ХАРЬКІВСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ДОНЕЦЬКИЙ ІНСТИТУТ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Кафедра вищої математики і фізики

Ю.М. ВОЛЧЕНКО

БАЗОВІ МАТЕМАТИЧНІ ПОНЯТТЯ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
з дисципліни
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Донецьк

2005

Волченко Ю.М. Базові математичні поняття. Методичні рекомендації з дисципліни «Вища математика» – Донецьк: ДонІЗТ, 2005. – 84 с.

Розглянуті основні математичні поняття, що не завжди входять в підручники для технічних ВНЗ, але необхідні для засвоєння навчального матеріалу на сучасному рівні студентами спеціальності АТЗ. Додано також ті поняття вищої математики, які зустрічаються майже в кожному її розділі і, таким чином, дійсно є базовими. Матеріал включає елементи математичної логіки, теорії множин, комбінаторіки, наближених обчислень і ін. Найбільш важливі твердження доводяться, якщо доведення не є дуже складним, і супроводжуються прикладами.

Іл.: 6, табл.: 5, бібліогр.: 6 найм.

Методичні матеріали розглянуті й рекомендовані до друку на засіданні кафедри вищої математики і фізики 27 серпня 2004 р., протокол № 1. Рекомендовано до друку на засіданні методичної комісії факультету «Інфраструктура залізничного транспорту» від 31.08.04, протокол № 1.

Рецензенти:

Проф. О.О. Ігнатьєв,
доц. А.М. Кремліна

Зміст

1 Елементи математичної логіки

В курсі вищої математики в більшості випадків користуються твердженнями, що називають ***висловленнями***, про які можна точно сказаті істинні вони чи хибні. З висловлень можна складати інші висловлення за допомогою операцій математичної логіки.

Нехай α, β, ... — деякі висловлення. Висловлення $\overline{\alpha}$ означає заперечення висловлення α. Наприклад, якщо $\alpha =$ «Число ділиться на три», то $\overline{\alpha} =$ $=$«Число не ділиться на три».

Висловлення $\alpha \vee \beta$ означає «α або β» і називається ***диз'юнкцією***. В українській мові сполучник «або» буває виключаючим, як в реченні: «Я піду в кіно, або в театр», в якому мається на увазі лише одна з двох можливостей, а буває невиключаючим, як в реченні: «Він — або розумна, або удачлива людина» (перше не виключає друге). У висловленні $\alpha \vee \beta$ завжди використовується невиключаючий сполучник «або».

Висловлення $\alpha \wedge \beta$ означає «α і β» і називається ***кон'юнкцією***. Наприклад, якщо $\alpha =$ «Він складе іспит», а $\beta =$ «Він виграє змагання з шахів», то $\alpha \wedge \beta =$ «Він складе іспит і виграє змагання з шахів».

Висловлення $\alpha \Longrightarrow \beta$ означає: «З твердження α випливає твердження β», «Якщо α, то β» і називається ***висновком***. Висловлення α називається ***достатньою умовою*** для β, або ***посилкою***. Висловлення β називається ***необхідною умовою*** для α, або ***висновком***. Наприклад, розглянемо твердження $\alpha =$ «Число ділиться на 49», $\beta =$ «Число ділиться на 7». Тоді $\alpha \Longrightarrow \beta$ означає «Якщо число ділиться на 49, то воно ділиться і на 7».

Висловлення $\alpha \Longleftrightarrow \beta$ означає: «Твердження α рівносильне твердженню β» і називається ***еквівалентністю***. В теоремах ця операція описується словами «тоді й тільки тоді», «якщо і тільки якщо», «необхідно і достатньо». Наприклад, теорема Піфагора може бути записана як $\alpha \Longleftrightarrow \beta$, де $\alpha =$ «Трикутник — прямокутний», $\beta =$ «Квадрат більшої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів менших сторін».

Кожне складене висловлення можна інтерпретувати як своєрідну формулу, яка можете мати одне з двох значень: 1, якщо формула істинна, і 0, якщо формула хибна, в залежності від значень простих висловлень. Істинність або хибність висловлення можна довести за допомогою таблиць істинності. Для розглянутих логічних операцій таблиці істинності мають аксіоматичний характер:

α	β	$\overline{\alpha}$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \Longrightarrow \beta$	$\alpha \Longleftrightarrow \beta$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Таблиця показує, що, наприклад, висловлення $\alpha \wedge \beta$ набирає значення 1, коли висловлення α і β дорівнюють 1; тобто, висловлення $\alpha \wedge \beta$ істинне, коли істинні обидва висловлення α і β.

Найбільшу цікавість викликають висловлення, істинні для будь-яких значень висловлень, з яких вони складаються (їх називають ***тотожно істинними***, або ***тавтологіями***). Наприклад, висловлення

$$(\alpha \Longleftrightarrow \beta) \Longleftrightarrow ((\alpha \Longrightarrow \beta) \wedge (\beta \Longrightarrow \alpha)) \tag{1.1}$$

є істинним для будь-яких значень α і β. Висловлення означає, що α рівносильне β тоді й тільки тоді, коли з α випливає β і з β випливає α. Це доводиться за допомогою таблиці істинності:

α	β	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\beta \Rightarrow \alpha$	$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge$ $\wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$	$(\alpha \Leftrightarrow \beta) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha))$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

Останній стовпець демонструє, що доводжуване твердження істинне для будь-яких α і β і тому тотожно істинне.

Якщо $\alpha \Longleftrightarrow \beta$ є теоремою, то формула (1.1) показує, що доведення такої теореми може бути реалізовано таким чином: спочатку треба довести необхідність (необхідну умову) ($\alpha \Longrightarrow \beta$), а потім — достатність (достатню умову) ($\beta \Longrightarrow \alpha$). Наприклад, для доведення розглянутої вище теореми Піфагора треба спочатку довести необхідність: «Якщо трикутник — прямокутний, то квадрат його більшої сторони дорівнює сумі квадратів менших сторін», а потім достатність: «Якщо квадрат більшої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів менших сторін, то такий трикутник — прямокутний».

Якщо твердження $\alpha \Longrightarrow \beta$ є теоремою, то її називають ***прямою теоремою***, твердження $\beta \Longrightarrow \alpha$ — ***оберненою теоремою***, а твердження $\overline{\alpha} \Longrightarrow \overline{\beta}$ — ***протилежною теоремою***.

Обернена теорема не обов'язково справедлива, якщо справедлива пряма теорема, тобто $(\alpha \Longrightarrow \beta) \Longleftrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha)$ не є тавтологією. Наприклад це так для $\alpha =$ «Число ділиться на 49» і $\beta =$ «Число ділиться на 7». З α випливає β, але з β не випливає α.

Так само протилежна теорема не обов'язково справедлива, якщо справедлива пряма теорема, тобто $(\alpha \Longrightarrow \beta) \Longleftrightarrow \left(\overline{\alpha} \Longrightarrow \overline{\beta}\right)$ теж не є тавтологією. Попередній приклад це ілюструє.

Як показує таблиця істинності

α	β	$\overline{\beta}$	$\overline{\alpha}$	$\alpha \Longrightarrow \beta$	$\overline{\beta} \Longrightarrow \overline{\alpha}$	$(\alpha \Longrightarrow \beta) \Longleftrightarrow \left(\overline{\beta} \Longrightarrow \overline{\alpha}\right)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

тотожно істинною є формула

$$(\alpha \Longrightarrow \beta) \Longleftrightarrow \left(\overline{\beta} \Longrightarrow \overline{\alpha}\right),$$

тобто пряма теорема і теорема, протилежна оберненій, рівносильні. Цю формулу називають також ***доведенням від супротивного*** : замість доведення теореми «Якщо число ділиться на 49, то воно ділиться на 7» можна доводити теорему «Якщо число не ділиться на 7, то воно не ділиться на 49».

ДЕЯКІ ТОТОЖНО ІСТИННІ ФОРМУЛИ

1°. $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$.

2°. $(a \vee \alpha) \Longleftrightarrow \alpha \Longleftrightarrow (\alpha \wedge \alpha)$.

3°. $(a \vee \beta) \Longleftrightarrow (\beta \vee \alpha)$, $(a \wedge \beta) \Longleftrightarrow (\beta \wedge \alpha)$.

4°. $((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \Longleftrightarrow (\alpha \vee (\beta \vee \gamma))$, $((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma) \Longleftrightarrow (\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma))$.

5°. $\overline{\alpha \vee \beta} \Longleftrightarrow \overline{\alpha} \wedge \overline{\beta}$, $\overline{\alpha \wedge \beta} \Longleftrightarrow \overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$.

6°. $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma = (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$, $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma = (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$.

7°. $(a \Longrightarrow \beta) \Longleftrightarrow (\overline{\alpha} \vee \beta)$.

Висловлення може містити змінні, які називаються ***предметними***. Таке висловлення називають ***предикатом*** і позначають $R(x)$, $Q(x, y)$, ..., де x, y — предметні змінні. Відносно предиката можна сказати, чи буде він істинним для будь-яких значень предметних змінних, чи тільки для деяких значень. Це можна записати за допомогою спеціальних символів, які називаються ***кванторами***:

$\forall$ — «для всіх», «для будь-якого»,

$\exists$ — «існує», «знайдеться»,

$\exists!$ — «існує єдиний», «знайдеться єдиний».

Квантор $\forall$ називають ***квантором загальності***, а квантори $\exists$ і $\exists!$ — ***кванторами існування***.

Наприклад, предикат

$$\forall (x) \exists! \, (y) \;\; y = x^2$$

означає, що для будь-якого числа x знайдеться єдине число y, яке буде квадратом числа x. Це — істинний предикат.

Часто виникає необхідність знайти заперечення деякого предиката. Для цього треба поміняти квантори загальності на квантори існування і навпаки і взяти заперечення від твердження, яке стоїть після останнього квантора. Наприклад, для попереднього предиката запереченням буде такий предикат

$$\overline{\forall (x) \exists! \, (y) \;\; y = x^2} \Longleftrightarrow \exists \, (x) \, \forall \, (y) \;\; y \neq x^2.$$

Він означає, що існує таке число x, квадрат якого не виражається будь-яким числом y. Цей предикат не є істинним.

2 Множини

Множина є первинним поняттям в математиці, яке не підлягає будь-якому означенню, як, наприклад, поняття точки, або прямої в геометрії. Щоб якось описати, про що все-таки йде річ, кажуть, що множина — це сукупність деяких об'єктів, які називаються елементами множини. Але цей опис не може бути означенням множини, бо сукупність — це просто друга назва множини.

Запис $a \in A$ означає, що елемент a належить множині A, в супротивному випадку пишуть $a \notin A$. Наприклад, початок координат належить координатній осі, а точка $(1;1)$ їй не належить. Множина, якій не належить хоча б один елемент, називається ***порожньою*** і позначається символом $\emptyset$. Наприклад, порожньою є множина трикутників на площині з сумою внутрішніх кутів, що дорівнює $190°$. Звичайно в даній теорії, або даній задачі будь-який елемент будь-якої множини завжди належить ще одній множині, яку називають ***універсальною множиною*** і позначають U. Наприклад, в планіметрії універсальною множиною є площина, на якій розглядають всі геометричні фігури.

Множину задають переліком її елементів: $A = \{-1, \pi, e, j\}$; незакінченим переліком елементів, з якого неважко здогадатись, з яких саме елементів складається множина: $B = \{2, 4, 8, 16, \ldots\}$; описом властивостей множини: $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ (півколо, розташоване у верхній півплощині координатної площини).

2.1 Операції над множинами

Далі будемо використовувати позначення $\triangleq$, яке називається «дорівнює за означенням» і пояснює, що величина зліва від цього знака означає величину, яка стоїть справа від нього. Наприклад, можна написати

$$a^n \triangleq \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n},\ n \geq 2.$$

Множина $\overline{A}$ називається ***доповненням*** множини A, якщо $\overline{A}$ складається з елементів, які не належать A: $\overline{A} \triangleq \{x : x \notin A\}$. Наприклад, на множині натуральних чисел доповненням парних чисел є множина чисел непарних. Операції над множинами звичайно ілюструються за допомогою так званих діаграм Венна. Доповнення множини за діаграмою Венна виглядає як на рис 2.1. Результат операції показаний замальованою частиною рис. (як і на подальших рис.).

