изучать. Первый кадр анимационного рис. 3 показывает, как координатная сетка плоскости z отображается функцией z^2 на плоскость w. Прямые превращаются в параболы (голубые прямые — в голубые параболы, коричневатые — в коричневатые).

Анимация позволяет дополнительно изучить, как направление движения на одной комплексной плоскости отвечает направлению движения на другой. Рис. состоит из пяти клипов: щелкнув мышкой на нем пять раз (один раз вначале и по разу после окончания каждого клипа), можно увидеть, как, например, движение по прямоугольнику в области аргументов превращается в движение по криволинейному контуру в области значений, а движение по окружности хотя и остается таковым, но происходит в два раза быстрее и радиус у окружности становится другим.

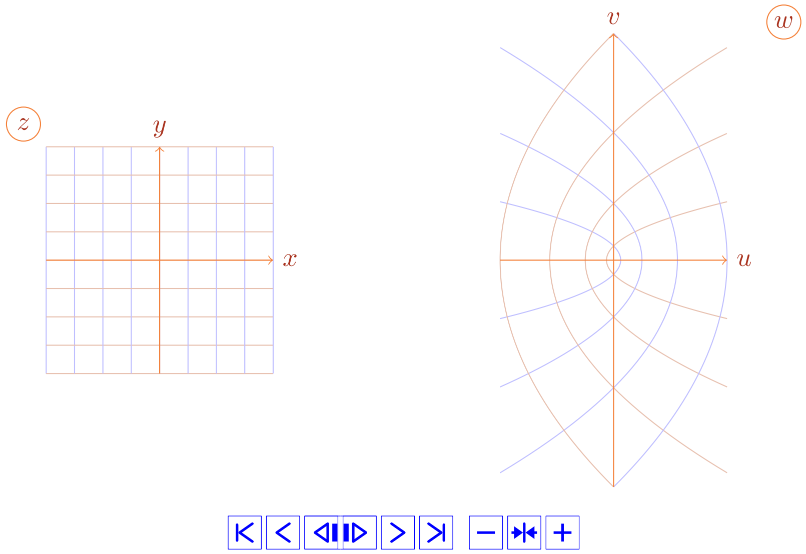


Рис. 3. Однозначное комплексное отображение.

В Приложении[1)] приведены примеры задания и изображения комплексных функций в системе *Mathematica*.

2 Экспонента с чисто мнимым показателем

Вначале изучим довольно простую, но очень важную комплексную функцию, которая возникает, например, при рассмотрении второго замечательного предела: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Прежде всего заметим, что справедлива формула $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$. Действительно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \left\langle y=\frac{a}{x}\right\rangle = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{a}{y}} = \left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^a = e^a.$$

Поэтому можно записать, что

$$e^{jy} = \lim_{n\to\infty}\left(1+j\frac{y}{n}\right)^n. \tag{1}$$

Обозначим $s_n = 1 + j\frac{y}{n}$ и найдем[†] отдельно пределы модуля и аргумента по-

[†]Доказательство Мышова М.С.

следовательности s_n^n, используя эквивалентность $\operatorname{arctg}\frac{y}{n} \sim \frac{y}{n}$ при $\frac{y}{n} \to 0$:

$$\lim_{n\to\infty}|s_n^n| = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{y^2}{n^2}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{y^2}\cdot\frac{y^2}{n^2}\cdot\frac{n}{2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{y^2}}\right)^{\frac{y^2}{2n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{y^2}{2n}} = e^0 = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\arg s_n^n = \lim_{n\to\infty}\left(n\operatorname{arctg}\frac{y}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{y/n}{1/n} = y.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} s_n^n = \cos y + j\sin y.$$

Это равенство и равенство (1) приводят к формуле

$$\boxed{e^{jy} = \cos y + j\sin y.}$$

которая называется ***формулой Эйлера***. Она связывает экспоненту с чисто мнимым показателем с тригонометрическими функциями синуса и косинуса и, как мы убедимся на следующей лекции, порождает все основные элементарные функции комплексного переменного.

Из формулы Эйлера при $y = \pi$ получается замечательное равенство, в котором фигурируют самые популярные в математике числа:

$$e^{\pi j} = -1.$$

Как видите, в комплексном анализе экспонента может быть отрицательной.

С ее помощью можно компактно записывать комплексные числа:

$$z = \rho e^{j\varphi}, \tag{2}$$

где ρ — модуль, φ — аргумент комплексного числа, так как в тригонометрической форме $z = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi)$. Запись комплексного числа в виде (2) называется ***показательной формой*** комплексного числа.

