Основные элементарные комплексные функции

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Определение основных элементарных функций комплексного переменного: экспоненты, логарифма, общей показательной и общей степенной функций, тригонометрических и обратных тригонометрических функций, гиперболических и обратных гиперболических функций. Гиперболические функции действительного аргумента, их свойства и графики.

Анимация движения по гиперболе.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Особенности использования основных элементарных комплексных функций в системе *Mathematica*.

14 мая 2012 г.

В комплексном анализе, как и в действительном, существует ядро функций, на основе которых конструируются другие функции. Функции ядра (в обоих анализах) даже названия имеют одинаковые: логарифмическая функция, синус, косинус и т. п. Всю эту группу функций называют основными элементарными функциями. Ими мы и будем сейчас заниматься.

Правда, комплексные функции из упомянутой группы устроены намного сложнее и непривычнее действительных. Это не случайно: функции действительного аргумента являются частными случаями соответствующих комплексных функций.

Вы увидите, что все основные комплексные элементарные функции получаются из одной-единственной функции — комплексной экспоненты, порождающей их все. А в результате и степенная, и показательная, и тригонометрические, и обратные им функции действительного аргумента оказываются связанными между собой, выражающимися друг через друга.

1 Комплексная экспонента

Итак, дадим определение прародительнице всех основных элементарных функций комплексного аргумента, комплексной экспоненте.

Эта функция является обобщением экспоненты с чисто мнимым показателем[†]. Когда мы записывали с ее помощью действия над комплексными числами в показательной форме, было отмечено, что в этих действиях просматривается основное свойство экспоненты: при умножении экспонент их показатели должны складываться. Чтобы это свойство действительно выполнялось, ***комплексную экспоненту*** определяют следующим образом:

$$w = e^z = e^{x+jy} = e^x e^{jy} = e^x\left(\cos y + j\sin y\right),$$

$z = x + jy$. При $x = 0$ получаем формулу Эйлера. Мы уже видели, что комплексная экспонента может принимать отрицательные значения. Но она еще и периодична с периодом $2\pi j$:

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi j} &= e^{x+jy+2\pi j} = e^{x+j(y+2\pi)} = e^x\left[\cos\left(y+2\pi\right) + j\sin\left(y+2\pi\right)\right] = \\ &= e^x\left(\cos y + j\sin y\right) = e^z. \end{aligned}$$

Комплексная экспонента является однозначной функцией, так как каждому значению z ставится в соответствие единственное значение w. При $y = 0$ получаем $e^z = e^x$, то есть обычную экспоненту действительного переменного.

На рис. 1 представлены графики действительной и мнимой частей экспоненты. Черной линией показан график обычной, действительной экспоненты $w = x^2$. В сечении графика действительной части плоскостью $x = 5$ видна косинусоида $e^5\cos y$, а в аналогичном сечении мнимой части – синусоида $e^5\sin y$.

Изучим свойства комплексной экспоненты, учитывая, что основное свойство экспоненты для экспоненты с чисто мнимым показателем выполняется. Пусть $z_1 = x_1 + jy_1$, $z_2 = x_2 + jy_2$.

1°. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

Действительно,

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{x_1+jy_1+x_2+jy_2} = e^{x_1+x_2}e^{j(y_1+y_2)} = e^{x_1}e^{x_2}e^{jy_1}e^{jy_2} = \\ &= e^{x_1+jy_1}e^{x_2+jy_2} = e^{z_1}e^{z_2}. \end{aligned}$$

2°. $e^{z_1-z_2} = e^{z_1}/e^{z_2}$.

Доказательство аналогично:

$$e^{z_1-z_2} = e^{x_1+jy_1-x_2-jy_2} = e^{x_1-x_2}e^{j(y_1-y_2)} = \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}}\cdot\frac{e^{jy_1}}{e^{jy_2}} =$$

[†] Лекция «Комплексная функция»

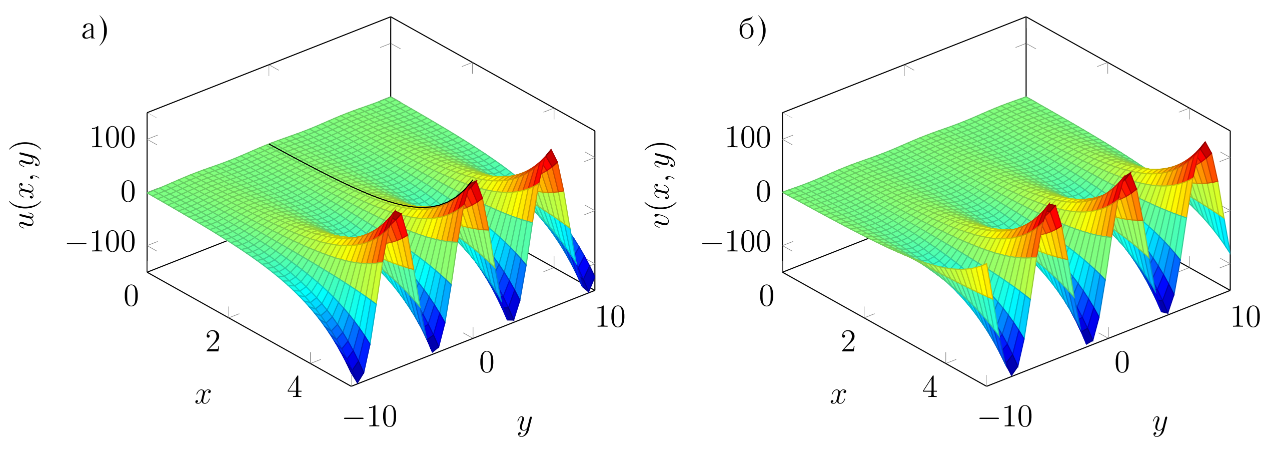

Рис. 1. Графики функций а) $u(x,y) = \operatorname{Re} e^z$, б) $v(x,y) = \operatorname{Im} e^z$.

$$= \frac{e^{x_1+jy_1}}{e^{x_2+jy_2}} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}.$$

3.° $(e^z)^m = e^{mz}$.

Простое следствие первого свойства.

Таким образом, с комплексной показательной функций можно обращаться так же, как с обычной показательной функцией действительного переменного.