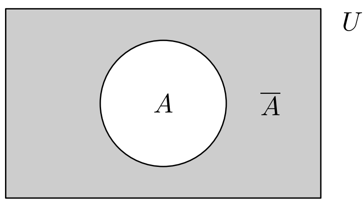


Рис. 2.1: Доповнення множини A

Множина $A \cup B$ називається ***об'єднанням*** множин A і B, якщо вона складається з елементів, які належать або множині A, або множині B (операція «або»): $A \cup B \triangleq \{x : x \in A \vee x \in B\}$ (див рис. 2.2). Прикладом

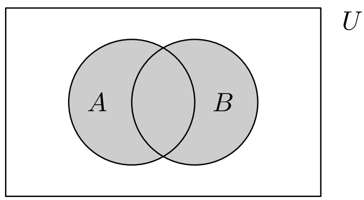


Рис. 2.2: Об'єднання множин A і B

об'єднання двох множин є відрізок $[1; 4]$, в який об'єднуються відрізки $[1; 3]$ і $[2; 4]$.

Множина $A \cap B$ називається ***перерізом*** множин A і B, якщо вона складається з елементів, які належать і множині A, і множині B (операція «і»): $A \cap B \triangleq \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ (див. рис. 2.3). Наприклад, множина

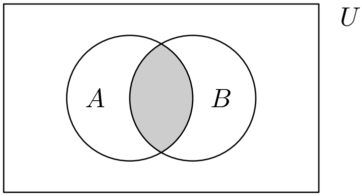


Рис. 2.3: Переріз множин A і B

натуральних чисел, що діляться на 6, є перерізом множин натуральних чисел, що діляться на 2 і на 3.

Множина $A - B = A \setminus B \triangleq A \cap \overline{B}$ називається ***різницею*** множин A і B, вона складається з елементів, які належать множині A, але не належать множині B (див. рис. 2.4). Показник n кореня $\sqrt[n]{}$ належить множині $N \setminus \{1\}$,

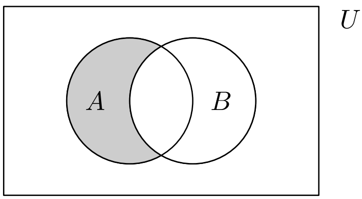


Рис. 2.4: Різниця множин A і B

де N — множина натуральних чисел.

ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАЦІЙ НАД МНОЖИНАМИ

1°. $\overline{\emptyset} = U$, $\overline{U} = \emptyset$, $\overline{\overline{A}} = A$.

2°. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

3°. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

4°. $A \cup U = U$, $A \cap U = A$.

5°. $A \cup \overline{A} = U$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

6°. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

7°. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

8°. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

2.2 Відношення між множинами

Множина A є ***підмножиною*** множини B, або множина A ***включена*** в множину B, і пишуть $A \subset B$, якщо елемент A є елементом множини B:

$$A \subset B \Longleftrightarrow [\forall (x)\ x \in A \Longrightarrow x \in B]\,. \tag{2.1}$$

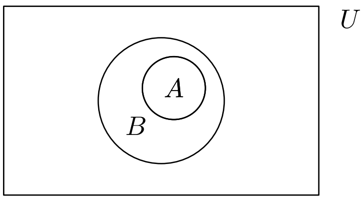


Рис. 2.5: $A \subset B$

Приклад 2.1. *Що означає* $\overline{A \subset B}$*?*

Розв'язання. Треба взяти заперечення від предиката в правій частині еквівалентності (2.1):

$$\overline{A \subset B} \Longleftrightarrow \exists (x)\ x \in A \wedge x \notin B.$$

Таким чином, $\overline{A \subset B}$ означає, що існує елемент множини A, що не належить множині B. $\square$

Кажуть, що множина A ***дорівнює*** множині B і пишуть $A = B$, якщо A включена в B і B включена в A:

$$A = B \Longleftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)\,.$$

ВЛАСТИВОСТІ ВІДНОШЕНЬ МІЖ МНОЖИНАМИ

1°. $\emptyset \subset A \subset U$.

2°. $(A \subset B \wedge B \subset C) \Longrightarrow A \subset C$.

3°. $(A = B \wedge B = C) \Longrightarrow A = C$.

Теореми в теорії множин, зокрема, властивості множин доводяться двома методами. Розглянемо ці методи на доведенні такої теореми.

Теорема 2.1. *Довести, що для будь яких множин A і B виконується рівність $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B$.*

Доведення. Перший спосіб полягає в використанні означення операції різниці множин і властивостей операцій над множинами:

$$\overline{A \backslash B} = \overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{\overline{B}} = \overline{A} \cup B.$$

Другий спосіб використовує той факт, що доведення теореми є доведенням рівності двох множин, а рівність множин за її означенням можна довести як включення першої множину в другу і навпаки. Візьмемо будь-який елемент a з лівої частини доводжуваної рівності. Тоді справедлив ланцюжок формул

$$\left(a \in \overline{A \backslash B}\right) \Longrightarrow (a \notin A \backslash B) \Longrightarrow \left(a \notin A \cap \overline{B}\right) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \left(a \notin A \wedge a \notin \overline{B}\right) \Longrightarrow \left(a \in \overline{A} \vee a \in B\right) \Longrightarrow a \in \overline{A} \cup B,$$

з якого випливає, що a належить і правій частині формули. Так само виконується і зворотний ланцюжок:

$$a \in \overline{A} \cup B \Longrightarrow \left(a \in \overline{A} \vee a \in B\right) \Longrightarrow \left(a \notin A \wedge a \notin \overline{B}\right) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \left(a \notin A \cap \overline{B}\right) \Longrightarrow (a \notin A \backslash B) \Longrightarrow \left(a \in \overline{A \backslash B}\right).$$

Таким чином, ліва частина рівності включена в праву, а права — в ліву. За означенням відношення рівності двох множин множини $\overline{A \backslash B}$ і $\overline{A} \cup B$ дорівнюють одна одній. $\square$

2.2. Відношення між множинами

3 Метод математичної індукції

В математиці часто використовують твердження, які залежать від натурального n. Наприклад, кажуть, що

$$\frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1}. \tag{3.1}$$

Як перевірити таке твердження? Перевірити його для кожного n неможливо, бо множина натуральних чисел нескінченна.

Для доведення правильності твердження $P(n)$, $n \in N$, застосовують ***метод математичної індукції***. Він полягає в тому, що послідовно виконуються етапи доведення, подані нижче.

1) Доводять, що $P(n)$ справедливе для деяких $n = r, \ldots, n = s$, $r < \ldots < s$.

2) Припускають, що $P(n)$ виконується для деякого $n = k$, $k \geq s$, і, використовуючи це припущення та доведене в п.1, доводять справедливість $P(k+1)$.

3) Вважають доведеним $P(n)$ для будь-якого n.

П. 2 замінює доведення $P(n)$ для кожного $n > s$ доведенням того, що кожне «дальше» твердження $P(k+1)$ справедливе, якщо справедливе попереднє твердження $P(k)$. Оскільки справедливість «перших» тверджень доведена в п. 1, то, таким чином, справедливі всі твердження $P(n)$, $n = r$, $\ldots$, $n = s$, $n > s$.

Приклад 3.1. *Довести* (3.1).

Розв'язання. 1) Очевидно, що (3.1) виконується для $n = 2$: $\frac{1}{2} < 2$ та для $n = 3$: $\frac{3}{8} < 1$.

2) Нехай (3.1) справедливе для деякого $n = k$, $k \geq 3$, тобто нехай виконується

$$\frac{k}{2^k} < \frac{2}{k-1}, \; k \geq 3.$$

Доведемо, що (3.1) виконується для $n = k + 1$. Дійсно, за попереднім припущенням

$$\frac{k+1}{2^{k+1}} = \frac{k}{2^k 2} \cdot \frac{k+1}{k} < \frac{2}{(k-1)\,2} \cdot \frac{k+1}{k} = \frac{2}{k} \cdot \frac{k+1}{2\,(k-1)} \leq \frac{2}{k},$$

оскільки

$$\frac{k+1}{2\,(k-1)} = \frac{k-1+2}{2\,(k-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k-1} \leq 1$$

для $k \geq 3$.

3) Таким чином, нерівність (3.1) справедлива для всіх $n \geq 2$. $\square$

4 Символ підсумовування

Символ $\sum$ називають ***символом підсумовування*** і використовують для запису сум будь-яких величин:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overset{\triangle}{=} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

Вираз в лівій частині рівності читається як «сума по k від 1 до n». Змінна k називається ***змінною підсумовування***.

ВЛАСТИВОСТІ СИМВОЛА ПІДСУМОВУВАННЯ

1°. *Змінною підсумовування може бути будь-яка літера:*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \cdots .$$

2°. *Заміна додавання однакових доданків множенням:*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha = \alpha n.$$

3°. *Загальний множник можна виносити за знак суми:*

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda \alpha_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

4°. *Від зміни місць доданків сума не змінюється:*

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \beta_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k.$$

5°. *Таке ж правило для подвійного підсумовування:*

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\alpha_{ks}=\sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ks}.$$

Наприклад,

$$(\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13})+(\alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23})=$$
$$=(\alpha_{11}+\alpha_{21})+(\alpha_{12}+\alpha_{22})+(\alpha_{13}+\alpha_{23}),$$

або

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{s=1}^{3}\alpha_{ks}=\sum_{s=1}^{3}\sum_{k=1}^{2}\alpha_{ks}.$$

5 Факторіал та біном Ньютона

Факторіалом натурального числа n називається число

$$n! \stackrel{\triangle}{=} 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

За означенням вважають, що $0! \stackrel{\triangle}{=} 1$, $1! \stackrel{\triangle}{=} 1$. Факторіали швидко зростають зі зростанням n. Наприклад, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5\,040$, $8! = 40\,320$, $9! = 362\,880$, $10! = 3\,628\,800$.

Дуже важливе значення в математичних формулах, роблячи їх компактними, мають числа, що називають ***біномними коефіцієнтами***. Вони означаються як

$$C_n^k \stackrel{\triangle}{=} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

і мають майже очевидні властивості:

$$C_n^0 = C_n^n = 1,\ C_n^1 = C_n^{n-1} = n,\ C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Лема 5.1. *Справедлива рівність*

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k. \tag{5.1}$$

Доведення. За означенням біномних коефіцієнтів

$$C_n^{k-1} + C_n^k = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}^{\backslash k} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}^{\backslash n-k+1} =$$

$$= n!\frac{k+n-k+1}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = C_{n+1}^k.$$

$\square$

Біномні коефіцієнти для $n = 2$:

$$C_2^0 = 1,\ C_2^1 = 2,\ C_2^2 = 1;$$

для $n = 3$:

$$C_3^0 = 1,\ C_3^1 = 3,\ C_3^2 = 3,\ C_3^3 = 1.$$

Вони збігаються з коефіцієнтами у формулах квадрата і куба суми двох чисел, відповідно:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \sum_{k=0}^{2} C_2^k a^k b^{2-k}, \tag{5.2}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = \sum_{k=0}^{3} C_3^k a^k b^{3-k}. \tag{5.3}$$

Виникає питання, чи не можна за допомогою біномних коефіцієнтів записати в розгорнутому вигляді вираз $(a+b)^n$? Виявлється, що можна і для цього є

Теорема 5.1 (Біном Ньютона)**.** *Для будь-якого натурального n виконується*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Доведення. Доведемо цю формулу методом математичної індукції. Для $n = 1$ формула справедлива, бо $a + b = a + b$. Для $n = 2$ та $n = 3$ справедливість формули випливає з тотожностей (5.2) і (5.3). Припустимо, що формула бінома Ньютона справедлива для $n = m \geq 3$:

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k}$$

і доведемо її справедливість для $n = m+1$. Дійсно, застосовуючи формулу

(5.1), дістаємо

$$
\begin{gathered}
(a+b)^{m+1}=(a+b)^{m}(a+b)=\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k}(a+b)= \\
=\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{k+1} b^{m-k}+\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k+1}= \\
=C_m^m a^{m+1} b^0+\sum_{k=0}^{m-1} C_m^k a^{k+1} b^{m-k}+C_m^0 a^0 b^{m+1}+\sum_{k=1}^{m} C_m^k a^k b^{m-k+1}= \\
=C_m^m a^{m+1} b^0+\sum_{s=1}^{m} C_m^{s-1} a^s b^{m-s+1}+C_m^0 a^0 b^{m+1}+\sum_{k=1}^{m} C_m^k a^k b^{m-k+1}= \\
=C_m^0 a^0 b^{m+1}+\sum_{k=1}^{m}\left(C_m^{k-1}+C_m^k\right) a^k b^{m-k+1}+C_m^m a^{m+1} b^0= \\
=C_m^0 a^0 b^{m+1}+\sum_{k=1}^{m} C_{m+1}^k a^k b^{m-k+1}+C_m^m a^{m+1} b^0= \\
=\sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^k b^{m-k+1}.
\end{gathered}
$$

□

Біномні коефіцієнти зручно знаходити за допомогою трикутника Паскаля

n															
0								1							
1							1		1						
2						1		2		1					
3					1		3		3		1				
4				1		4		6		4		1			
5			1		5		10		10		5		1		
6		1		6		15		20		15		6		1	
7	1		7		21		35		35		21		7		1

В цьому трикутнику кожний біномний коефіцієнт, крім одиниць, дорівнює сумі двох найближчих сусідніх верхніх елементів таблиці. Користуючись трикутником Паскаля, знаходимо, наприклад, що

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

6 Елементи комбінаторіки

В комбінаториці вивчають множини, що складаються з дискретних (відокремлених елементів). Далі розглянуті тільки деякі задачі, пов'язані з підрахуванням кількості можливих підмножин, що вибираються з заданої множини.

Позначимо $|A|$ кількість елементів скінченної множини A.

Теорема 6.1 (Правило множення)**.** *Нехай* $|A_1| = n_1, \ldots, |A_k| = n_k$. *Тоді можна утворити* $n_1 \cdot \ldots \cdot n_k$ *різних виборок елементів, взятих по одному з кожної множини.*

Доведення. Доведемо це твердження методом математичної індукції. Для $k = 1$ теорема справедлива, бо з однієї множини, що складається з n_1 елементів, можна утворити n_1 виборок з одного елемента. Припустимо, що лема справедлива для $k = m \geq 1$ і доведемо її для $k = m + 1$.

Нехай $A_{m+1} = \{b_1, \ldots, b_{n_{m+1}}\}$. Для перших m множин за припущенням можна утворити $s = n_1 \cdot \ldots \cdot n_m$ виборок, які позначимо $a_1, \ldots, a_s$. Побудуємо таблицю з s рядків і n_{m+1} стовпців, в клітині якої, що стоїть на перетині i-го рядка і j-го стовпця, міститься пара (a_i, b_j). Кожна така пара зустрінеться в таблиці один і тільки один раз. Таким чином, всього таких пар буде $s \cdot n_{m+1} = n_1 \cdot \ldots \cdot n_m \cdot n_{m+1}$. □

Приклад 6.1. *Відділ кадрів класифікує співробітників за статтю (чол./жс.), родинним станом (одружений(на)/не одружений(на)) та професією (з 17 професій). Скільки для відділу кадрів існує різних категорій співробітників?*

Розв'язання. За попередньою лемою можна нарахувати $2 \cdot 2 \cdot 17 = 68$ категорій співробітників. □

Далі будемо розглядати дві моделі виборок. В першій моделі множина, з якої вибираються елементи, буде моделюватись урною, з якої навмання дістають кульки. В другій кульки будуть розміщатись по занумерованих ящиках (тобто для кожної кульки треба вибрати ящик, куди її треба покласти; вибрані ящики й будуть вибіркою).

6.1 Упорядковані вибірки. Різні кульки

Будемо вважати, що кульки можна відрізнити одну від одної, наприклад, за номерами. В урновій моделі вибірки з різним упорядкуванням кульок будемо вважати різними.

6.1.1 Вибірка з вертанням. Розміщення з повтореннями

Нехай з урни, де міститься n кульок, навмання дістають кульку, записують її номер, потім кладуть її в урну; кульки перемішують, знов навмання дістають кульку, записують номер, кладуть в урну і так роблять m разів. За правилом множення таких вибірок номерів кульок буде

$$\overline{A}_n^m \triangleq n^m. \tag{6.1}$$

Нехай тепер m кульок розкладують по n ящиках. Для кожної кульки можна вибрати будь-який з номерів ящиків (можливі повторення номерів ящиків для різних кульок). Це все одно, що витягти з урни, що містить n ящиків, m з них з вертанням, причому, порядок вибору ящиків є важливим. Тому задача еквівалентна попередній і кількість розміщень m по n ящиках обчислюється за формулою (6.1).

Приклад 6.2. *Шифр складається з п'ятизначних чисел, в яких використовуються тільки дві цифри: 0 і 1. Скільки різних об'єктів можна зашифрувати цим шифром?*

Розв'язання. Кількість значень шифру дорівнює кількості вибірок з вертанням з урни, що містить дві кульки, занумеровані нулем і одиницею, тобто дорівнює $\overline{A}_2^5 = 2^5 = 32$. Ось ці значення шифру:

00000	01000	10000	11000
00001	01001	10001	11001
00010	01010	10010	11010
00011	01011	10011	11011
00100	01100	10100	11100
00101	01101	10101	11101
00110	01110	10110	11110
00111	01111	10111	11111

□

Приклад 6.3. *Два дипломати A і B знають, що Міністерство закордонних справ має намір запропонувати їм роботу в одній з трьох країн. Які можливі варіанти на них чекають?*

Розв'язання. Ця задача рівносильна розміщенню (з повторенням) двох кульок, помічених літерами A і B, по трьох ящиках; тому відповідь дає число $\overline{A}_3^2 = 3^2 = 9$. Ось всі варіанти розміщень:

1 країна	AB	—	—	A	A	—	B	B	—
2 країна	—	AB	—	B	—	A	A	—	B
3 країна	—	—	AB	—	B	B	—	A	A

□

6.1.2 Вибірка без вертання. Розміщення без повторень

Так само, як і в попередньому п., вибірки з різним упорядкуванням елементів продовжуємо вважати різними. Нехай тепер у моделі з урною, в якій знаходиться n кульок, кульки з урни дістають m разів без вертання. Тоді можна вважати, що ця процедура ідентична вибору по одному елементу з кожної з m множин з такими кількостями елементів: $|A_1| = n$, $|A_2| = n-1$, $\ldots$, $|A_m| = n - m + 1$. За правилом множення таких виборок буде

$$A_n^m \stackrel{\triangle}{=} n\,(n-1)\ldots(n-m+1)\,. \qquad (6.2)$$

В моделі з ящиками так само вибираються ящики (без повторень) і тому кількість розміщень m кульок по n різних ящиках дорівнює числу A_n^m з формули (6.2). Величина A_n^m називається ***числом розміщень*** m елементів, узятих з n елементів.

Приклад 6.4. *Скільки двомовних словників треба мати, щоб уможливити переклади з будь-якої з трьох мов: української (У), російської (Р), англійської (А) на будь-яку з цих трьох мов?*

Розв'язання. Кожен словник є вибором двох мов («кульок») з трьох («без вертання») і тому загальна кількість словників є числом $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$. Таким чином, треба мати словники У-Р, Р-У, У-А, А-У, Р-А, А-Р. □

Приклад 6.5. *Студенту необхідно скласти на протязі чотирьох днів два іспити з дисциплін ВМ (вища математика) і Ф (фізика). В один день два іспити складати не дозволяється. Які є варіанти розкладу іспитів?*

Розв'язання. Кожен розклад є розміщенням двох іспитів («кульок») по чотирьох днях («ящиках») без повторень. Таким чином, усього різних розкладів буде $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$. Це доводить і така таблиця

1 день	2 день	3 день	4 день
ВМ	Ф	—	—
ВМ	—	Ф	—
ВМ	—	—	Ф
—	ВМ	Ф	—
—	ВМ	—	Ф
—	—	ВМ	Ф
Ф	ВМ	—	—
Ф	—	ВМ	—
Ф	—	—	ВМ
—	Ф	ВМ	—
—	Ф	—	ВМ
—	—	Ф	ВМ

□

6.1.3 Переставлення без повторень

Якщо в попередній моделі вважати, що $m = n$, то дістанемо величину $P_n \stackrel{\triangle}{=} A_n^n = n\,(n-1)\cdot\dots\cdot 1 = n!$, яка називається ***числом переставлень*** n елементів; вона дорівнює кількості способів упорядкувати n *різних* елементів. Дійсно, кожне розміщення n кульок по n ящиках без повторень є деяким упорядкуванням, а кожному упорядкуванню n чисел відповідає якесь розміщення розглянутого типу.

Приклад 6.6. *Енциклопедія складається з 8 томів. Скількома способами її можна поставити на полиці в безладді, тобто так, щоб томи не були упорядковані за зростанням номерів?*

Розв'язання. 8 томів можуть бути упорядковані 8! способами, але одне упорядкування — за зростанням номерів — слід виключити. Залишається $8! - 1 = 40\,320 - 1 = 40\,319$ способів. □

Приклад 6.7. *Скільки слів, що мають сенс, можна скласти з букв о, т, р?*

Розв'язання. Всього слів можна скласти $3! = 6$: отр, орт, тор, тро, рто, рот. З них тільки три мають сенс. □

6.2 Неупорядковані вибірки

В урновій моделі тепер будемо вважати, що вибірки однакові, якщо вони складені з однакових елементів. Упорядкування елементів вибірки значення не має. Таким чином, вибірки вважаються різними тільки тоді, коли вони відрізняються хоча б одним елементом.

В ящичній моделі вважаємо, що кульки неможливо розрізнити між собою.

6.2.1 Вибірка без вертання. Розміщення без повторень

Скільки є різних варіантів дістати без вертання m різних кульок з урни, де міститься n кульок, якщо не зважати на упорядкованість кульок у вибірці? Як і досі, кульки з різними номерами вважаються різними. Нехай таких виборок є x. Але в кожній такій вибірці кульки можна упорядкувати $m!$ способами. Отже, з одного боку, упорядкованих виборок буде $m!x$, а, з іншого боку, як було вже показано, таких виборок буде A_m^n. Дістаємо рівняння $m!x = A_m^n$, з якого виходить, що $x = A_m^n/m!$. Таким чином, різних неупорядкованих виборок з m кульок по n кульок буде

$$\frac{n\,(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = C_n^m.$$

Ця величина називається ***числом комбінацій*** з n елементів по m елементів.

Нехай тепер треба розкласти m однакових кульок по n ящиках. Це все одно, що вибрати з n ящиків m ящиків, в яких буде знаходитись по одній кульці, причому порядок вибору ящиків не важливий. Тому ця задача еквівалентна попередній (з урни, що містить n ящиків, треба вибрати m ящиків без вертання). Таким чином, кількість способів розкласти m однакових кульок по n ящиках дорівнює C_n^m.