Действия над комплексными числами $z = \rho e^{j\varphi}$, $z_1 = \rho_1 e^{j\varphi_1}$, $z_2 = \rho_2 e^{j\varphi_2}$ в показательной форме тоже выглядят более компактными:

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= \rho_1 e^{j\varphi_1}\rho_2 e^{j\varphi_2} = \rho_1\rho_2 e^{j(\varphi_1+\varphi_2)},\\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1 e^{j\varphi_1}}{\rho_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2}e^{j(\varphi_1-\varphi_2)},\\
z^n &= \rho^n e^{j\varphi n},\\
\sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{\rho}e^{j\frac{\varphi+2k\pi}{n}},\ k = 0, 1, \ldots, n-1.
\end{aligned}$$

Но, главное, что эти действия теперь являются простыми следствиями свойств экспоненты (правда, это еще предстоит постулировать) и их не надо специально запоминать. Именно в такой форме комплексные числа используются в технических приложениях.

3 Гармонические колебания в электрических цепях

Для расчета электрических цепей синусоидального тока и напряжения, как правило, используют комплексную экспоненту. Например, синусоидальный ток $i\left(t\right) = i_0 \sin\left(\omega t + \varphi\right)$ включают в комплексный ток вида

$$i_*\left(t\right) = i_0\left[\cos\left(\omega t + \varphi\right) + j\sin\left(\omega t + \varphi\right)\right] = i_0 e^{j(\omega t + \varphi)},$$

где i_0 – амплитуда тока, ω – его частота, φ – фаза.

Синусоидальное напряжение $u\left(t\right) = u_0 \sin\left(\omega t + \varphi\right)$ включают в комплексное напряжение:

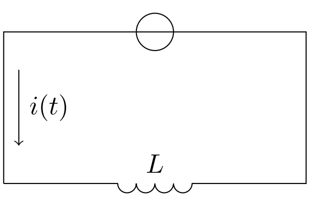
$$u_*\left(t\right) = u_0\left[\cos\left(\omega t + \varphi\right) + j\sin\left(\omega t + \varphi\right)\right] = u_0 e^{j(\omega t + \varphi)},$$

где u_0 – амплитуда напряжения.

Далее вводят комплексные сопротивления. Пассивное сопротивление Z_R, или резистор, остается действительной величиной: $Z_R = R$, где R – величина сопротивления элемента. Индуктивное комплексное сопротивление имеет вид $Z_L = j\omega L$, где L – индуктивность элемента. Емкостным комплексным сопротивлением считают $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$, где C – емкость элемента.

Отметим, что закон Ома и законы Кирхгофа остаются справедливыми для комплексных токов, напряжений и сопротивлений. Так что с помощью комплексной экспоненты можно рассчитывать электрические цепи с гармоническими колебаниями точно так же, как цепи постоянного тока.

Пример 1. *Для синусоидального тока рассчитать напряжение в цепи, содержащей только индуктивность:*

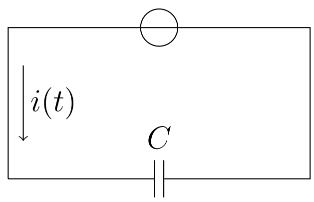


Решение. Ток представим в виде $i_*\left(t\right) = i_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$, а индуктивное сопротивление – в виде $Z_L = j\omega L$. По закону Ома

$$u_*\left(t\right) = i_*\left(t\right) Z_L = i_0 e^{j(\omega t + \varphi)} j\omega L = i_0\omega L e^{j(\omega t + \varphi)} e^{j\frac{\pi}{2}} = i_0\omega L e^{j\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)},$$

так как $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$. Мы видим, что амплитуда напряжения равна $i_0\omega L$, т.е. получается из амплитуды тока умножением на ωL, частота остается прежней, а *фаза напряжения* *опережает фазу тока* на 90°. Это объясняется тем, что э.д.с., наведенная в катушке, препятствует прохождению тока, и он отстает по фазе от напряжения на 90°.

Пример 2. *Решить такую же задачу, когда цепь содержит только емкостный элемент:*

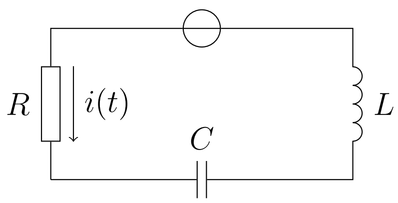


Решение. Ток по-прежнему равен $i_*(t) = i_0 e^{j(\omega t+\varphi)}$, а активное сопротивление теперь такое: $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$. Снова по закону Ома

$$u_*(t) = i_*(t)\, Z_C = i_0 e^{j(\omega t+\varphi)} \frac{1}{j\omega C} = \frac{i_0}{\omega C} e^{j(\omega t+\varphi)} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{i_0}{\omega C} e^{j\left(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right)},$$

так как $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$. Амплитуда напряжения $\frac{i_0}{\omega C}$ получается из амплитуды тока делением на ωC, частота не изменяется, а *фаза напряжения отстает от фазы тока* на 90°. Дело в том, что напряжение определяется зарядом конденсатора, который накапливается под действием тока, который действует *раньше*, чем накопится заряд.