2 Комплексный логарифм

Комплексный натуральный ***логарифм*** определяют как функцию, обратную комплексной экспоненте. Если $z = e^w$, то комплексный натуральный логарифм z должен быть равен w. Обозначение: $w = \operatorname{Ln} z$. Таким образом, чтобы найти $\operatorname{Ln} z$ надо решить уравнение $z = e^w$ относительно w.

Пусть $w = u + jv$, $z = \rho e^{j\varphi}$. Тогда указанное уравнение приобретает вид $\rho e^{j\varphi} = e^{u+jv} = e^u e^{jv}$ и фвктически становится системой уравнений: $\rho = e^u$, $e^{j\varphi} = e^{jv}$. Первое уравнение решается однозначно: $u = \ln\rho$, причем, $\ln\rho$ — обычный действительный логарифм. Второе уравнение имеет бесчисленное множество решений: $v = \varphi + 2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Поэтому комплексный натуральный логарифм является бесконечнозначной функцией:

$$\operatorname{Ln} z = \ln\rho + j\left(\varphi + 2k\pi\right) = \ln|z| + j\left(\arg z + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Так что теперь даже логарифм действительного числа имеет бесконечно много значений: $\operatorname{Ln} 1 = \ln 1 + 2k\pi j = 2k\pi j$, $k \in \mathbb{Z}$, так как $1 = \cos 0 + j\sin 0$. Проверка: $e^{2k\pi j} = \cos 2k\pi + j\sin 2k\pi = 1$.

Часто используют только однозначную часть этого логарифма при $k = 0$, которую называют ***главным значением*** логарифма и обозначают

$$\ln z = \ln \rho + j\varphi = \ln |z| + j \arg z.$$

Комплексный логарифм существует для любого комплексного числа, кроме нуля, в том числе и для отрицательных чисел: $\ln(-1) = \ln|-1| + j\pi = j\pi$, так как $-1 = \cos\pi + j\sin\pi$.

Нетрудно видеть, что при $\varphi = 0$ ($z = x + jy$ находится на положительной действительной полуоси) комплексный логарифм превращается в действительный: $\ln z = \ln|z| = \ln|x| = \ln x$.

3 Показательная функция

Общая показательная функция определяется с помощью комплексной экспоненты и логарифма:

$$w = a^z = e^{z \operatorname{Ln} a},\ a \neq 0.$$

Бесконечнозначность логарифма делает бесконечнозначной и общую показательную функцию. Правда, часто рассматривают только ее главное значение

$$w = e^{z \ln a},\ a \neq 0,$$

которое уже однозначно.

Вычислим главное значение степени отрицательного числа:

$$(-1)^\pi = e^{\pi \ln(-1)} = e^{\pi \cdot j\pi} = e^{j\pi^2}.$$

Найдем все значения следующей степени ($j = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}$):

$$j^j = e^{j \operatorname{Ln} j} = e^{j\left(\ln|j| + j\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Интересно, что результат лежит в действительной области.

4 Степенная функция

Степенная функция определяется аналогично показательной:

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z},\ z \neq 0.$$

Она тоже является бесконечнозначной, а однозначным является ее главное значение:

$$w = z^a = e^{a \ln z},\ z \neq 0.$$

4.1 Степенная функция с натуральным показателем

В этом случае степенная функция упрощается до известной уже нам формулы Муавра:

$$w = z^n = e^{n\,\mathrm{Ln}\,z} = e^{n(\ln|z|+j(\arg z+2k\pi))} = e^{n\ln|z|+j(n\arg z+2kn\pi)} =$$
$$= e^{n\ln|z|}\left[\cos\left(n\arg z+2kn\pi\right)+j\sin\left(n\arg z+2kn\pi\right)\right] =$$
$$= |z|^n\left[\cos\left(n\arg z\right)+j\sin\left(n\arg z\right)\right],\ k\in\mathbb{Z}.$$

Видим, что степенная функция с натуральным показателем однозначна. Выполняя возведение в натуральную степень в алгебраической форме, нетрудно выделить действительную и мнимую части степени. Например, для функции $w = z^3$ получаем, что

$$z^3 = (x+jy)^3 = x^3+3x^2jy+3xj^2y^2+j^3y^3 = x^3+3x^2jy-3xy^2-jy^3 =$$
$$= x^3-3xy^2+j\left(3x^2y-y^3\right).$$

Таким образом, $u(x,y) = x^3-3xy^2$, $v(x,y) = 3x^2y-y^3$.

4.2 Корень n-й степени

Используя комплексную степенную функцию, мы можем заново получить формулу корня n-й степени:

$$w = \sqrt[n]{z} = z^{1/n} = e^{\frac{\mathrm{Ln}\,z}{n}} = e^{\frac{\ln|z|+j(\arg z+2k\pi)}{n}} = e^{\frac{\ln|z|}{n}}e^{j\frac{\arg z+2k\pi}{n}} =$$
$$= \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+j\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right],\ k\in\mathbb{Z}. \qquad (1)$$

Мы уже знаем, что последнее выражение имеет только n различных значений, например, достаточно взять $k = 0, 1, \dots, n-1$. Следовательно, функция $\sqrt[n]{z}$ многозначна, а, точнее, n-значна. Так, $\sqrt{z}$ — двузначная функция, $\sqrt[3]{z}$ — трехзначная и т.д.

Главным значением комплексного корня считается

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z}{n}+j\sin\frac{\arg z}{n}\right),$$

которое получается из формулы (1) при $k = 0$.

В лекции «Комплексные числа» нами был выбран следующий диапазон изменения главного значения аргумента комплексного числа:

$$-\pi < \arg z \le \pi,$$

поэтому

$$-\frac{\pi}{n} < \arg\sqrt[n]{z} \le \frac{\pi}{n}.$$

5 Тригонометрические функции

5.1 Синус

На прошлой лекции была получена формула Эйлера $e^{jy} = \cos y + j\sin y$, которую можно переписать так: $e^{-jy} = \cos y - j\sin y$. Сложим эти две формулы и из получившегося равенства найдем косинус:

$$\cos y = \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2}. \tag{2}$$

Если же эти формулы вычесть, то можно найти синус:

$$\sin y = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j}. \tag{3}$$

Формула (3) является основанием, чтобы следующим образом определить комплексный тригонометрический синус:

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}. \tag{4}$$

Если в выражении $z = x + jy$ положить $y = 0$, то комплексный синус превратится в обычный, действительный синус (3).