Приклад 6.8. *Скількома способами можна з п'яти співробітників обрати комісію з двох членів?*

Розв'язання. Шукана кількість способів дорівнює числу комбінацій з 5 елементів по 2:

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10.$$

Якщо подати співробітників цифрами 1, 2, 3, 4, 5, то вийдуть такі можливі комісії:

$$\begin{array}{cccc} 12 & 13 & 14 & 15 \\ & 23 & 24 & 25 \\ & & 34 & 35 \\ & & & 45 \end{array}$$

□

Приклад 6.9. *На два з чотирьох лотерейних білетів припали виграші. Якими можуть бути виграшні комбінації номерів?*

Розв'язання. Занумеруємо лотерейні білети номерами 1, 2, 3, 4. Кількість виграшних комбінацій є кількістю способів розкласти 2 нерозрізняльні кульки (виграші) по чотирьох ящиках (білетах) і тому дорівнює

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{3\cdot 4}{2} = 6.$$

Ось всі виграшні комбінації:

$$\begin{array}{ccc} 12 & 13 & 14 \\ & 23 & 24 \\ & & 34 \end{array}$$

□

6.2.2 Вибірки з вертанням. Розміщення з повтореннями

Вибірку m кульок із урни з n кульками з вертанням позначимо так:

$$\underbrace{x\cdots x}_{k_1}|\underbrace{x\cdots x}_{k_2}|\ldots|\underbrace{x\cdots x}_{k_n}, \tag{6.3}$$

де x — кулька, k_i — кількість разів, що кулька з номером i зустрічається в вибірці. Якщо $k_i = 0$, то відповідна група $x\cdots x$ не записується. Зрозуміло, що $k_1 + \cdots + k_n = m$. Наприклад, вибірка з 7 кульок з урни з 5 кульками: $1, 2, 3, 1, 5, 5, 5$ записується як $xx|x|x||xxx$. Таким чином, для запису будь-якої вибірки використовується m (кількість кульок у вибірці) плюс $n-1$ (кількість символів $|$) позицій. Тоді кількість розглядуваних вибірок дорівнює кількості різних можливостей вибрати m позицій для запису символів x з $n+m-1$ позиції:

$$\overline{C}_n^m \triangleq C_{n+m-1}^m. \tag{6.4}$$

Конкретне розкладання m однакових кульок по n ящиках теж можна записати у вигляді (6.3), в якому символом x позначена кулька, а символом $|$ — перегородка між ящиками (ящики розташовані впритул один до одного), причому крайні перегородки не показані, бо не впливають на хід міркувань. З цього випливає, що кількість різних розміщень m однакових кульок по n ящиках теж дається формулою (6.4).

Приклад 6.10. *В цукерні продають три види тістечок: наполеони (н), еклери (е) та слойоні (с). Скількома способами можна купити 4 тістечка?*

Розв'язання. Кількість способів дорівнює кількості способів витягнути 4 кульки (тістечка) з урни з трьома кульками (тістечками) з вертанням:

$$\overline{C}_3^4 = C_{3+4-1}^4 = C_6^4 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{5\cdot 6}{2} = 15.$$

Ось всі можливі способи покупок: ееее, ееес, ееен, еесс, еесн, еенн, есcс, ессн, еснн, еннн, сссс, сссн, сснн, сннн, нннн. □

Приклад 6.11. *Ліфт шестиповерхового будинку піднімає з першого поверху 10 пасажирів. Скількома способами можуть розподілитись по поверхах пасажири, які на них вийдуть?*

Розв'язання. Задача збігається з задачею розміщення 10 кульок (пасажирів) по 5 ящиках (поверхах) з повтореннями:

$$\overline{C}_5^{10} = C_{5+10-1}^{10} = C_{14}^{10} = \frac{14!}{10!4!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 11 \cdot 13 \cdot 7 = 1001.$$

□

6.2.3 Переставлення з повтореннями

Нехай є n елементів, серед яких k_1 елементів 1-ї групи, k_2 елементів 2-ї групи, ..., k_m елементів m-ї групи, $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. Скільки існує переставлень з таких n елементів, якщо порядок груп істотний, а порядок елементів у групах — ні? Тобто групи упорядковані, а елементи в групах неупорядковані.

Припустимо, що групи елементів послідовно розміщуються по позиціях послідовності з n елементів. Для 1-ї групи позиції можуть бути вибрані $C_n^{k_1}$ способами, для другої (вибір з тих позицій, що залишились після розташування 1-ї групи) — $C_{n-k_1}^{k_2}$ способами, ..., для m-ї — $C_{n-k_1-\dots-k_{m-1}}^{k_m} = C_{k_m}^{k_m}$ способами. За правилом множення кількість шуканих розташувань дорівнює

$$P(k_1, \dots, k_m) \overset{\triangle}{=} C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} \cdots C_{n-k_1-\dots-k_{m-2}}^{k_{m-1}} C_{k_m}^{k_m} =$$

$$= \frac{n!\,(n-k_1)!\,(n-k_1-k_2)! \cdots (n-k_1-\cdots k_{m-2})!}{k_1!\,(n-k_1)!k_2!\,(n-k_1-k_2)! \cdots k_{m-1}!\underbrace{(n-k_1-\cdots k_{m-1})!}_{k_m!}} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!k_2! \cdots k_m!},$$

або

$$P(k_1, \dots, k_m) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_m)!}{k_1!k_2! \cdots k_m!}.$$

Приклад 6.12. *Скількома способами можна нанизати на нитку 4 зелених, 5 блакитних та 6 червоних намистинок?*

Розв'язання. Намистинки одного кольору утворюють групи, в яких порядок елементів не є істотним, а порядок різнокольорових груп істотний. Тому в даному випадку $k_1 = 4$, $k_2 = 5$, $k_3 = 6$, $m = 3$, $n = 15$ і

$$P\left(4, 5, 6\right) = \frac{(4+5+6)!}{4!5!6!} = \frac{15!}{4!5!6!} = 630630.$$

□

Приклад 6.13. *Дитина перемішує літери слова «коток» і знов складає з них слова. Скільки різних слів може вийти?*

Розв'язання. Маємо п'ять елементів (кількість букв, $n = 5$) і три групи однакових букв ($m = 3$). В першу групу попадають дві літери «к» ($k_1 = 2$), в другу — дві літери «о» ($k_2 = 2$), а в третю — одна літера «т» ($k_3 = 1$). Таким чином, різних слів може бути

$$P\left(2, 2, 1\right) = \frac{(2+2+1)!}{2!2!1!} = \frac{120}{4} = 30.$$

□

Всі розглянуті комбінаторні результати можна подати у вигляді таблиці:

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Переставлення</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Одна група</td><td>m груп</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$P_n = n!$</td><td>$P\left(k_1, \dots k_m\right) = \frac{(k_1+\dots+k_m)!}{k_1!\cdots k_m!}$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">Вибірка</td></tr>
<tr><td></td><td>без вертання</td><td>з вертанням</td><td></td></tr>
<tr><td>різних</td><td>$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$</td><td>$\overline{A}_n^m = n^m$</td><td>упор.</td></tr>
<tr><td>однакових</td><td>$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$</td><td>$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$</td><td>неупор.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Розміщення кульок</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>без повторень</td><td>з повтореннями</td><td></td></tr>
</table>

Примітка: упор. – упорядкована, неупор. — неупорядкована.

6.2. Неупорядковані вибірки

7 Дійсні числа

Будь-який десятковий дріб, який не має цифри «9» в періоді, є дійсним числом:

$$1;\ 2,35;\ -4,3756565656\ldots = -4,37\,(56)\,;\ \sqrt{2} = 1,414\ldots\ .$$

Множина дійсних чисел позначається R.

Найчастіше використовують дві властивості дійсних чисел:

$$\forall\,(a,b\in R)\ \ a=b\vee a<b\vee a>b$$

(два дійсних числа або дорівнюють одне одному, або одне з них більш, ніж друге),

$$\forall\,(a,b\in R)\,\exists\,(c\in R)\ \ a\neq b\Longrightarrow(a<c<b\vee b<c<a)$$

(між двома різними дійсними числами завжди знайдеться ще одне дійсне число).

Модулем $|a|$ дійсного числа a називається дійсне число

$$|a|\triangleq\begin{cases} a, & a\geq 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

Модуль дійсного числа має такі властивості:

1°. $|a|<\varepsilon\Longleftrightarrow-\varepsilon<a<\varepsilon$, *якщо* $\varepsilon>0$.

2°. $|a|>\varepsilon\Longleftrightarrow a<-\varepsilon\vee a>\varepsilon$, *якщо* $\varepsilon>0$.

3°. $||a|-|b||\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|$.

4°. $|ab|=|a|\,|b|$.

5°. $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$.

8 Сталі, змінні, функції

8.1 Основні поняття

При дослідженні різноманітних проблем в математиці й техніці деякі величини, що розглядають в цих проблемах, не змінюються, тобто мають одне й те саме значення. Такі величини називають ***сталими***, або ***константами***. Серед них є такі, що не змінюються в будь-яких задачах: π, e, $\ldots$. Вони називаються ***абсолютними сталими***. Інші величини змінюються і тому їх називають ***змінними***.

Нехай X і Y — дві множини. ***Функцією*** на X називається правило, за яким кожному значенню елемента $x \in X$ відповідає єдине значення елемента $y \in Y$. Функція позначається $y = f(x)$, або $y = y(x)$, або $f : X \longrightarrow Y$.

Множина X називається ***областю визначення***, а множина $Y = \{y : y = f(x)\}$ — ***множиною значень*** функції.

Наприклад, для множин $X = \{1, 2, 3\}$ і $Y = \{$одиниця, двійка, трійка$\}$ можна задати функцію, яка ставить у відповідність числу його словесну назву: $1 \longrightarrow$ одиниця, $2 \longrightarrow$ двійка, $3 \longrightarrow$ трійка.

Функція $f(n) = 2n$ ставить у відповідність кожному натуральному числу парне число і тому $f : N \longrightarrow N$, де N — множина натуральних чисел.

Функцію називають також ***відображенням*** і тоді для $y = f(x)$ елемент $x \in X$ називають ***прообразом*** елемента $y \in Y$, а y — ***образом*** елемента x.

Образом множини $A \subset X$ для відображення $f : X \longrightarrow Y$ називають множину

$$f(A) = \{y \in Y : \exists (x) \;\; x \in A \wedge y = f(x)\}$$

тих елементів Y, які є образами елементів множини A.

Множину

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

тих елементів X, образи яких містяться в B, називають ***прообразом множини*** $B \subset Y$.

Відображення $f : X \longrightarrow Y$ називається ***взаємно однозначним***, якщо виконуються дві умови: $Y = f(X)$ (множина значень є образом області визначення) і $\forall (x_1, x_2 \in X)\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$ (різні елементи мають різні образи). Відображення є взаємно однозначним, якщо кожному $x \in X$ знайдеться єдиний відповідний $y \in Y$, а кожному $y \in Y$ знайдеться єдиний відповідний $x \in X$. Дійсно, нехай $x \in X$. Тоді за означенням функції знайдеться $y \in Y$, такий, що $y = f(x)$ і такий елемент єдиний. Нехай тепер $y \in Y$. За першою умовою знайдеться елемент $x \in X$, такий, що $y = f(x)$, а за другою умовою такий x буде єдиним.

Якщо відображення взаємно однозначне, кажуть, що між множинами X і Y встановлена ***взаємно однозначна відповідність***. Наприклад, між дійсним числом x і його кубом x^3 встановлена взаємно однозначна відповідність, бо кожному числу відповідає єдине значення його куба і єдине значення кореня кубічного з цього числа.

Якщо $X \subset R$, $Y \subset R$, то $x \in X$ називається ***незалежною змінною***, або ***аргументом***, а $y \in Y$ — ***залежною змінною***, або ***функцією***. Функцію в такому випадку називають ***дійсною функцією одного аргументу***. Розглянемо поняття, пов'язані з такими функціями.

Оскільки функцію часто задають тільки за допомогою формули, то в цьому випадку область визначення дорівнює області допустимих значень аргументу, тобто таких його значень, для яких обчислення значення функції може бути завершено числом.

Графіком функції називається множина

$$\Gamma = \{(x, y) : y = f(x), x \in X\}.$$

Наприклад, функція $y = |x|$ має областю визначення всю числову вісь: $X = (-\infty, \infty)$, а множиною значень — додатну піввісь: $Y = [0; \infty)$. Її графік див. на рис. 8.1:

8.2 Класифікація функцій

Кажуть, що на множині $D \subset X$ для функції $y = f(x)$ існує ***обернена*** для неї функція $x = f^{-1}(y)$, якщо

$$\forall (x \in D)\ f^{-1}(f(x)) = x.$$

Обернену функцію записують також як $f^{-1} : Y \longrightarrow X$.