Пример 3. *Найти напряжение в цепи, изображенной на рис.*



Решение. Ток возьмем таким же, как в предыдущем примере. Полное сопротивление цепи при последовательном соединении элементов равно

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right),$$

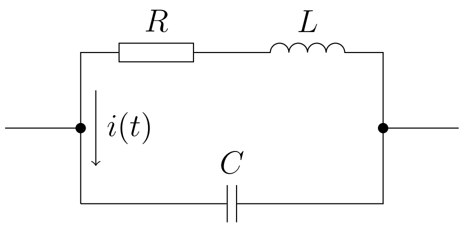
$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \ \arg Z = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Следовательно, напряжение в цепи выражается формулой

$$u_*(t) = i_*(t)\, Z = i_0 e^{j(\omega t+\varphi)} |Z|\, e^{j \arg Z} = i_0 |Z|\, e^{j(\omega t+\varphi+\arg Z)}.$$

Мы видим, что амплитуда напряжения $i_0 |Z|$ будет наименьшей, когда модуль комплексного сопротивления будет наименьшим. Последнее достигается при $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$, или $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Тогда амплитуда тока в цепи будет иметь по закону Ома наибольшее значение. Это явление носит название *резонанса*, а частота $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ называется *резонансной.* □

Найдите самостоятельно[2)]напряжение в цепи, изображенной на рис.:



4 Разложение многочлена на множители

Пусть задан многочлен степени n от комплексного переменного z с комплексными коэффициентами:

$$P_n(z) = \alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n.$$

Понятно, что такой многочлен является однозначной функцией. Как и для действительных многочленов, комплексное число a называется ***корнем*** многочлена, если $P_n(a) = 0$.

Теорема 1 (Безу). *При делении многочлена $P_n(z)$ на $z - a$ остаток равен $P_n(a)$.*

Доказательство. При делении многочлена $P_n(z)$ на $z - a$ частным будет многочлен $P_{n-1}(z)$, а остатком — некоторое число R:

$$P_n(z) = (z - a) P_{n-1}(z) + R.$$

Подставив в это равенство $z = a$, получим $R = P_n(a)$.

Следствие 1. *Если a — корень многочлена $P_n(z)$, то остаток от деления равен 0 и*

$$P_n(z) = (z - a) P_{n-1}(z).$$

Алгебраическим уравнением степени n называется уравнение вида

$$P_n(z) = 0.$$

Теорема 2 (Основная теорема алгебры). *Всякое алгебраическое уравнение (многочлен) имеет по крайней мере один комплексный корень.*

Доказывать эту теорему не будем.

Теорема 3. *Всякий многочлен $P_n(z)$ степени n можно представить в виде произведения линейных множителей вида $z - a$ и множителя, равного коэффициенту при z^n.*

Доказательство. По предыдущей теореме $P_n(z)$ имеет по крайней мере один корень a_1, тогда по следствию из теоремы Безу

$$P_n(z) = (z - a_1)\, P_{n-1}(z)\,.$$

Но $P_{n-1}(z)$ – тоже многочлен и у него в силу основной теоремы алгебры тоже имеется по крайней мере один корень a_2. Следовательно,

$$P_n(z) = (z - a_1)(z - a_2)\, P_{n-2}(z)\,.$$

Продолжая и так далее, придем к равенству

$$P_n(z) = (z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_n)\, P_0.$$

Но P_0 – константа, которая может быть только α_0. □

Таким образом, имеет место разложение

$$P_n(z) = \alpha_0 (z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_n)\,. \tag{3}$$

Очевидно, что все числа a_1, a_2, …, a_n являются корнями многочлена $P_n(z)$, и в то же время никакое число a, не равное ни одному из этих чисел, не может быть корнем этого могочлена, так как $(a - a_i) \neq 0$.

В Приложении показано, что разложение (3) единственно[3)].

Из предыдущей теоремы вытекает следующее очевидное утверждение.

Теорема 4. *Многочлен n-й степени имеет не более, чем n, различных корней.*

В разложении (3) объединим все одинаковые множители в виде одной степени:

$$P_n(z) = \alpha_0 (z - a_1)^{k_1} (z - a_2)^{k_2} \ldots (z - a_m)^{k_m}\,, \tag{4}$$

где $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$ и все a_1, a_2, …, a_m – разные. Корень a_i называется ***кратным корнем многочлена***, именно k_i-кратным. Например, $z = 2$ – двукратный корень многочлена $(z - 1)(z - 2)^2$.