Периодичность синуса сохраняется (с учетом периодичности комплексной экспоненты с периодом $2\pi j$):

$$\sin(z + 2\pi) = \frac{e^{j(z+2\pi)} - e^{-j(z+2\pi)}}{2j} = \frac{e^{j(x+jy+2\pi)} - e^{-j(x+jy+2\pi)}}{2j} =$$
$$= \frac{e^{-y+jx+2\pi j} - e^{y-jx-2\pi j}}{2j} = \frac{e^{-y+jx} - e^{y-jx}}{2j} =$$
$$= \frac{e^{j(x+jy)} - e^{-j(x+jy)}}{2j} = \sin z.$$

Можно показать, что 2π — основной период синуса.

Нетрудно видеть, что синус — нечетная функция.

5.2 Косинус

Исходя из формулы (2) косинус комплексного переменного определяют как

$$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}. \tag{5}$$

При $\operatorname{Im} z = 0$ получаем обычный косинус, см. (2). Синус и косинус комплексного переменного могут принимать непривычные для нас значения:

$$\cos j = \frac{e^{-1} + e}{2} > 1.$$

Косинус – четная функция и, как и синус, – 2π-периодическая.

Если равенство (4) умножить на j и сложить с (5), получим формулу

$$e^{jz} = \cos z + j \sin z,$$

которая тоже называется ***формулой Эйлера***.

5.3 Тангенс и котангенс

Эти функции определяются обычным образом:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \ \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Все комплексные тригонометрические функции являются однозначными в силу однозначности комплексной экспоненты.

Формулы тригонометрии остаются справедливыми и в комплексной области. Например, используя формулу Эйлера, имеем

$$\cos(z_1 + z_2) + j \sin(z_1 + z_2) = e^{j(z_1+z_2)} = e^{jz_1} e^{jz_2} =$$
$$= (\cos z_1 + j \sin z_1)(\cos z_2 + j \sin z_2) =$$
$$= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 + j(\sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1).$$

Заменяя z_1 на $-z_1$, а z_2 на $-z_2$ и используя свойства четности синуса и косинуса, найдем, что

$$\cos(z_1 + z_2) - j \sin(z_1 + z_2) =$$
$$= \cos z_1 \cos z_1 - \sin z_1 \sin z_2 - j(\sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1).$$

Складывая и вычитая полученные равенства, придем к формулам сложения

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \tag{6}$$
$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1. \tag{7}$$

Из них следуют остальные формулы сложения, приведения, двойных углов и т. д. Из формул приведения вытекает π-периодичность тангенса и котангенса.

Если в равенстве (6) положить $z_1 = z$, $z_2 = -z$, получим еще одну важную формулу, а именно основное тригонометрическое тождество:

$$1 = \cos^2 z + \sin^2 z.$$

Обратные тригонометрические функции рассмотрены в Приложении[1)].

6 Гиперболические функции

Сейчас мы познакомимся с новыми для вас функциями, которые называются гиперболическими и которые так же важны, как тригонометрические, и обладают схожими с ними свойствами. Правда, графики этих функций нисколько не напоминают графики тригонометрических функций, но ведь и графическое изображение эллипса не похоже на изображение гиперболы, хотя уравнения отличаются только одним знаком!

И гиперболические, и обратные им функции мы с этого момента заносим в список основных элементарных функций как для области комплексного, так и для области действительного аргумента.

6.1 Комплексный аргумент

Возьмем за основу определение тригонометрического синуса и назовем ***гиперболическим синусом*** комплексную функцию вида

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Как видите, формулы тригонометрического и гиперболического синусов очень похожи.

Аналогично определяются и остальные гиперболические функции. ***Гиперболический косинус***:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

гиперболический тангенс:

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},$$

гиперболический котангенс:

$$\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Эти определения дают возможность сразу же установить связь между гиперболическими и тригонометрическими функциями:

$$\operatorname{sh} z = -j \sin jz,\ \operatorname{ch} z = \cos jz,\ \operatorname{th} z = -j \operatorname{tg} jz,\ \operatorname{cth} z = j \operatorname{ctg} jz,$$
$$\sin z = -j \operatorname{sh} jz,\ \cos z = \operatorname{ch} jz,\ \operatorname{tg} z = -j \operatorname{th} jz,\ \operatorname{ctg} z = j \operatorname{cth} jz.$$

Гиперболические функции удобно использовать для выделения действительной и/или мнимой части какой-либо тригонометрической или гиперболической функции:

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} = \frac{e^{j(x+jy)} - e^{-j(x+jy)}}{2j} = \frac{1}{2j}\left(e^{-y}e^{jx} - e^{y}e^{-jx}\right) =$$
$$= \frac{1}{2j}\left[e^{-y}\left(\cos x + j\sin x\right) - e^{y}\left(\cos x - j\sin x\right)\right] =$$

$$= -j\left(-\cos x\frac{e^y - e^{-y}}{2} + j\sin x\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) =$$
$$= \sin x \operatorname{ch} y + j\cos x \operatorname{sh} y,$$

где $z = x + jy$. Следовательно, $\operatorname{Re}\sin z = \sin x \operatorname{ch} y$, $\operatorname{Im}\cos z = \cos x \operatorname{sh} y$.

Для гиперболических функций справедливы многие тождества, аналогичные тригонометрическим. Например,

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1, \tag{8}$$

потому что

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = \cos^2 jz - (-j\sin jz)^2 = \cos^2 jz + \sin^2 jz = 1.$$

Из теорем сложения (6) и (7) для тригонометрических синуса и косинуса получаем теоремы сложения для гиперболических аналогов этих функций:

$$\begin{aligned}
\cos(jz_1 + jz_2) &= \cos jz_1 \cos jz_2 - \sin jz_1 \sin jz_2,\\
\operatorname{ch}(z_1 + z_2) &= \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 - (j\operatorname{sh} z_1)(j\operatorname{sh} z_2),\\
\operatorname{ch}(z_1 + z_2) &= \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(jz_1 + jz_2) &= \sin jz_1 \cos jz_2 + \sin jz_2 \cos jz_1,\\
j\operatorname{sh}(z_1 + z_2) &= j\operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_1 + j\operatorname{sh} z_2 \operatorname{ch} z_2,\\
\operatorname{sh}(z_1 + z_2) &= \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_1 + \operatorname{sh} z_2 \operatorname{ch} z_2.
\end{aligned}$$

Из этих формул уже можно вывести формулы двойного, половинного аргументов и др.