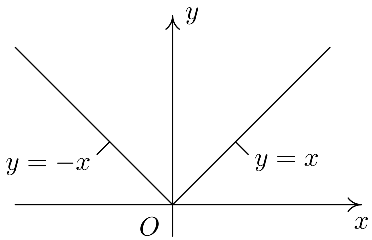


Рис. 8.1: Графік функції $y=|x|$

Функція $f(x)$ називається ***обмеженою зверху*** на множині $D\subset X$, якщо

$$\exists\,(M\in R)\,\forall\,(x\in D)\;\; f(x)<M.$$

Функція $f(x)$ називається ***обмеженою знизу*** на множині $D\subset X$, якщо

$$\exists\,(m\in R)\,\forall\,(x\in D)\;\; f(x)>m.$$

Функція $f(x)$ називається ***обмеженою*** на множині $D\subset X$, якщо вона обмежена на цій множині і зверху, і знизу.

Функція $f(x)$ ***зростає*** на множині $D\subset X$, коли

$$\forall\,(x_1,x_2\in D)\;\; x_1<x_2\Longrightarrow f(x_1)\le f(x_2)\,.$$

Якщо замінити знак нестрогої нерівності на знак строгої, вийде означення ***строгого зростання*** функції.

Функція $f(x)$ ***спадає*** на множині $D\subset X$, коли

$$\forall\,(x_1,x_2\in D)\;\; x_1<x_2\Longrightarrow f(x_1)\ge f(x_2)\,.$$

Якщо замінити знак нестрогої нерівності на знак строгої, вийде означення ***строгого спадання*** функції.

Зростаюча, або спадаюча функція називається ***монотонною***.

Множина $D\subset X$ називається ***симетричною***, якщо

$$\forall\,(x\in D)\;\; -x\in D.$$

Функція $f(x)$ називається ***парною*** на симетричній множині $D\subset X$, якщо

$$\forall\,(x\in D)\;\; f(-x)=f(x)\,.$$

8.2. Класифікація функцій

Функція $f(x)$ називається ***непарною*** на симетричній множині $D \subset X$, якщо

$$\forall (x \in D) \;\; f(-x) = -f(x).$$

Функція $f(x)$ називається ***періодичною*** з періодом $\omega > 0$ на симетричній множині $D \subset X$, якщо

$$\forall (x \in D) \;\; (x + \omega \in D \land x - \omega \in D) \Longrightarrow f(x) = f(x + \omega) = f(x - \omega).$$

Для функцій $f : X \longrightarrow Q$, $g : Q \longrightarrow Y$ можна означити ***складену функцію*** $h : X \longrightarrow Y$: $h(x) = g(f(x))$, $x \in X$.

8.3 Основні елементарні функції

1°. *Степенева функція:* $y = x^\alpha$, $\alpha \in R$.

2°. *Показникова функція:* $y = a^x$, $a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$.

3°. *Логарифмічна функція:* $y = \log_a x$, $a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$.

4°. *Тригонометричні функції:* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

5°. *Обернені тригонометричні функції:* $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

8.4 Функції декількох змінних

Пара чисел x і y називається ***упорядкованою*** і позначається (x, y), або $< x, y >$, якщо рівність $(x, y) = (x', y')$ еквівалентна одночасному виконанню двох рівностей: $x = x'$ і $y = y'$. ***Декартовим добутком*** $X \times Y$ ***двох множин*** X і Y називається множина всіх упорядкованих пар (x, y), де $x \in X$, $y \in Y$. За математичною індукцією ***декартовим добутком*** $X_1 \times \ldots \times X_n$ n ***множин*** X_1, ..., X_n називається множина $(X_1 \times \ldots \times X_{n-1}) \times X_n$. У випадку $X_1 = \ldots = X_n = X$ використовують позначення $X^n \stackrel{\triangle}{=} X \times \ldots \times X$.

Якщо в означенні функції множина $X \subset R^n$, а $Y \subset R$, то така функція називається ***функцією декількох (багатьох) змінних*** і позначається $y = f(x_1, \ldots x_n)$, де $(x_1, \ldots x_n) \in X$, $y \in Y$. Прикладом такої функції може бути $y = x_1^2 + x_2^2 + 1$.

9 Поняття про алгоритм

Алгоритмом називається інструкція по виконанню деяких дій.

Звичайно від алгоритма вимагається бути скінченним, тобто виконання дій в алгоритмі колись повинно закінчитись, і однозначним, що означає точність і недвозначність виконання дій.

Приклад 9.1. *Корінь квадратний з дійсного числа $a > 0$ можна здобути за допомогою такого алгоритму*

1) Задати число $a > 0$; задати число $x_0 > 0$ — початкове наближення до $\sqrt{a}$; задати число $\varepsilon > 0$ — точність обчислення.

2) Покласти $n = 0$.

3) Обчислити
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

4) Якщо $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, то припинити виконання алгоритму: x_{n+1} — шукане наближення до $\sqrt{a}$; в супротивному випадку збільшити n на 1 і перейти до п. 3.

Для здобуття кореня квадратного з числа $a = 2$ з точністю $\varepsilon = 0,01$ візьмемо начальним наближенням досить «далеке» від нього число $x_0 = 3$ і застосуємо до нього наведений алгоритм. Його роботу показано в таблиці.

n	x_0
0	$3,000$
1	$1,833$
2	$1,462$
3	$1,415$
4	$1,414$

Таким чином, із заданою точністю $\sqrt{2} \approx 1,41$.

10 Матриці, визначники, СЛАР

10.1 Означення і класифікація матриць

Матрицею $\mathbf{A}$ називається таблиця, що має m рядків і n стовпців, на перетині яких розташовані елементи матриці a_{ij}: числа, або інші математичні об'єкти:

$$\mathbf{A} \triangleq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Елемент a_{ij} розташовується на перетині i-го рядка і j-го стовпця матриці. Число $m \times n$ називається ***розміром*** матриці. Використовуються також скорочені позначення матриці: $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$, $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_m^n$.

Якщо $m \neq n$, то матриця називається ***прямокутною***.

Якщо кількість рядків дорівнює кількості стовпців, $m = n$, матриця називається ***квадратною*** n- го порядку і має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементи квадратної матриці a_{11}, a_{22}, $\dots$, a_{nn} утворюють ***головну діагональ*** матриці, а елементи a_{n1}, a_{n-12}, $\dots$, a_{1n} — її ***сторонню діагональ***.

Квадратна матриця називається ***верхньою трикутною***, якщо всі елементи, розташовані під її головною діагоналлю, дорівнюють нулеві:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця називається ***діагональною***, якщо всі її елементи, що не знаходяться на головній діагоналі, дорівнюють нулеві:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Діагональна матриця називається ***одиничною***, якщо всі елементи її головної діагоналі дорівнюють одиниці, і позначається $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{I} \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Іноді в позначення нижнім індексом додається порядок матриці, наприклад,

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця, всі елементи якої є нулями, називається ***нульовою*** і позначається $\mathbf{O}$. Інколи до цього означення індексами додається розмір матриці:

$$\mathbf{O}_2^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{O}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця, елементи якої, симетричні відносно головної діагоналі, дорівнюють один одному, називається ***симетричною***. Таким чином, для її елементів виконуються рівності $a_{ij} = a_{ji}$. Наприклад, симетричною є матриця

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

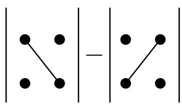
Дві матриці $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_m^n$ і $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}_m^n$ називаються ***рівними***, якщо їхні відповідні елементи дорівнюють один одному: $a_{ij} = b_{ij}$.

10.2 Визначники

Нехай $\mathbf{A} = (a_{11})$ — квадратна матриця першого порядку. Її ***визначником*** (теж ***першого порядку***) називається величина $|\mathbf{A}| = a_{11}$. ***Визначником другого порядку*** квадратної матриці $\mathbf{A}$ другого порядку називається величина

$$|\mathbf{A}| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Таким чином, для обчислення визначника другого порядку треба помножити елементи головної діагоналі матриці і відняти від результату добуток елементів сторонньої діагоналі. Це можна запам'ятати також за допомогою схеми

$|\mathbf{A}| =$ 

Наприклад,

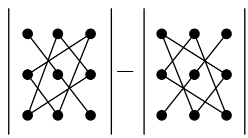
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = -11.$$

Визначником третього порядку квадратної матриці $\mathbf{A}$ третього порядку називається величина

$$|\mathbf{A}| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

З обчислювальної схеми

$|\mathbf{A}| =$ 

можна побачити, що спочатку беруться добутки елементів головної діагоналі матриці і трикутників з паралельними їй сторонами, від яких потім віднімаються добутки елементів сторонньої діагоналі і трикутників з паралельними їй сторонами.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \cdot 1 -$$

$$- 1 \cdot 2 \cdot 1 - (-1) \cdot (-3) \cdot (-1) - 3 \cdot 4 \cdot 2 =$$
$$= -4 - 12 - 3 - 2 + 3 - 24 = -42.$$

Визначники не обов'язково пов'язують з матрицями. Можна просто говорити про визначник, наприклад, другого порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Для визначників так само, як і для матриць, означають елементи, головну і сторонню діагоналі і т.і.

Мінором M_{ij} матриці (визначника) називається визначник, який виходить з матриці (визначника) викресленням i-го рядка й j-го стовпця матриці. ***Алгебраїчним доповненням*** A_{ij} матриці (визначника) називається величина $(-1)^{i+j}\, M_{ij}$.

Наприклад, для матриці

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \\ 9 & -5 & 7 \end{vmatrix}$$

маємо

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = -22, \;\; A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = 22.$$

Неважко побачити, що визначник другого порядку є сумою добутків елементів першого рядка визначника на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}, \tag{10.1}$$

бо $A_{11} = a_{22}$, $A_{12} = -a_{21}$. Те ж саме можна сказати про визначник третього порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}\right) =$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \tag{10.2}$$

Формули (10.1) і (10.2) називаються ***розкладом визначника за елементами його першого рядка***. Ці формули дають підставу означити ***визначник*** n***-го порядку*** як суму добутків елементів його першого рядка на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\triangle}{=} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}.$$

Можна показати, що розклад визначника за елементами будь-якого рядка, а також за елементами будь-якого стовпця дає таке саме число, що й його розклад за елементами першого рядка:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \tag{10.3}$$
$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{mj}A_{mj}. \tag{10.4}$$

Формула (10.3) називається ***розкладом визначника за елементами*** i***-го рядка***, а формула (10.4) називається ***розкладом визначника за елементами*** j***-го стовпця***.

Приклад 10.1. *Розкласти визначник*

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

за елементами другого стовпця.

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-3) + 2(-3) + (-3) \cdot 9 = -42.$$

□

Оскільки визначники третього порядку обчислюються досить часто, запишемо знаки $(-1)^{i+j}$ з означення алгебраїчного доповнення у вигляді (для кращого запам'ятовування)

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Дуже просто обчислюється визначник верхньої трикутної матриці (розкладом за елементами першого стовпця):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn},$$

тобто такий визначник дорівнює добутку елементів головної діагоналі. Так само обчислюється й визначник діагональної матриці.

Якщо $|\mathbf{A}| \neq 0$, то матриця $\mathbf{A}$ називається ***невиродженою***, в супротивному випадку вона називається ***виродженою***.

ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧНИКІВ

1° *Визначник не зміниться, якщо його рядки зробити стовпцями або навпаки:*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

2° *Загальний множник рядка, або стовпця можна виносити за знак визначника:*

$$\begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

3° *Визначник дорівнює нулю, якщо якісь його два рядки, або два його* *стовпці пропорційні:*

$$\begin{vmatrix} ka & a \\ kc & c \end{vmatrix} = 0.$$

4° *Визначник дорівнює нулю, якщо він має нульовий рядок, або нульовий стовпець:*

$$\begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

5° *Якщо у визначнику поміняти місцями два його рядки або два його стовпці, визначник змінить знак на протилежний:*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}.$$

6° *Визначник не зміниться, якщо до якогось його рядка додати інший рядок, помножений на деякий множник (таке саме правило діє і для стовпців):*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ \lambda a + c & \lambda b + d \end{vmatrix}.$$

7° *Якщо елементи будь-якого рядка визначника є сумою двох доданків, то визначник можна подати у вигляді суми відповідних визначників (таке саме правило діє і для стовпців):*

$$\begin{vmatrix} a & b+\beta \\ c & d+\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & \beta \\ c & \gamma \end{vmatrix}.$$

8° *Сума добутків якогось рядка (стовпця) визначннка на відповідні алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю:*

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0, \tag{10.5}$$

$$a_{1j}A_{1s} + a_{2j}A_{2s} + \cdots + a_{mj}A_{ms} = 0, \tag{10.6}$$

$$i \neq k, j \neq s.$$

10.2. Визначники

10.3 Операції (дії) над матрицями

Матриця $\mathbf{A}^T$ називається ***транспонованою*** по відношенню до матриці $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$, якщо $\mathbf{A}^T = \{a_{ji}\}$, тобто стовпці транспонованої матриці є відповідними рядками матриці $\mathbf{A}$. Отримання з заданої матриці її транспонованої матриці називається ***транспонуванням*** заданої матриці.

Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Сумою $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ матриць $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ і $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$ називається матриця, елементами якої є суми відповідних елементів матриць $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \{a_{ij} + b_{ij}\}.$$

Отримання суми матриць називається їх ***додаванням***. Очевидно, що додавати можна тільки матриці однакового розміру.

Добутком $\lambda\mathbf{A}$ матриці $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ на число λ називається матриця, елементами якої є добутки відповідних елементів матриці $\mathbf{A}$ на число λ:

$$\lambda\mathbf{A} = \{\lambda a_{ij}\}.$$

Отримання матриці $\lambda\mathbf{A}$ називається ***множенням*** матриці на число.

Різницею матриць $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ називається матриця

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} \overset{\triangle}{=} \mathbf{A} + (-1)\,\mathbf{B}.$$

Її отримання називається ***відніманням*** матриць. Віднімати можна тільки матриці однакового розміру.

Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Добутком $\mathbf{AB} = \{c_{ij}\}$ матриць $\mathbf{A} = \{a_{ik}\}_m^n$ і $\mathbf{B} = \{b_{kj}\}_n^p$ називається матриця, елементи якої дістають за формулою:

$$\mathbf{AB} = \left\{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right\}_m^p.$$

Отримання добутку матриць називається їх ***множенням***. Множити матриці можна тільки тоді, коли кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці. З формули множення випливає, що елемент c_{ij} матриці $\mathbf{AB}$ є результатом множення i-го рядка матриці $\mathbf{A}$ на j-й стовпець матриці $\mathbf{B}$ за правилом скалярного множення векторів: відповідні елементи рядка і стовпця множаться, а отримані добутки додаються один до одного.

Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 5 - 1\cdot(-3) + 5\cdot 4 & 2\cdot 2 - 1\cdot 1 + 5\cdot 3 \\ 4\cdot 5 + 3\cdot(-3) - 2\cdot 4 & 4\cdot 2 + 3\cdot 1 - 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 18 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Матриця $\mathbf{A}^{-1}$ називається ***оберненою*** до матриці $\mathbf{A}$, якщо виконується рівність

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

Таким чином, матриця $\mathbf{A}$ повинна бути квадратною.

Теорема 10.1. *Нехай $|\mathbf{A}| \neq 0$. Тоді для матриці $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_n^n$ існує обернена матриця*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\widetilde{\mathbf{A}}^T, \tag{10.7}$$

де $\widetilde{\mathbf{A}}$ — матриця, побудована з алгебраїчних доповнень елементів матриці $\mathbf{A}$: $\widetilde{\mathbf{A}} = \{A_{ij}\}$.

Доведення. Нехай $|\mathbf{A}| \neq 0$. Знайдемо добуток матриць $\mathbf{A}$ і $\widetilde{\mathbf{A}}^T$:

$$\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{A}}^T = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} \right\}.$$

Якщо $i \neq j$, то за формулою (10.5) сума дорівнює нулю, а для $i = j$ вона за формулою (10.3) є визначником матриці $\mathbf{A}$. Тому

$$\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{A}}^T = \begin{pmatrix} |\mathbf{A}| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |\mathbf{A}| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |\mathbf{A}| \end{pmatrix} = |\mathbf{A}|\,\mathbf{E}.$$

Аналогічно доводиться, що $\widetilde{\mathbf{A}}^T\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\,\mathbf{E}$. Таким чином,

$$\mathbf{A}\left(\frac{1}{|\mathbf{A}|}\widetilde{\mathbf{A}}^T\right) = \left(\frac{1}{|\mathbf{A}|}\widetilde{\mathbf{A}}^T\right)\mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

За означенням оберненої матриці виходить, що
$\widetilde{\mathbf{A}}^T/\,|\mathbf{A}|$ є оберненою матрицею. □

З теореми випливає, що для існування оберненої матриці треба, щоб матриця $\mathbf{A}$ була не тільки квадратною, але й невиродженою.

Теорема 10.2. *Для невиродженої матриці* $\mathbf{A}$ *обернена матриця єдина.*

Доведення. Від супротивного. Нехай існують дві обернені матриці до матриці $\mathbf{A}$, які позначимо $\mathbf{A}^{-1}$ і $\mathbf{B}$. Тоді $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$. Помножимо обидві частини цієї рівності на матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ зліва: $\underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}}_{\mathbf{E}}\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}$, або $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. □

Приклад 10.2. *Для матриці*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

відшукати обернену матрицю.

Розв'язання. Спочатку знайдемо визначник матриці:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 16 - 6 + 4 = 15.$$

10.3. Операції (дії) над матрицями

Далі обчислимо алгебраїчні доповнення заданої матриці:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3&-1\\2&0\end{vmatrix}=2,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}4&-1\\1&0\end{vmatrix}=-1,\ A_{13}=\begin{vmatrix}4&3\\1&2\end{vmatrix}=5,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-1&2\\2&0\end{vmatrix}=4,\ A_{22}=\begin{vmatrix}2&2\\1&0\end{vmatrix}=-2,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-1&2\\3&-1\end{vmatrix}=-5,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}2&2\\4&-1\end{vmatrix}=10,\ A_{33}=\begin{vmatrix}2&-1\\4&3\end{vmatrix}=10.$$

Тепер з цих алгебраїчних доповнень побудуємо матрицю $\widetilde{\mathbf{A}}$ і транспонуємо її:

$$\widetilde{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}2&-1&5\\4&-2&-5\\-5&10&10\end{pmatrix},\ \widetilde{\mathbf{A}}^T=\begin{pmatrix}2&4&-5\\-1&-2&10\\5&-5&10\end{pmatrix}.$$

За формулою (10.7) дістаємо матрицю, обернену до заданої матриці:

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}2&4&-5\\-1&-2&10\\5&-5&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}{}^2/_{15}&{}^4/_{15}&{}^{-1}/_3\\{}^{-1}/_{15}&{}^{-2}/_{15}&{}^2/_3\\{}^1/_3&{}^{-1}/_3&{}^2/_3\end{pmatrix}.$$

$\square$

ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАЦІЙ НАД МАТРИЦЯМИ

1°. $\left(\mathbf{A}^T\right)^T=\mathbf{A}$.

2°. *Для симетричної матриці* $A^T=\mathbf{A}$.

3°. $\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{A}$.

4°. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$.

5°. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$.

6°. $(\alpha\beta)\,\mathbf{A} = \alpha\,(\beta\mathbf{A})$.

7°. $\mathbf{AE} = \mathbf{A}$, $\mathbf{EA} = \mathbf{A}$.

8°. $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

9°. $\mathbf{A}\,(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\,\mathbf{C}$.

10°. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$.

11°. $(\alpha\mathbf{A})^T = a\mathbf{A}^T$.

12°. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

13°. $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$.

14°. $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T = \left(\mathbf{A}^T\right)^{-1}$.

15°. $(\alpha+\beta)\,\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$.

16°. $\alpha\,(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$.

17°. $\mathbf{A}\,(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$, $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\,\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}$.

18°. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

19°. *Якщо* $\mathbf{O}$ *— квадратна матриця, то* $|\mathbf{O}| = 0$.

20°. $|\mathbf{E}| = 1$.

21°. $\left|\mathbf{A}^T\right| = |\mathbf{A}|$.

22°. $|\alpha\mathbf{A}| = \alpha^n\,|\mathbf{A}|$.

23°. $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$.

24°. $\left|\mathbf{A}^{-1}\right| = |\mathbf{A}|^{-1}$.

Властивість $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ називається ***некомутативністю*** множення матриць. Якщо для деяких матриць все-таки виконується рівність $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, то матриці $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ називаються ***комутативними***, або ***переставними***.

10.4 Ранг матриці

Елементи матриці, що стоять на перетині деяких її r рядків і r стовпців утворюють квадратну матрицю порядку r. Визначник цієї матриці називається ***мінором*** r***-го порядку***.

Базисним мінором r***-го порядку*** називається мінор r-го порядку, якщо він не дорівнює нулю, а всі мінори $(r+1)$-го порядку або дорівнюють нулю, або не існують.

Рангом матриці називається порядок її базисного мінора. Ранг матриці $\mathbf{A}$ позначається $\operatorname{rg}\mathbf{A}$.

Приклад 10.3. *Визначити ранг матриці*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Ранг цієї матриці дорівнює двом, бо мінор, позначений квадратиком, дорівнює $5 \neq 0$; всі мінори третього порядку дорівнюють нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

а мінори четвертого й вищих порядків не існують. Тому вказаний мінор є базисним і ранг матриці дорівнює його порядку, тобто двом. □

Нехай $_1$, $\mathbf{c}_2$, …, $\mathbf{c}_k$ — деякі рядки (стовпці) матриці розміру $m \times n$. Їх ***лінійною комбінацією*** називається вираз $\lambda_1\mathbf{c}_1 + \lambda_2\mathbf{c}_2 + \dots + \lambda_k\mathbf{c}_k$, де λ_1, λ_2, …, λ_k — числа, які називають ***коефіцієнтами лінійної комбініції***

. Лінійна комбінація називається ***тривіальною***, якщо всі її коефіцієнти дорівнюють нулю. В супротивному випадку вона називається ***нетривіальною***. Рядки (стовпці) $_1$, $\mathbf{c}_2$, …, $\mathbf{c}_k$ називаються ***лінійно незалежними*** , якщо тільки їх тривіальна лінійна комбінація може дорівнювати $(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{s})$, де $s = n$ для рядків і $s = m$ для стовпців. В протилежному випадку лінійна комбінація називається ***лінійно залежною***.

Теорема 10.3. *В будь-якій матриці кожний рядок є лінійною комбінацією рядків, що містять рядки базисного мінора матриці. Те ж саме справедливе й для стовпців.*

Теорема 10.4. *Максимальна кількість лінійно незалежних рядків матриці дорівнює максимальній кількості її лінійно незалежних стовпців і дорівнює рангу матриці.*

Так, в матриці з прикладу 10.3 рядки залежні, бо третій рядок є сумою перших двох. Стовпці теж залежні; якщо позначити i-й стовпець $\mathbf{c}_i$, то залежності виразяться формулами

$$\mathbf{c}_1 = \frac{4}{5}\mathbf{c}_3 - \frac{7}{5}\mathbf{c}_4, \ \mathbf{c}_2 = -\frac{8}{5}\mathbf{c}_3 + \frac{14}{5}\mathbf{c}_4.$$

Елементарними перетвореннями матриці називаються

1) переставлення двох рядків матриці;

2) множення будь-якого рядка матриці на деяке число;

3) додавання до рядка матриці іншого рядка, помноженого на деяке число;

4) такі ж операції для стовпців.