Если многочлен имеет корень a кратности k, то считается, что многочлен имеет *k одинаковых корней a*. Поэтому справедлива

Теорема 5. *Каждый многочлен n-й степени имеет ровно n комплексных корней.*

Прежде чем перейти к следующим утверждениям, заметим, что справедливы равенства (доказать самостоятельно)[4)]:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},\ \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2},$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ \overline{z^m} = \overline{z}^m,\ m \in \mathbb{N},$$

где черточка означает знак комплексного сопряжения. Эти равенства приводят к утверждению для многочлена с действительными коэффициентами:

$$P_n(\overline{z}) = \overline{P_n(z)}. \tag{5}$$

которое означает, что многочлен от комплексно-сопряженного переменного равен многочлену, комплексно-сопряженному данному многочлену.

Теорема 6. *Если многочлен $P_n(z)$ имеет действительные коэффициенты и комплексный корень $a+jb$, то он имеет и комплексно-сопряженный корень $a-jb$.*

Доказательство. Так как $a+jb$ — корень многочлена, то справедливо равенство $P_n(a+jb) = M+jN$, $M=N=0$. Но тогда из равенства (5) следует, что $P_n(a-jb) = M-jN = 0$, потому что $M=N=0$. Значит, $a-jb$ — тоже корень многочлена. □

Итак, в разложение (4) комплексные корни входят комплексно-сопряженными парами.

Считая, что $z = x+j0 = x$ — действительная переменная, перемножим линейные множители, содержащие такую комплексно-сопряженную пару:

$$\begin{gathered}[x-(a+jb)]\,[x-(a-jb)] = [(x-a)-jb]\,[(x-a)+jb] = \\ = (x-a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q,\end{gathered}$$

где $p=-2a$, $q=a^2+b^2$. Получили квадратный трехчлен с действительными коэффициентами.

Последний результат и разложение (4) позволяют сформулировать итоговую теорему.

Теорема 7. *Многочлен от действительной переменной с действительными коэффициентами может быть представлен в виде произведения линейных множителей и квадратичных множителей, не имеющих действительных корней:*

$$P_n(x) = \alpha_0 (x-a_1)^{k_1} \ldots (x-a_m)^{k_m} \left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1} \ldots \left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s}, \tag{6}$$

$k_1 + \ldots k_m + 2l_1 + \ldots + 2l_s = n.$

В Приложении[5)] показано, как *Mathematica* находит корни комплексных уравнений и многочленов и раскладывает многочлены на множители.

Приложение

[1]) Комплексные функции задаются в системе *Mathematica* так же, как и действительные с помощью оператора присваивания. Зададим, например, функцию $w = z + \frac{1}{z}$:

```
w[z_] := z + 1/z
```

Представим ее в алгебраической форме, считая, как обычно, что $z = x + jy$, но не забывая, что в системе *Mathematica* мнимая единица обозначается символом `I`:

```
ComplexExpand[With[z = x + I y, w[z]]]
```

$$\mathrm{x} + \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2} + \mathrm{I}\left(\mathrm{y} - \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}\right)$$

Здесь появился новый оператор `With`, который в общем случае имеет вид

$$\mathtt{With[\{x = x_0,\ y = y_0,\ \ldots\},\ expr]}.$$

Он преобразует выражение `expr`, подставляя вместо символов `x`, `y`, … символы x_0, y_0, … .

Найдем отдельно действительную и мнимую части заданной нами функции:

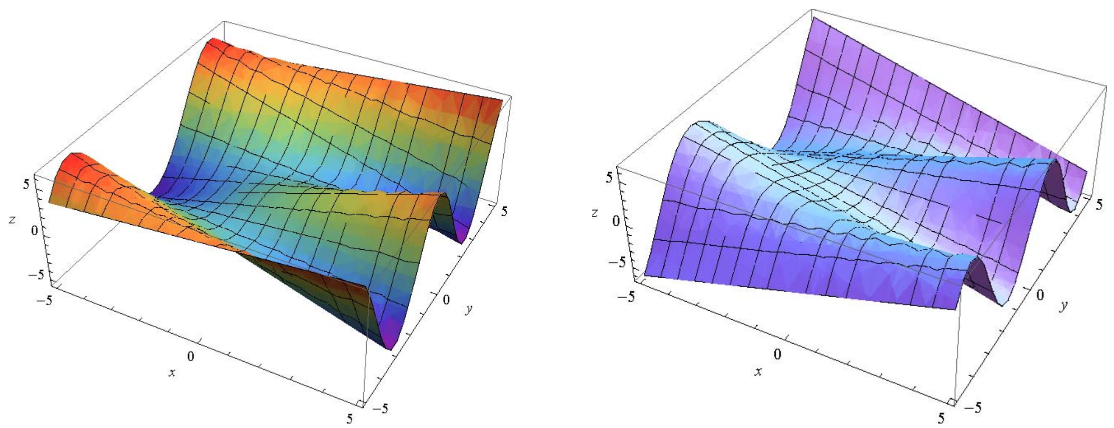
```
ComplexExpand[Re[With[z = x + I y, w[z]]]]
ComplexExpand[Im[With[z = x + I y, w[z]]]]
```