Отметим еще несколько очевидных, но важных свойств:

$$\operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z,\ \operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z,\ \ \operatorname{th}(-z) = -\operatorname{th} z,\ \operatorname{cth}(-z) = -\operatorname{cth} z.$$

В силу свойств комплексной экспоненты все гиперболические функции однозначны, а гиперболический косинус является $2\pi j$-периодической функцией.

6.2 Действительный аргумент

Чтобы объяснить, почему гиперболические функции получили такое название, перейдем из области комплексного в область действительного переменного, положив $y = 0$ в выражении $z = x + jy$. Тогда рассматриваемые функции станут такими:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^x}{2},\ \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},\ \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}. \tag{9}$$

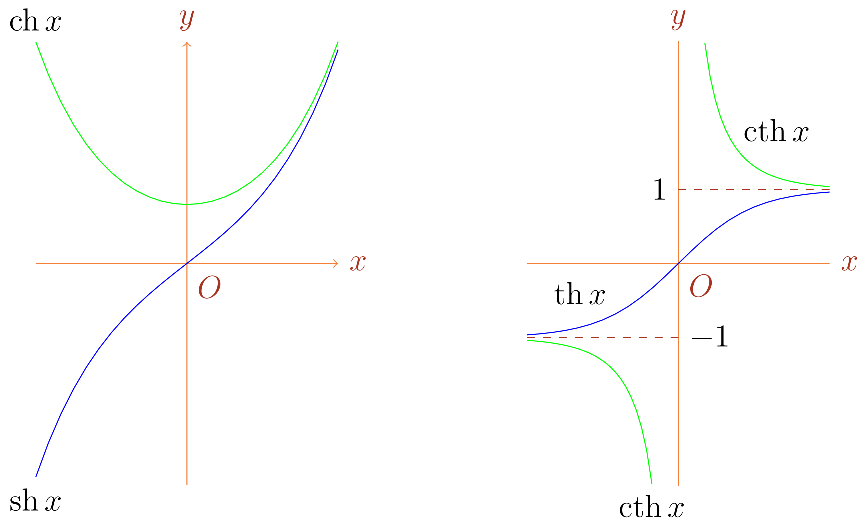

Рис. 2. Гиперболические функции действительного переменного.

Их графики представлены на рис. 2 Никакой периодичностью эти функции не обладают (даже гиперболический косинус), но их свойства удивительно напоминают свойства тригонометрических функций!

Кстати, о свойствах. Первое же из них делает понятным название этих функций. Я имею в виду свойство (8), которое для действительного переменного принимает вид

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1. \tag{10}$$

Рассмотрим параметрически заданную функцию

$$x = \pm a \operatorname{ch} t,\ y = b \operatorname{sh} t;\ -\infty < t < \infty;\ a, b > 0. \tag{11}$$

Тогда

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 \operatorname{ch}^2 t}{a^2} - \frac{b^2 \operatorname{sh}^2 t}{b^2} = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t \equiv 1.$$

Следовательно, функция (11) описывает гиперболу (см. анимационный рис. 3)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

поэтому функции (9) и названы гиперболическими. Отметим, что знаку плюс перед a в первой из формул (11) соответствует правая ветвь гиперболы, а знаку минус — левая.

По аналогии с основным тригонометрическим тождеством равенство (10) иногда называют *основным гиперболическим тождеством*.

Из доказанных уже свойств комплексных гиперболических функций сразу получаются соответствующие свойства их действительных тезок. Используя доказанные свойства, можно продолжить процесс доказательства новых

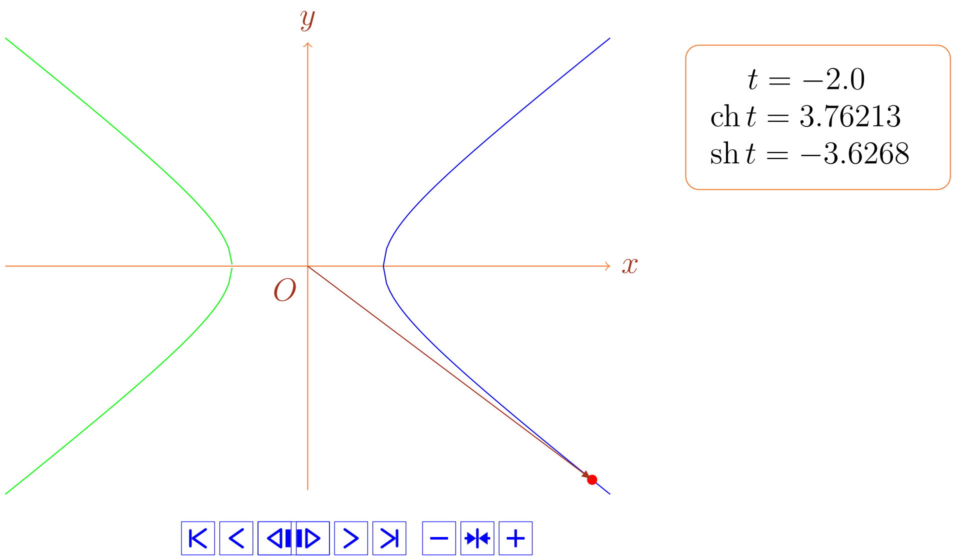

Рис. 3. Движение по гиперболе.

свойств и в конце концов получить, например, список, приведенный в Приложении[2)].

Обратные гиперболические функции тоже представлены в Приложении[3)].

7 Понятие элементарной функции

Все рассмотренные нами функции комплексного аргумента: степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические, гиперболические и обратные им функции, в комплексном анализе называются ***основными элементарными*** функциями.

На базе этих функций элементарная комплексная функция определяется так же, как для функций действительного аргумента. Именно, комплексная функция называется ***элементарной***, если она получена из констант и основных элементарных комплексных функций с помощью конечного числа арифметических действий и конечного числа суперпозиций.