Теорема 10.5. *Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.*

Теорема 10.6. *За допомогою елементарних перетворень будь-яка ма-*

триця може бути зведена до вигляду

$$\widehat{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} \alpha_{11} & * & * & * & * & \dots & * \\ 0 & \alpha_{22} & * & * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{rr} & * & \dots & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right), \tag{10.8}$$

де $\alpha_{11} \neq 0$, $\alpha_{22} \neq 0$, $\dots$, $\alpha_{rr} \neq 0$, $*$ — *якісь числа.*

Висновок 10.1. *Оскільки мінор r-го порядку, розташований в лівому верхньому куті матриці, не дорівнює 0, а всі мінори $(r+1)$-го порядку дорівнюють 0, то* $\operatorname{rg} \widehat{\mathbf{A}} = \operatorname{rg} A = r$.

Приклад 10.4. *Відшукати ранг матриці з прикладу 10.3 за допомогою елементарних перетворень.*

Розв'язання. В матриці $\mathbf{A}$ додамо до другого рядка перший, помножений на 2, а також додамо перший рядок до третього:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

В отриманій матриці помножимо другий рядок на -1 і додамо до третього рядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Переставимо місцями стовпці, щоб перший з них став третім:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Бачимо, що матриця набрала вигляду (10.8), з якого дістаємо, що $r = 2 = \operatorname{rg} A$. □

10.5 СЛАР

10.5.1 Означення

Загальною системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) називається стистема рівнянь такого вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{10.9}$$

де змінні x_1, …, x_n називаються ***невідомими*** (які треба знайти), числа a_{ij} — ***коефіцієнтами*** системи, b_i — ***вільними членами***. ***Розв'язком*** системи (10.9) називається набір значень змінних x_1, …, x_n, які кожне рівняння системи перетворюють на правильну числову рівність.

Введемо матрицю

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

яка називається ***матрицею системи***, та матриці-стовпці невідомих і вільних членів, відповідно:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тоді систему (10.9) можна записати в матричному вигляді

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \tag{10.10}$$

10.5.2 Правило Крамера

Спочатку розглянемо систему (10.10) з квадратною матрицею: $m = n$. Така система називається ***СЛАР*** n***-го порядку***.

Теорема 10.7. *Якщо матриця системи* (10.10) *квадратна й невироджена, то система має єдиний розв'язок.*

Доведення. Систему з квадратною матрицею можна записати так:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i. \tag{10.11}$$

Припустимо, що система (10.11) має розв'язки і $x_1, \dots, x_n$ — один з таких розв'язків. Помножимо обидві частини кожного її k-го рівняння на алгебраїчне доповнення A_{ik} і додамо рівняння одне до одного:

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ik} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ik}.$$

В цій рівності сума $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik}$ дорівнює нулю, якщо $j \neq k$ завдяки (10.6) і є визначником $\Delta = |\mathbf{A}|$ матриці системи, якщо $j = k$. Тому виходить, що

$$x_k \Delta = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ik}. \tag{10.12}$$

Але $\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ik} = \Delta_k$, де

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_3 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— визначник, побудований заміною k-го стовпця визначника Δ стовпцем вільних членів. Тому рівняння (10.12) можна записати так:

$$x_k \Delta = \Delta_k, \tag{10.13}$$

звідки, враховуючи, що $\Delta \neq 0$, бо матриця системи невироджена, дістаємо

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \; k = \overline{1,n}. \tag{10.14}$$

Таким чином, будь-який розв'язок системи (10.11) записується формулами (10.14). Оскільки праві частини цих формул однозначно визначаються коефіцієнтами і правими частинами системи (10.11), то такий розв'язок єдиний. Тепер доведемо, що система має хоча б один розв'язок. Покажемо, що таким розв'язком є (10.14). Для цього підставимо в систему (10.11) замість невідомих їхні вирази з (10.14), а далі розкладемо визначники Δ_j за j-м стовпцем:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\Delta_j}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{s=1}^{n} b_s A_{sj} = \frac{1}{\Delta} \sum_{s=1}^{n} b_s \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{sj} =$$
$$= \frac{1}{\Delta} b_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \frac{1}{\Delta} b_i \Delta = b_i,$$

бо всі доданки в сумі по s дорівнюють нулю, коли $s \neq i$ і лише для $s = i$ відповідний доданок є визначником матриці системи. □

Визначник Δ називається ***головним визначником*** системи, а визначники Δ_j, $j = \overline{1,n}$ — ***допоміжними***. Розв'язок системи (10.11) за формулами (10.14) називається ***правилом Крамера***.

10.5. СЛАР

Приклад 10.5. *Розв'язати (якщо це можливо) систему*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 5x_1 - 4x_2 = 14, \end{cases}$$

за правилом Крамера.

Розв'язання. Обчислимо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 15 = -23.$$

Оскільки головний визначник системи не дорівнює нулю, систему можна розв'язати за правилом Крамера. Обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 14 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 42 = -46, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 14 \end{vmatrix} = 28 - 5 = 23.$$

За формулами (10.14) знаходимо

$$x_1 = \frac{-46}{-23} = 2,$$
$$x_2 = \frac{23}{-23} = -1.$$

□

Далі будемо використовувати так звану розширену матрицю системи, яка доповнює матрицю **A** стовпцем вільних членів:

$$\overline{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Система (10.9) називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок. В протилежному випадку вона називається ***несумісною***.

10.5. СЛАР

Теорема 10.8 (Кронекера-Капеллі)**.** *Загальна СЛАР є сумісною тоді й тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу її розширеної матриці:* $\operatorname{rg}\mathbf{A} = \operatorname{rg}\overline{\mathbf{A}}$.

Для розв'язання системи (10.9) існує алгоритм, який не тільки дозволяє знайти її розв'язки (навіть, коли їх нескінченна множина), але й виявити несумісність системи та обчислити ранг її матриці. Цей алгоритм називається ***алгоритмом Гаусса***, або ***алгоритмом послідовного виключення невідомих***. Перед його застосуванням всі рядки й стовпці розширеної матриці, до якої застосовується алгоритм Гаусса, вважаються невибраними.

АЛГОРИТМ ГАУССА (ПРЯМИЙ ХІД)

1) Якщо $\forall(i,j)\ a_{ij} = 0$, то алгоритм закінчено. В супротивному випадку перейти до п. 2.

2) Якщо в поточній матриці залишився тільки один невибраний рядок, то перейти до п. 5; в супротивному випадку перейти до п. 3.

3) В невибраному рядку вибрати $a_{ij} \neq 0$ і до кожного k-го з невибраних рядків, крім i-го, додати i-й рядок, помножений на $-a_{kj}/a_{ij}$. В результаті в кожному (крім i-го) k-му з невибраних рядків на j-му місці буде стояти нуль:

$$a_{ij}\left(-a_{kj}/a_{ij}\right) + a_{kj} = 0.$$

   Після цих обчислень i-й рядок і j-й стовпець вважаються вибраними.

4) Перейти до п. 2.

5) Переставити вибрані рядки й стовпці матриці так, щоб вибрані рядки йшли зверху вниз, а вибрані стовпці — зліва направо в тому порядку, в якому вони вибирались.

В результаті застосування алгоритма Гаусса розширена матриця системи перетворюється на ступінчасту матрицю

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} & c_{1r+1} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2r} & c_{2r+1} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & c_{rr} & c_{rr+1} & \dots & c_{rn} & d_r \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_m \end{array}\right), \tag{10.15}$$

причому, $c_{11} \neq 0$, …, $c_{rr} \neq 0$. Оскільки використовуються тільки елементарні перетворення матриці, які не змінють рангу матриці, то ранг ступінчастої матриці дорівнює рангу розширеної матриці.

З вигляду ступінчастої матриці (10.15) випливає, що ранг матриці $\mathbf{A}$ системи дорівнює r, бо базисний мінор r-го порядку стоїть в її верхньому лівому куті. Якщо $d_{r+1} = \ldots = d_m = 0$, то і ранг розширеної матриці дорівнює r і тоді за теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна.

Якщо ж, хоча б один з елементів матриці d_{r+1}, …, d_m не дорівнює 0, то система не сумісна. В цьому випадку алгоритм Гаусса далі не застосовується.

Нехай система сумісна, тобто $d_{r+1} = \ldots = d_m = 0$. Це означає, що останні рядки матриці (10.15) з $(r+1)$-го по m-й нульові. Відкинемо їх, бо їм відповідають рівняння системи з нульовими коефіцієнтами та нульовими вільними членами. Першим рядкам матриці відповідає система рівнянь, еквівалентна системі (10.9):

$$\left\{\begin{array}{rl} c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + \ldots + c_{1r}x'_r = & d_1 - c_{1r+1}x'_{r+1} - \ldots - c_{1n}x'_n, \\ \multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ c_{r-1r-1}x'_{r-1} + c_{r-1r}x'_r = & d_2 - c_{r-1r+1}x'_{r+1} - \ldots - c_{r-1n}x'_n, \\ c_{rr}x'_r = & d_r - c_{rr+1}x'_{r+1} - \ldots - c_{rn}x'_n. \end{array}\right. \tag{10.16}$$

Невідомі стали штрихованими, бо в результаті переставляння стовпців, невідома x_1, наприклад, може зайняти третю позицію, а не першу і т.п. Невідомі x'_1, ..., x'_r називають ***базисними***, а невідомі x'_{r+1}, ..., x'_n — ***вільними***. Відшукання невідомих виконує друга частина алгоритму Гаусса.

АЛГОРИТМ ГАУССА (ЗВОРОТНИЙ ХІД)

- З останнього рядка системи (10.16) виразити x'_r через вільні невідомі x'_{r+1}, ..., x'_n.
- Підставити отриманий в попередньому п. вираз в передостаннє рівняння системи (10.16) замість невідомої x'_r і виразити невідому x'_{r-1} через вільні невідомі.

. . . .

- Підставити отримані в попередніх п. вирази в перше рівняння системи (10.16) замість невідомих x'_r, ..., x'_2 і виразити невідому x'_1 через вільні невідомі.

Отримані вирази базисних невідомих через вільні невідомі вважаються загальним розв'язком системи (10.9). Надаючи значень вільним змінним і обчислюючи з отриманих виразів базисні змінні, можна дістати будь-який розв'язок системи. Очевидно, таких розв'язків буде нескінченна множина (оскільки вільні змінні можна брати будь- якими, а вони є частиною розв'язку), якщо $r < n$.

Якщо $r = n$, вирази базисних невідомих через вільні невідомі є просто числами і тому здобутий таким чином розв'язок — єдиний.

Використовуючи матриці

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1r} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & \dots & c_{rr} \end{pmatrix}, \ \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} c_{1r+1} & \dots & c_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ c_{rr+1} & \dots & c_{rn} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_r \end{pmatrix}, \ \mathbf{z} = \begin{pmatrix} x'_{r+1} \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_r \end{pmatrix},$$

розв'язок системи (10.16), якщо він існує, можна записати у вигляді

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}^{-1}\left(\mathbf{d} - \mathbf{C}_1\mathbf{z}\right). \tag{10.17}$$

10.5. СЛАР

Приклад 10.6. *Розв'язати методом Гаусса СЛАР*

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 5, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= -7, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 &= 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо розширену матрицю системи

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & -2 & 5 & -7 \\ 4 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

і, використовуючи елементарні перетворення, зведемо її до ступінчастого вигляду. Для цього помножимо перший рядок матриці на -2 і додамо до другого, а також помножимо перший рядок на -4 і додамо до третього:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -8 & 9 & -17 \\ 0 & -8 & 9 & -17 \end{array}\right).$$

Далі помножимо другий рядок отриманої матриці на -1 і додамо до третього:

$$\left(\begin{array}{rr|r|r} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -8 & 9 & -17 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отримали матрицю вигляду (10.15), з якого видно, що ранг матриці системи і її розширеної матриці дорівнює 2. Таким чином, задана система сумісна. Базисний мінор обох матриць знаходиться в лівому верхньомц куті отриманої матриці и тому невідомі x_1 і x_2 є базисними, а невідома x_3 — вільною. Отриманій матриці відповідає СЛАР, еквівалентна заданій системі (див. СЛАР (10.16)):

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 5, \\ -8x_2 + 9x_3 &= -17, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 &= 5 + 2x_3, \\ -8x_2 &= -17 - 9x_3, \end{cases}$$

З другого рівняння знаходимо вираз для x_2 у вигляді

$$x_2 = (17 + 9x_3)/8.$$

Підставляючи його в перше рівняння замість x_2 дістаємо

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{3(17 + 9x_3)}{8} &= 5 + 2x_3, \\ 8x_1 + 51 + 27x_3 &= 40 + 16x_3, \\ 8x_1 &= -11 - 11x_3, \\ x_1 &= -\frac{11}{8}(1 + x_3). \end{aligned}$$

Запишемо отримані вирази базисних невідомих через вільні:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{11}{8}(1 + x_3), \\ x_2 &= \frac{1}{8}(17 + 9x_3). \end{aligned}$$

Ці вирази і є загальним розв'язком заданої системи.