$$\mathrm{x} + \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}$$

$$\mathrm{y} - \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}$$

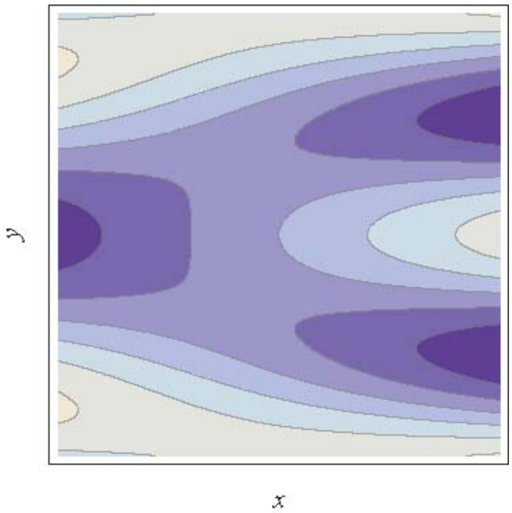
Mathematica предоставляет широкие возможности для изображения комплексных функций различными способами. Построим, например, графики действительной и мнимой частей функции $w = (x + jy)e^{jy}$:

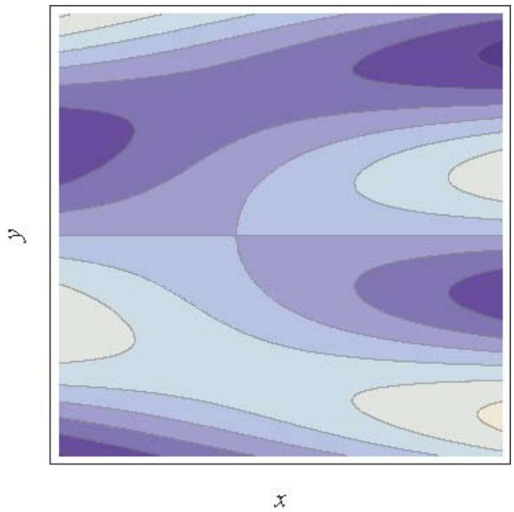
```
Plot3D[Re[(x + I y)e^(I y)], {x,-5,5}, {y,-5,5}]
Plot3D[Im[(x + I y)e^(I y)], {x,-5,5}, {y,-5,5}]
```



С помощью оператора `ContourPlot` можно получить графическое изображение тех же функций в виде линий уровня на плоскости:

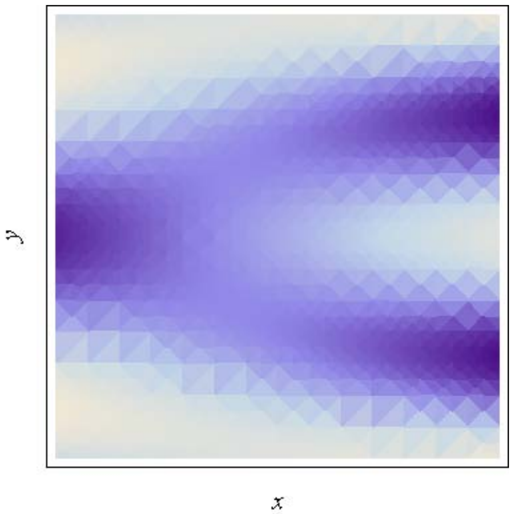
```
ContourPlot[Re[(x + I y)e^(I y)], {x,-5,5}, {y,-5,5}]
ContourPlot[Im[(x + I y)e^(I y)], {x,-5,5}, {y,-5,5}]
```