Понятие суперпозиции, или сложной функции, определяется для комплексной функции так же, как для действительной.

В Приложении[4)] рассмотрены определения основных элементарных комплексных функций и особенности работы с ними в системе *Mathematica*.

Приложение

1) Обратные тригонометрические функции

Арксинус и арккосинус

Комплексная функция арксинуса определяется как решение уравнения $z = \sin w$ относительно w. Обозначим $t = e^{jw}$ и воспользуемся определением синуса:

$$z = \frac{e^{jw} - e^{-jw}}{2j} = \frac{t - 1/t}{2j},\ t^2 - 2jzt - 1 = 0.$$

Решим это уравнение относительно t:

$$t = jz + \sqrt{1 - z^2},\ e^{jw} = jz + \sqrt{1 - z^2},\ jw = \mathrm{Ln}\left(jz + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

Следовательно, ***арксинус*** определяется формулой

$$w = \mathrm{Arcsin}\, z = \frac{1}{j}\,\mathrm{Ln}\left(jz + \sqrt{1 - z^2}\right). \qquad (\Pi 1)$$

Перед корнем взят знак плюс, так как комплексный квадратный корень сам двузначен. Его двузначность и многозначность логарифма приводят к многозначности арксинуса.

Для вычисления главного значения арксинуса, $\arcsin z$, перед корнем берут знак плюс (выбирая главное значение квадратного корня) и используют главное значение логарифма. Например, $\arcsin 2 = \frac{1}{j}\ln\left(2j + \sqrt{1-4}\right) = \frac{1}{j}\ln\left(2j + \sqrt{-3}\right)$. Далее надо взять из двух значений корня $\sqrt{-3} = \pm j\sqrt{3}$ значение со знаком плюс и продолжить вычисления, учитывая, что $j = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}$:

$$\arcsin 2 = \frac{1}{j}\ln\left(2j + j\sqrt{3}\right) = \frac{1}{j}\ln\left(j\left(2+\sqrt{3}\right)\right) = \frac{1}{j}\left(\ln j + \ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{j}\left(\ln 1 + j\frac{\pi}{2} + \ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - j\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Аналогично находят значения арксинуса и для более привычных для нас значений аргумента:

$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{1}{j}\ln\left(\frac{j}{2} + \sqrt{1 - \frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{j}\ln\left(\frac{j}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{j}\ln\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{j}\left(\ln 1 + j\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Можно показать, что при $z = x + j0 = x$, то есть, когда z является действительным числом, главное значение арксинуса находится в пределах

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2},\ |x| \le 1.$$

Решением уравнения $z = \cos w$ определяется функция ***арккосинуса***:

$$z = \frac{e^{jw} + e^{-jw}}{2} = \frac{t + 1/t}{2},\ t^2 - 2zt + 1 = 0,\ t = e^{jw},$$

$$t = z + \sqrt{z^2 - 1},\ e^{jw} = z + \sqrt{z^2 - 1},\ jw = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$w = \operatorname{Arccos} z = \frac{1}{j} \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

Главное значение арккосинуса, $\arccos z$, определяется главным значением логарифма и главным значением корня. Когда z является действительным числом x, главное значение арккосинуса имеет следующий диапазон изменения:

$$0 \le \arccos x \le \pi, \ |x| \le 1.$$

Не вдаваясь в детали правомерности наших действий, докажем, что арксинус и арккосинус связаны простым равенством

$$\operatorname{Arcsin} z + \operatorname{Arccos} z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Действительно, так как

$$z + j\sqrt{1 - z^2} = j\left(-jz + \sqrt{1 - z^2}\right) = \frac{j\left(-j^2 z^2 + 1 - z^2\right)}{jz + \sqrt{1 - z^2}} = \frac{j}{jz + \sqrt{1 - z^2}},$$

то

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arcsin} z + \operatorname{Arccos} z &= \frac{1}{j} \operatorname{Ln}\left(jz + \sqrt{1 - z^2}\right) + \frac{\operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)}{j} = \\
&= \frac{1}{j} \operatorname{Ln}\left(jz + \sqrt{1 - z^2}\right) + \frac{\operatorname{Ln}\left(z + j\sqrt{1 - z^2}\right)}{j} = \\
&= \frac{1}{j}\left[\operatorname{Ln}\left(jz + \sqrt{1 - z^2}\right) + \operatorname{Ln} \frac{j}{jz + \sqrt{1 - z^2}}\right] = \\
&= \frac{1}{j} \operatorname{Ln} j = \frac{1}{j} \cdot \frac{\pi j}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

При $k = 0$ получаем равенство для главных значений:

$$\arcsin z + \arccos z = \frac{\pi}{2}.$$

Арктангенс и арккотангенс

Арктангенс определяется уравнением $z = \operatorname{tg} w$:

$$z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{j} \cdot \frac{e^{jw} - e^{-jw}}{e^{jw} + e^{-jw}} = \frac{1}{j} \cdot \frac{e^{2jw} - 1}{e^{2jw} + 1} = \frac{1}{j} \cdot \frac{t - 1}{t + 1}, \ t = e^{2jw},$$

$$jzt + jz = t - 1, \ t = \frac{1 + jz}{1 - jz}, \ e^{2jw} = \frac{1 + jz}{1 - jz}, \ 2jw = \operatorname{Ln} \frac{1 + jz}{1 - jz},$$

$$w = \operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2j} \operatorname{Ln} \frac{1 + jz}{1 - jz}. \tag{П2}$$

Главное значение арктангенса, $\operatorname{arctg} z$, определяется главным значением логарифма. Можно показать, что для действительного $z = x$ это значение находится в следующих пределах:

$$-\frac{\pi}{2} \le \operatorname{arctg} x \le \frac{\pi}{2}.$$

Из уравнения $z = \operatorname{ctg} w$ определяется ***арккотангенс***:

$$z = \frac{\cos z}{\sin z} = j \cdot \frac{e^{jw} + e^{-jw}}{e^{jw} - e^{-jw}} = j \cdot \frac{e^{2jw} + 1}{e^{2jw} - 1} = j \cdot \frac{t + 1}{t - 1}, \ t = e^{2jw},$$

$$zt - z = jt + j,\ t = \frac{j+z}{-j+z} = \frac{jz-1}{jz+1},\ e^{2jw} = \frac{jz-1}{jz+1},\ 2jw = \operatorname{Ln}\frac{jz-1}{jz+1},$$
$$w = \operatorname{Arcctg} z = \frac{1}{2j}\operatorname{Ln}\frac{jz-1}{jz+1} = \frac{1}{2j}\operatorname{Ln}\frac{z+j}{z-j}. \qquad (\text{П}3)$$