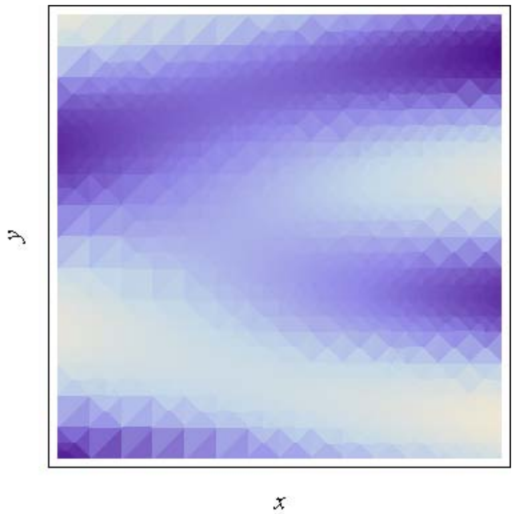




Линии уровня делают изображение дискретным, представляя его в виде объединения конечного числа областей разного цвета. Вместо этого изменение цвета можно сделать непрерывным, получая графики, на которых увеличение или уменьшение значений функции выглядит постепенным. Такое изображение обеспечивает оператор `DensityPlot`, аргументы которого аналогичны аргументам оператора `ContourPlot`. Для функции $w = (x + jy)e^{jy}$, рассмотренной выше, построенные системой *Mathematica* картинки выглядят следующим образом:

```
DensityPlot[Re[(x + I y)e^{I y}], {x,-5,5}, {y,-5,5}]
DensityPlot[Im[(x + I y)e^{I y}], {x,-5,5}, {y,-5,5}]
```





Наконец, с помощью оператора `ParametricPlot` можно получить преобразование прямоугольной координатной сетки на плоскости z в криволинейную сетку на плоскости w так же, как это показано на рис. 3. Проиллюстрируем данную возможность на примере функции $w = z + \frac{1}{z}$ (первое изображение на рис. 4):

```
ParametricPlot[ With[z = u + I v, {Re[z + 1/z], Im[z + 1/z]}],
     {u,-1/2,1/2}, {v,-1/2,1/2}, PlotRange → 5]
```

В заключение отметим, что в последнее время появились методы изображения комплексных функций и в четырехмерном пространстве переменных x, y, u, v. Правда, геометрическими координатами являются только три из этих координат (на выбор), которые обеспечивают

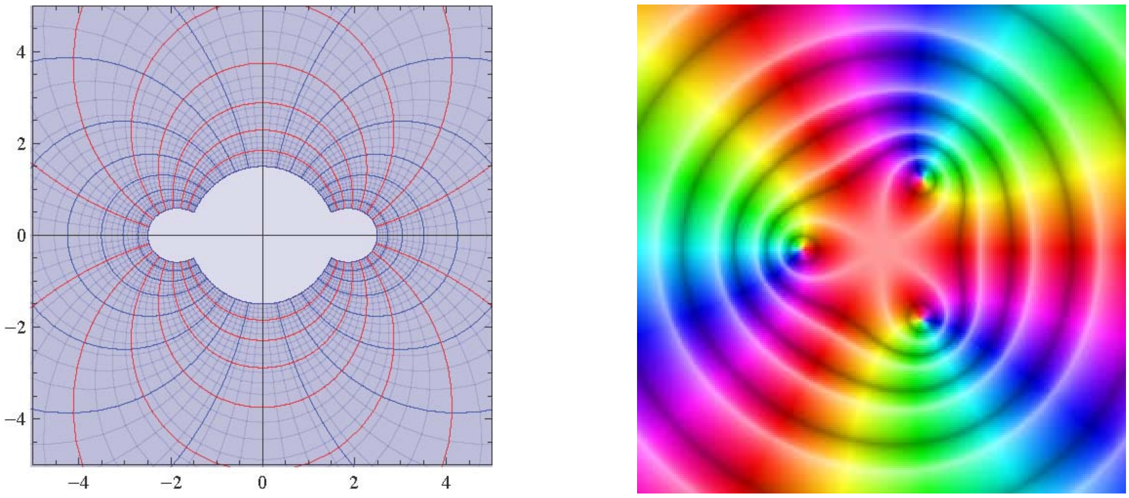


Рис. 4.

изображение функции в виде некоторого геометрического объекта, а четвертая координата изменяет цвет или насыщенность цвета при раскраске объекта. Полезность такого представления комплексной функции спорна, но картинки получаются красивыми. В этом стиле вторая картинка на рис. 4 изображает функцию $w = z^3$ — целиком!

[2] Цепь содержит две параллельные ветви: одну с емкостью, а другую — с резистором и индуктивностью. Полное сопротивление цепи Z находится из уравнения для параллельного соединения резисторов:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{1/(j\omega C)} + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{1 - \omega^2 LC + j\omega CR}{R + j\omega L},$$

$$Z = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR} = \frac{(R + j\omega L)(1 - \omega^2 LC - j\omega CR)}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2} =$$

$$= \frac{R(1 - \omega^2 LC) + \omega^2 LCR + j\left[\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega CR^2\right]}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2} =$$

$$= \frac{R + j\omega\left[L(1 - \omega^2 LC) - CR^2\right]}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}.$$

Мы не будем выписывать формулу для напряжения $u_*(t)$. Заметим только, что и в данном случае резонанс будет наблюдаться, когда мнимая часть Z равна нулю:

$$L\left(1 - \omega^2 LC\right) - CR^2 = 0,\ L - C\left(\omega^2 L^2 + R^2\right) = 0.$$

Если считать, что $\omega^2 L^2 \gg R^2$, то уравнение можно упростить:

$$1 - \omega^2 LC = 0,$$

и получить, что резонансная частота равна $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

[3] Пусть имеется два разложения вида (3):

$$a_0(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\ldots(z - \alpha_n) = b_0(z - \beta_1)(z - \beta_2)\ldots(z - \beta_n),$$

причем, обе части равенства равны $P_n(z)$. Ясно, что должно выполняться $a_0 = b_0$, так как это — коэффициент при x^n.

Поскольку левая часть равна нулю при $z = \alpha_1$, то в правой части один из сомножителей должен обратиться в нуль при $z = \alpha_1$, пусть это будет $z - \beta_1$. Следовательно, $\alpha_1 = \beta_1$, и на $z - \alpha_1$ обе части можно сократить. Точно так же доказывается, что $\alpha_2 = \beta_2$ и т. д. При этом, если, скажем, $\alpha_2 = \alpha_1$, то и $\beta_2 = \beta_1 = \alpha_1$, т. е. каждый из линейных множителей встречается в обеих частях одинаковое число раз, следовательно, оба разложения тождественны.

4) Пусть $z_1 = a_1 + jb_1$, $z_2 = a_2 + jb_2$, $z = a + jb$. Тогда

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{a_1 + jb_1 + a_2 + jb_2} = \overline{a_1 + a_2 + j\,(b_1 + b_2)} = a_1 + a_2 - j\,(b_1 + b_2) =$$
$$= (a_1 - jb_1) + (a_2 - jb_2) = \overline{z}_1 + \overline{z}_2,$$
$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{a_1 + jb_1 - a_2 - jb_2} = \overline{a_1 - a_2 + j\,(b_1 - b_2)} = a_1 - a_2 - j\,(b_1 - b_2) =$$
$$= (a_1 - jb_1) - (a_2 - jb_2) = \overline{z}_1 - \overline{z}_2,$$
$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(a_1 + jb_1)\,(a_2 + jb_2)} = \overline{a_1 a_2 - b_1 b_2 + j\,(a_1 b_2 + a_2 b_1)} =$$
$$= a_1 a_2 - b_1 b_2 - j\,(a_1 b_2 + a_2 b_1) = (a_1 - jb_1)\,(a_2 - jb_2) = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2,$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2}\right)} = \overline{\left[\frac{(a_1 + jb_1)\,(a_2 - jb_2)}{a_2^2 + b_2^2}\right]} = \overline{\left[\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + j\,(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}\right]} =$$
$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 - j\,(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{(a_1 - jb_1)\,(a_2 + jb_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 - jb_1}{a_2 - jb_2} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},$$
$$\overline{z^m} = \overline{z \cdot z^{m-1}} = \overline{z} \cdot \overline{z^{m-1}} = \overline{z} \cdot \overline{z} \cdot \overline{z^{m-2}} = \ldots = \underbrace{\overline{z} \cdot \overline{z} \cdot \ldots \cdot \overline{z}}_{m} = \overline{z}^m.$$

5) Решение алгебраических и другого типа уравнений *Mathematica* выполняет с помощью оператора `Solve[eqns,vars,elims]`, где `eqns` — список уравнений, `vars` — список неизвестных, `elims` — список параметров, относительно которых решать систему уравнений не следует. Третий список используется редко, а второй можно опустить, если в системе уравнений столько же, сколько и неизвестных. Решим классическое квадратное уравнение:

```
Solve[x^2 + 5 x + 6 == 0]
{{x → -3}, {x → -2}}
```

Mathematica может решать уравнения и в общем виде:

```
Solve[a x^2 + b x + c == 0, x]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}, \left\{x \to \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}\right\}$$

Правда, анализ общего решения не проводится и каким будет ответ, например, при $a = 0$ *Mathematica*, не сообщает. Если требуется найти все возможные решения, лучше обратиться к уже известному вам оператору `Reduce`, который рассмотрит различные частные случаи решения:

```
Reduce[a x^2 + b x + c == 0, x]
```

$$\left(a \neq 0\ \&\&\ \left(x == \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ ||\ x == \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right)\ ||$$
$$\left(a == 0\ \&\&\ b \neq 0\ \&\&\ x == -\frac{c}{b}\right)\ ||\ (c == 0\ \&\&\ b == 0\ \&\&\ a == 0)$$

Решим систему линейных уравнений:

```
Solve[{3 x + 7 y == 5, 2 x + 5 y == -4}]
{{x → 53, y → -22}}
```

Иногда ответ можно увидеть в непривычной форме:

```
Solve[x^2 + x + 1 == 0]
```

$\{\{x \to -(-1)^{1/3}\}, \{x \to (-1)^{2/3}\}\}$

На самом деле ничего странного в этом нет. *Mathematica* устроена так, чтобы свои ответы выдавать преимущественно в комплексной форме, причем, если ответ является значением какой-нибудь комплексной многозначной функции, то выдается только ее главное значение. Поэтому ответ $x = -(-1)^{1/3}$ следует понимать как главное значение кубического корня из -1, взятое со знаком минус. Действительно,

$$-(-1)^{1/3} = -(\cos\pi + j\sin\pi)^{1/3} = -\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + j\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right), \; k = 0, 1, 2.$$

Главному значению корня соответствует $k = 0$, и мы получаем, что корнем уравнения является число

$$-(-1)^{1/3} = -\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Для второго корня находим, что главному значению выражения $x = (-1)^{2/3}$ соответствует комплексное число

$$\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right)^2 = \cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mathematica охотно подтвердит наши рассуждения:

```
ComplexExpand[-(-1)^(1/3)]
```

$-\frac{1}{2} - \frac{I\sqrt{3}}{2}$

```
ComplexExpand[(-1)^(2/3)]
```

$-\frac{1}{2} + \frac{I\sqrt{3}}{2}$

Впрочем, можно заранее позаботиться о том, чтобы получать ответы в привычной для нас форме. Для этого достаточно предварить обращение к оператору `Solve` обращением к оператору `ComplexExpand`:

```
ComplexExpand[Solve[x^2 + x + 1 == 0]]
```

$\left\{\left\{x \to -\frac{1}{2} - \frac{I\sqrt{3}}{2}\right\}, \left\{x \to -\frac{1}{2} + \frac{I\sqrt{3}}{2}\right\}\right\}$

Если уравнение корней не имеет, то оператор дает такой ответ:

```
Solve[{ x == 1 , x == 2}]
{}
```

Если решений бесконечно много, получаем

```
Solve[ x == x]
{{}}
```

Уравнения с комплексными коэффициентами *Mathematica* решает так же легко, как и с действительными:

```
Solve[x^2 - 2 I x + 3 == 0]
```

$\{\{x \to -I\}, \{x \to 3I\}\}$

Решим что-нибудь посложнее:

```
Solve[x^7 - 4 x^6 - 2 x^5 + 30 x^4 - 47 x^3 + 50 x^2 - 116 x + 120 == 0]
```

$$\left\{\{x \to -3\},\ \{x \to 2\},\ \{x \to 2\},\ \{x \to 2 - I\},\ \{x \to 2 + I\},\ \left\{x \to \frac{1}{2}\left(-1 - I\sqrt{7}\right)\right\},\ \left\{x \to \frac{1}{2}\left(-1 + I\sqrt{7}\right)\right\}\right\}$$

Мы видим, что, если уравнение имеет несколько одинаковых корней, *Mathematica* перечисляет их все, в нашем случае дважды выдается корень $x = 2$.

Чтобы по формуле (6) разложить многочлен на произведение линейных и квадратичных множителей, не имеющих действительных корней, применяется оператор `Factor`:

```
Factor[x^7 - 4 x^6 - 2 x^5 + 30 x^4 - 47 x^3 + 50 x^2 - 116 x + 120]
```

$$(-2 + x)^2\ (3 + x)\ (5 - 4\ x + x^2)\ (2 + x + x^2)$$

А, если требуется получить, как в формуле (3), разложение многочлена только на линейные, пусть даже и комплексные множители? Тогда можно найти корни многочлена с помощью оператора `Solve` и определить, какие радикалы используются в записи корней. Например, корни рассматриваемого многочлена записываются с помощью $\sqrt{7}$. Конечно, присутствует в записи и мнимая единица. Далее оператору `Factor` следует указать, что он может использовать в разложении этот корень и мнимую единицу. Это достигается с помощью опции `Extension`:

```
Factor[x^7 - 4 x^6 - 2 x^5 + 30 x^4 - 47 x^3 + 50 x^2 - 116 x + 120,
    Extension → {√7, I}]
```

$$\frac{1}{4}(-I + \sqrt{7} - 2\ I\ x)(I + \sqrt{7} + 2\ I\ x)\ (-2 + x)^2\ ((-2 - I) + x)\ ((-2 + I) + x)\ (3 + x)$$

Обратную операцию, т. е. раскрытие скобок в многочлене, разложенном в произведение множителей, выполняет оператор `Expand`:

```
Expand[%]
```

$$120 - 116\ x + 50\ x^2 - 47\ x^3 + 30\ x^4 - 2\ x^5 - 4\ x^6 + x^7$$

Литература

[1] Свешников А.Г, Тихонов А.Н. *Теория функций комплексной переменной.* — М.: Наука, 1970, — с. 21-24, 26-31.

[2] Пискунов Н.С. *Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов.* — М.: Наука, 1985. Т. 1. — с. 213—222.