Нетрудно видеть, что

$$\operatorname{Arcctg} z = \operatorname{Arctg}\frac{1}{z},$$

так как

$$\operatorname{Arctg}\frac{1}{z} = \frac{1}{2j}\operatorname{Ln}\frac{1+j/z}{1-j/z} = \frac{1}{2j}\operatorname{Ln}\frac{z+j}{z-j} = \operatorname{Arcctg} z.$$

Кроме того,

$$\operatorname{Arctg} z + \operatorname{Arcctg} z = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \qquad (\text{П}4)$$

потому что

$$\operatorname{Arctg} z + \operatorname{Arcctg} z = \frac{1}{2j}\operatorname{Ln}\frac{1+jz}{1-jz} + \frac{1}{2j}\operatorname{Ln}\frac{jz-1}{jz+1} =$$
$$= \frac{1}{2j}\operatorname{Ln}(-1) = \frac{1}{2j}\cdot j\,(\pi + 2\pi k) = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Определение главного значения арккотангенса на основе формулы (П3) приходит в противоречие с традиционным определением в отечественной математике арккотангенса действительного аргумента. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Предположим, что мы будем считать главным значением арккотангенса, $\operatorname{arcctg} z$, значение $\operatorname{Arcctg} z$ для главного значения логарифма (подобно тому, как это делалось для арктангенса).

Такое определение сразу приводит к справедливости равенства

$$\operatorname{arcctg} z = \operatorname{arctg}\frac{1}{z}, \qquad (\text{П}5)$$

которое доказывается аналогично случаю многозначных функций.

Далее, вычислим некоторые главные значения арктангенса и арккотангенса:

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{2j}\ln\frac{1+j}{1-j} = \frac{1}{2j}\ln\frac{1+2j-1}{2} = \frac{1}{2j}\ln j = \frac{1}{2j}\cdot\frac{\pi}{2}j = \frac{\pi}{4},$$
$$\operatorname{arcctg} 1 = \frac{1}{2j}\ln\frac{1+j}{1-j} = \frac{\pi}{4},$$
$$\operatorname{arctg}(-1) = \frac{1}{2j}\ln\frac{1-j}{1+j} = -\frac{1}{2j}\ln\frac{1+j}{1-j} = -\frac{\pi}{4},$$
$$\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{1}{2j}\ln\frac{-1+j}{-1-j} = \frac{1}{2j}\ln\frac{1-j}{1+j} = -\frac{\pi}{4}.$$

Мы видим, что последнее значение арккотангенса противоречит традиционному значению $\operatorname{arcctg}(-1) = 3\pi/4$. Кроме того, $\operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arcctg}(-1) = -\frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2}$. Значит, и вообще

$$\operatorname{arctg} z + \operatorname{arcctg} z \neq \frac{\pi}{2}.$$

К этому следует добавить, что при $z = x$ так определенное главное значение арккотангенса принадлежит диапазону

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arcctg} z \leq \frac{\pi}{2},$$

а сам он разрывен, см. рис. 4.

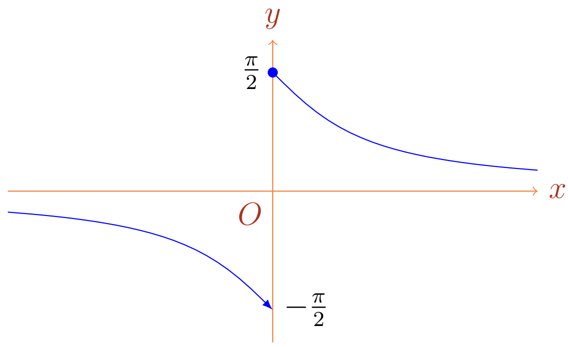

Рис. 4. Разрывный арккотангенс.

Тем не менее данное определение главного значения арккотангенса имеет ту же основу, что и у других комплексных обратных функций (главное значение логарифма), и, например, система символьных вычислений *Mathematica*, ставящая во главу угла методы комплексного анализа, использует именно такое определение.

Перейдем к другому определению этой функции, призванному согласовать комплексный арккотангенс с обычным, действительным. Для этого можно воспользоваться равенством (П4) при $k = 0$ и главном значении арктангенса:

$$\operatorname{arcctg} z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} z.$$

Тем самым сразу обеспечивается выполнение равенства

$$\operatorname{arctg} z + \operatorname{arcctg} z = \frac{\pi}{2}.$$

Можно показать, что в этом случае для действительного $z = x$ диапазон изменения главного значения арккотангенса традиционен:

$$0 \le \operatorname{arcctg} z \le \pi,$$

и вообще мы получаем известный со школьной скамьи арккотангенс. Очевидно, что теперь $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}$. Правда,

$$\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4} \ne -\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(-1) = \operatorname{arctg}\frac{1}{-1},$$

и, следовательно, в общем случае равенство (П5) не выполняется.

Видимо, поддерживая традиции функций действительного переменного, система символьных вычислений *Maple* использует второе определение главного значения арккотангенса.

Рассмотрение двух определений $\operatorname{arcctg} z$ показывает, что каждое из них имеет свои преимущества и недостатки, так что, какое из них выбрать для решения тех или иных задач, диктуется этими самыми задачами, доступными системами символьных вычислений и предпочтениями исследователя.

[2)] Формулы сложения:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x, &&\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x,\\
&\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, &&\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,\\
&\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}, &&\operatorname{th}(x-y) = \frac{\operatorname{th} x - \operatorname{th} y}{1 - \operatorname{th} x \operatorname{th} y},
\end{aligned}$$

$$\operatorname{cth}(x+y)=\frac{1+\operatorname{cth}x\operatorname{cth}y}{\operatorname{cth}x+\operatorname{cth}y},\qquad \operatorname{cth}(x-y)=\frac{1-\operatorname{cth}x\operatorname{cth}y}{\operatorname{cth}x-\operatorname{cth}y}.$$

Формулы двойного аргумента:

$$\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x,\qquad \operatorname{ch}2x=\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x,$$
$$\operatorname{th}2x=\frac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2x},\qquad \operatorname{cth}2x=\frac{1+\operatorname{cth}^2x}{2\operatorname{cth}x}.$$

Формулы половинного аргумента:

$$\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{ch}x-1}{2},\qquad \operatorname{ch}^2\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{ch}x+1}{2},$$
$$\operatorname{th}^2\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1},\qquad \operatorname{cth}^2\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{ch}x+1}{\operatorname{ch}x-1}.$$

Замена сложения умножением:

$$\operatorname{sh}x+\operatorname{sh}y=2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2},\qquad \operatorname{sh}x-\operatorname{sh}y=2\operatorname{sh}\frac{x-y}{2}\operatorname{ch}\frac{x+y}{2},$$
$$\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}y=2\operatorname{ch}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2},\qquad \operatorname{ch}x-\operatorname{ch}y=2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{sh}\frac{x-y}{2},$$
$$\operatorname{th}x\pm\operatorname{th}y=\frac{\operatorname{sh}(x\pm y)}{\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y},\qquad \operatorname{cth}x\pm\operatorname{cth}y=\frac{\operatorname{sh}(y\pm x)}{\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y}.$$

Замена умножения сложением:

$$\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y=\frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(x+y)-\operatorname{ch}(x-y)\right],$$
$$\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sh}(x+y)+\operatorname{sh}(x-y)\right],$$
$$\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y=\frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(x+y)+\operatorname{ch}(x-y)\right].$$

В следующей таблице показано, как гиперболические функции, расположенные в первом столбце выражаются через гиперболические функции в других столбцах.

$\operatorname{sh}x$		$\pm\sqrt{\operatorname{ch}^2x-1}$	$\dfrac{\operatorname{th}x}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2x}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2x-1}}$
$\operatorname{ch}x$	$\sqrt{\operatorname{sh}^2x+1}$		$\dfrac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2x}}$	$\pm\dfrac{\operatorname{cth}x}{\sqrt{\operatorname{cth}^2x-1}}$
$\operatorname{th}x$	$\dfrac{\operatorname{sh}x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2x+1}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{\operatorname{ch}^2x-1}}{\operatorname{ch}x}$		$\dfrac{1}{\operatorname{cth}x}$
$\operatorname{cth}x$	$\dfrac{\sqrt{\operatorname{sh}^2x+1}}{\operatorname{sh}x}$	$\pm\dfrac{\operatorname{ch}x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2x-1}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{th}x}$	

Правило знаков для формул в таблице очень простое: если $x>0$, перед корнем следует взять знак плюс, а если $x<0$ — знак минус.

3) Обратные гиперболические функции

Ареасинус и ареакосинус

Обратные гиперболические функции определяются тем же способом, что и обратные тригонометрические функции, т.е. решением подходящих уравнений.

Функция, обратная гиперболическому синусу, называемая ***ареасинусом***, является решением уравнения $z = \operatorname{sh} w$ относительно w. Используя определение гиперболического синуса, получаем

$$z = \frac{e^w - e^{-w}}{2} = \frac{t - 1/t}{2},\ t^2 - 2zt - 1 = 0,$$

где $t = e^w$. Решим это уравнение относительно t:

$$t = z + \sqrt{1+z^2},\ e^w = z + \sqrt{1+z^2},\ w = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{1+z^2}\right).$$

Следовательно, ареасинус $\operatorname{Arsh} z$ выражается формулой

$$w = \operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{1+z^2}\right).$$

Понятно, что эта функция многозначна. Ее главное значение, $\operatorname{arsh} z$, определяется главным значением квадратного корня и главным значением логарифма.

Аналогично, решая относительно w уравнение $z = \operatorname{ch} w$, определяем функцию, обратную гиперболическому косинусу, называемую ***ареакосинусом***. Из определения гиперболического косинуса находим, что

$$z = \frac{e^w + e^{-w}}{2} = \frac{t + 1/t}{2},\ t^2 - 2zt + 1 = 0,$$

где $t = e^w$. Решим это уравнение относительно t:

$$t = z + \sqrt{z^2-1},\ e^w = z + \sqrt{z^2-1},\ w = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right).$$

Следовательно, ареакосинус $\operatorname{Arch} z$ выражается формулой

$$w = \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right).$$

И эта функция многозначна, а ее главное значение, $\operatorname{arch} z$, определяется главным значение квадратного корня и главным значением логарифма.

Нетрудно установить связи между рассматриваемыми ареафункцими и обратными тригонометрическими функциями:

$$\operatorname{Arsh} z = j \operatorname{Arcsin}(-jz),\ \operatorname{Arch} z = j \operatorname{Arccos} z,$$
$$\operatorname{Arcsin} z = -j \operatorname{Arsh} jz,\ \operatorname{Arccos} z = -j \operatorname{Arch} z.$$

Ареатангенс и ареакотангенс

Определим функцию $\operatorname{Arth} z$, которую называют ***ареатангенсом***, обратную гиперболическому тангенсу, из решения уравнения $z = \operatorname{th} w$ относительно w. Определение гиперболического тангенса приводит к уравнению

$$z = \operatorname{th} w = \frac{\operatorname{sh} w}{\operatorname{ch} w} = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}} = \frac{e^{2w} - 1}{e^{2w} + 1} = \frac{t-1}{t+1},\ zt + z = t - 1,$$

где $t = e^{2w}$. Найдем t:

$$t = \frac{1+z}{1-z},\ e^{2w} = \frac{1+z}{1-z},\ 2w = \operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z},$$
$$w = \operatorname{Arth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z}.$$

И эта функция многозначна, а ее главным значением, $\operatorname{arth} z$, является главное значение логарифма.

Наконец, из уравнения $z = \operatorname{cth} w$ определим функцию $\operatorname{Arcth} z$, называемую ***ареакотангенсом***. Пользуемся для этого, естественно, определением гиперболического котангенса:

$$z = \operatorname{cth} w = \frac{\operatorname{ch} w}{\operatorname{sh} w} = \frac{e^{w} + e^{-w}}{e^{w} - e^{-w}} = \frac{e^{2w}+1}{e^{2w}-1} = \frac{t+1}{t-1},\ zt - z = t + 1,$$

где $t = e^{2w}$. Найдем t:

$$t = \frac{z+1}{z-1},\ e^{2w} = \frac{z+1}{z-1},\ 2w = \operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1},$$
$$w = \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1}.$$

Очевидно, что справедливо равенство

$$\operatorname{Arcth} z = \operatorname{Arth}\frac{1}{z}.$$

Соотношения между этими обратными гиперболическими и соответствующими обратными тригонометрическими функциями таковы:

$$\operatorname{Arth} z = j\operatorname{Arctg}(-jz)\,,\ \operatorname{Arcth} z = j\operatorname{Arcctg} jz,$$
$$\operatorname{Arctg} z = -j\operatorname{Arth} jz,\ \operatorname{Arcctg} z = j\operatorname{Arcth} jz.$$

По поводу главного значения ареакотангенса можно во многом повторить рассуждения, приведенные по поводу арккотангенса, но мы не станем этого делать и примем, что главное значение ареакотангенса, $\operatorname{arcth} z$ получается из определения ареакотангенса для главного значения логарифма. Такое определение использует, например, система *Mathematica*.

Действительный аргумент

Полагая в определениях главных значений ареафункций $z = x + j0 = x$, получаем обратные гиперболические функции действительного аргумента:

$$\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right),\ \operatorname{arch} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right),$$
$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+x}{1-x},\ \operatorname{arcth} x = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{x+1}{x-1}.$$

Плюс перед корнем в выражении для ареакосинуса соответствует выбранной ветви комплексного ареакосинуса. Минус добавлен, чтобы для полноты картины изобразить еще одну ветвь этой функции, как это делается при изображении квадратного корня $y = \pm\sqrt{x}$.

Графики ареафункций показаны на рис. 5.

[4] Все основные элементарные комплексные функции встроены в систему *Mathematica*. Как уже отмечалось, *Mathematica* работает только с главными значениями комплексных

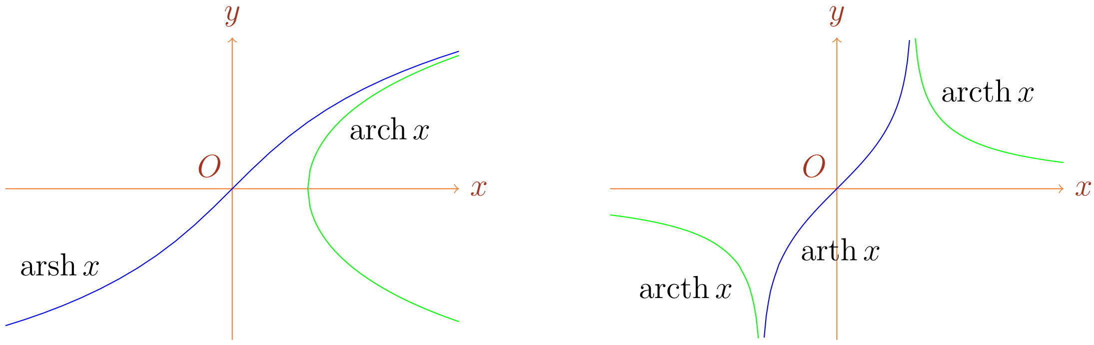

Рис. 5. Обратные гиперболические функции действительного аргумента.

функций, которые в этой системе имеют свои названия. Вот список соответствия отечественных названий функций и их названий в системе *Mathematica*:

exp, e ~ `Exp`, ln ~ `Log`,
sin ~ `Sin`, cos ~ `Cos`, tg ~ `Tan`, ctg ~ `Cot`,
arcsin ~ `ArcSin`, arccos ~ `ArcCos`, arctg ~ `ArcTan`, arcctg ~ `ArcCot`,
sh ~ `Sinh`, ch ~ `Cosh`, th ~ `Tanh`, cth ~ `Coth`,
arsh ~ `ArcSinh`, arch ~ `ArcCosh`, arth ~ `ArcTanh`, arcth ~ `ArcCoth`.

С помощью оператора `TrigToExp`, преобразующего тригонометрические выражения в экспоненциальные, можно получить формулы, используемые системой *Mathematica* для вычисления значений тех или иных комплексных функций. Например,

```
TrigToExp[Cos[z]]
```

$$\frac{e^{-\mathrm{I}\,\mathrm{z}}}{2}+\frac{e^{\mathrm{I}\,\mathrm{z}}}{2}$$

Это совпадает с нашим определением комплексного косинуса.

Следующий пример:

```
ArcSin[z]//TrigToExp
```

$$-\mathrm{I}\,\mathrm{Log}[\mathrm{I}\,\mathrm{z} + \sqrt{1-\mathrm{z}^2}]$$

что́ практически совпадает с определением (П1).

Выражение для главного значения арктангенса

```
TrigToExp[ArcTan[z]]
```

$$\frac{1}{2}\mathrm{I}\,\mathrm{Log}[1 - \mathrm{I}\,\mathrm{z}] - \frac{1}{2}\mathrm{I}\,\mathrm{Log}[1 + \mathrm{I}\,\mathrm{z}]$$

совпадает с формулой (П2).

Главное значение арккотангенса имеет вид

```
TrigToExp[ArcCot[z]]
```

$$\frac{1}{2}\mathrm{I}\,\mathrm{Log}\left[1-\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{z}}\right] - \frac{1}{2}\mathrm{I}\,\mathrm{Log}\left[1+\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{z}}\right]$$

так что сразу видно выполнение равенства (П5), а следствия, вытекающие из этого факта, обсуждались выше.

Можно проверить некоторые тождества:

```
ComplexExpand[ArcSin[z] + ArcCos[z]]
```

$$\frac{\pi}{2}$$

```
ComplexExpand[ArcTan[z] - ArcCot[1/z]]
```

0

Вычисление значений комплексных функций (только главных значений!) производится обычным образом:

```
ComplexExpand[I^I]
```

$e^{-\pi/2}$

$e^{2\pi I}$

1

```
Cos[I] // N
```

1.54308

Литература

[1] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* — М.: Рольф, 2000. Ч. 2. — с. 188–192.

[2] Янпольский А.Р. *Гиперболические функции.* — М.: Физматгиз, 1960.