Можна записати цей розв'язок у вигляді (10.17):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & {}^3/_8 \\ 0 & {}^{-1}/_8 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix} x_3 \right],$$

де

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & {}^3\!/_8 \\ 0 & {}^{-1}\!/_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}^{-1}, \ \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ -17 \end{pmatrix}, \ \mathbf{z} = x_3.$$

□

Нехай матриця системи квадратна і невироджена. Тоді рівняння (10.10) можна розв'язати, помноживши обидві його частини на матрицю, обернену до матриці $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Оскільки $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$, то

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Таким чином, для розв'язання СЛАР треба помножити стовпець вільних членів зліва на матрицю $\mathbf{A}^{-1}$. Такий метод розв'язання системи називається ***матричним***.

Приклад 10.7. *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 45, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 &= -30, \\ x_1 + 2x_2 &= 15. \end{cases}$$

Розв'язання. Матриця системи має вигляд

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Її обернена матриця була знайдена в прикладі 10.2, а стовпець вільних членів є

$$\begin{pmatrix} 45 \\ -30 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Тому матричний метод дає

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^2/_{15} & {}^4/_{15} & {}^{-1}/_3 \\ {}^{-1}/_{15} & {}^{-2}/_{15} & {}^2/_3 \\ {}^1/_3 & {}^{-1}/_3 & {}^2/_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 45 \\ -30 \\ 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6-8-5 \\ -3+4+10 \\ 15+10+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ 35 \end{pmatrix}.$$

□

Якщо в системі (10.10) $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, то СЛАР називається ***неоднорідною***. В супротивному випадку вона називається ***однорідною***.

Розглянемо питання, пов'язані з однорідними СЛАР. Така система записується як

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{10.18}$$

і завжди має один розв'язок: $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, який називається ***тривіальним***. ***Нетривіальним*** називається розв'язок $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Як було показано, якщо ранг матриці системи дорівнює числу невідомих, однорідна СЛАР має єдиний і тому тривіальний розв'язок.

Теорема 10.9. *Нехай матриця однорідної СЛАР має ранг $r < n$. Тоді система має безліч нетривіальних розв'язків.*

Доведення. Це випливає з міркувань, поданих після розв'язання системи (10.16) методом Гаусса. Вони справедливі не оглядаючись на однорідність чи неоднорідність системи. □

Теорема 10.10. *Нехай в однорідній СЛАР кількість рівнянь менш, ніж кількість невідомих ($m < n$). Тоді система має нетривіальний розв'язок.*

Доведення. В такому разі, очевидно, що $\operatorname{rg}\mathbf{A} < n$, і з попередньої теореми випливає шукане. □

Теорема 10.11. *Однорідна СЛАР з квадратною матрицею* $\mathbf{A}$ *має єдиний тривіальний розв'язок тоді й тільки тоді, коли* $|\mathbf{A}| \neq 0$.

Доведення. Необхідність. Якщо $|\mathbf{A}| = 0$, тобто єдиний мінор n-го порядку матриці $\mathbf{A}$ дорівнює 0, то $\operatorname{rg}\mathbf{A} < n$ і з попередніх теорем виходить, що система (10.18) має безліч розв'язків.

Достатність. Для $|\mathbf{A}| \neq 0$ з теореми (10.7) випливає, що система має єдиний розв'язок, який, тоді обов'язково тривіальний, бо останній завжди є розв'язком однорідної системи. □

10.5.3 Геометричні інтерпретації СЛАР

Розглянемо СЛАР 2-го порядку

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{10.19}$$

причому, $a_{11}^2 + a_{12}^2 \neq 0$, $a_{21}^2 + a_{22}^2 \neq 0$. Оскільки рівняння $ax + by = c$, $a^2 + b^2 \neq \neq 0$, є рівнянням прямої на площині xOy, то рівняння, з яких складається система (10.19), є рівняннями прямих на площині x_1Ox_2. Якщо головний визначник системи не дорівнює нулю, система має єдиний розв'язок, який знаходиться за правилом Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Точка $(\Delta_1/\Delta, \Delta_2/\Delta)$ є точкою перетину прямих, рівняння яких складають систему (10.19). Якщо ж $\Delta = 0$, то можливі два випадки: або $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, або $\Delta_1 \neq 0 \vee \Delta_2 \neq 0$. В першому випадку

$$\Delta = 0 \iff a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12},$$
$$\Delta_1 = 0 \iff b_1a_{22} = b_2a_{12},$$
$$\Delta_2 = 0 \iff b_1a_{21} = b_2a_{11}.$$

Нехай, наприклад, $a_{11} \neq 0$. Тоді

$$a_{22} = \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12},\ b_2 = \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1,$$

або

$$a_{22} = ka_{12},\ b_2 = kb_1, \tag{10.20}$$

де

$$k = \frac{a_{21}}{a_{11}}. \tag{10.21}$$

З (10.21) випливає, що $a_{21} = ka_{11}$. З цієї рівності і рівностей (10.20) виходить, що друге рівняння системи є результатом множення першого рівняння на число k. Таким чином, ці рівняння еквівалентні і визначають одну й ту саму пряму, або ще кажуть, що прямі, відповідні системі (10.19), збігаються. Розв'язком системи є нескінченна множина точок, розташованих на прямій.

В другому випадку, коли, наприклад, $\Delta_1 \neq 0$, з рівняння (10.13) для $k = 1$ отримуємо неможливу рівність $x_1 0 = \Delta_1 \neq 0$. Тому в даному випадку система розв'язків не має. Геометрично це означає, що прямі, відповідні рівнянням системи, паралельні одна одній.

Сформулюємо все сказане в компактній формі.

1) Якщо $\Delta \neq 0$, то система (10.19) має єдиний розв'язок; прямі, відповідні рівнянням системи, перетинаються.

2) Якщо $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то система (10.19) має безліч розв'язків; прямі, відповідні рівнянням системи, збігаються.

3) Якщо $\Delta = 0$, $\Delta_1 \neq 0 \vee \Delta_2 \neq 0$, то система (10.19) розв'язків не має; прямі, відповідні рівнянням системи, паралельні.

Аналогічно, для системи третього порядку

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2 \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, кожне з рівнянь якої є рівнянням площини у тривимірному просторі, можна сформулювати такі висновки.

1) Якщо $\Delta \neq 0$, то система (10.19) має єдиний розв'язок; площини, відповідні рівнянням системи, перетинаються, причому, є єдина точка, спільна всім площинам водночас.

2) Якщо $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, то система (10.19) або має безліч розв'язків (площини, відповідні рівнянням системи, або збігаються, або перетинаються по прямій), або зовсім не має розв'язків (площини, відповідні рівнянням системи, паралельні, причому, можуть парами збігатись).

3) Якщо $\Delta = 0$, $\Delta_1 \neq 0 \vee \Delta_2 \neq 0 \vee \Delta_3 \neq 0$, то система (10.19) розв'язків не має; площини, відповідні рівнянням системи, не мають точки, що належить всім площинам водночас.

11 Наближені обчислення

Звичайно точні значення величин невідомі, оскільки їх вимірювання неточні. Навіть точне число π в чисельних розрахунках береться з деяким наближенням. Більш того скінченним десятковим дробом можна записати лише такі звичайні дроби, в яких знаменник містить тільки прості множники 2 і 5. Тому в інших випадках доводиться застосовувати наближене значення числа у вигляді скінченного десяткового дробу, що містить обмежену кількість цифр, навіть якщо воно подається несінченним десятковим дробом. Значення фізичних величин, отриманих з експериментів , теж називають наближеними величинами.

11.1 Абсолютна похибка

Позначимо a точне, і $\overline{a}$ — наближене значення величини. ***Абсолютною похибкою*** $\overline{\Delta}$ наближення називається модуль різниці точного і наближеного значень величини:

$$\overline{\Delta} \triangleq |a - \overline{a}|\,.$$

Оскільки точне значення величини a звичайно невідомо, то величину $\overline{\Delta}$ оцінюють, виходячи з можливостей вимірювальних приладів:

$$\overline{\Delta} \leq \Delta,$$

де Δ — абсолютна похибка прилада. Число Δ теж називають абсолютною похибкою наближення величини a і цей факт записують так:

$$a = \overline{a} \pm \Delta.$$

З умови $|a - \overline{a}| \leq \Delta$ випливає, що $\overline{a} - \Delta \leq a \leq \overline{a} + \Delta$.

Приклад 11.1. *Відомо, що динамометр вимірює силу з точністю до 0,01 Н. Стрілка показала 10 Н. Тоді шукана сила записується у вигляді* $f = 10 \pm 0,01H$.

Абсолютна похибка недостатньо характеризує якість наближення. Якщо вона дорівнює 1 м для вимірювання відстані між двома містами і дорівнює 1м для вимірювання відстані між двома домами, то натурально вважати, що в першому випадку вимірювання точніше.

11.2 Відносна похибка

Відносною похибкою $\overline{\delta}$ наближення називається відношення абсолютної похибки до модуля точного значення величини:

$$\overline{\delta} \triangleq \frac{\overline{\Delta}}{|a|}.$$

Оскільки $\overline{\Delta}$ і a звичайно невідомі, використовують величину

$$\delta \triangleq \frac{\Delta}{|\overline{a}|},$$

яку теж називають відносною похибкою.

Іноді в характеристиці прилада, зазначають не абсолютну, а відносну похибку, яку він допускає. Відносну похибку звичайно вимірюють у %.

Приклад 11.2. *Відстань між протилежними межами міста дорівнює* $s = 30 \pm 0,001$ *км. Тоді відносна похибка цієї величини є*

$$\delta = \frac{0,001}{30} = \frac{1}{30000} \approx 0,000033; \;\; \delta \approx 0,0033\,\%.$$

Приклад 11.3. *Відстань між домами дорівнює* $l = 10 \pm 1$ *м. Відносна похибка є*

$$\delta = \frac{1}{10}; \; \delta = 10\,\%.$$

11.3 Запис наближених значень чисел

Значущими цифрами цілого числа називаються всі його цифри, крім нулів, розташованих в кінці числа, якщо вони стоять замість невідомих або відкинутих цифр. Значущі цифри будемо позначати підкреслюванням: $\underline{1234}$, $\underline{1200}$ (якщо число точне), $\underline{12}00$ (якщо число округлене).

Значущими цифрами десяткового дробу називаються всі його цифри, крім нулів, розташованих лівіше першої цифри, що не дорівнює нулеві: $\underline{4,321}$, $0,0\underline{170}$.

Цифра деякого десяткового розряду в запису наближеного значення числа називається ***вірною***, якщо абсолютна похибка наближення не перевищує одиниці цього розряду.

Сумнівними називаються всі цифри наближеного значення числа, розташовані правіше останньої вірної цифри.

Приклад 11.4. *Нехай* $a = 4,63 \pm 0,05$. *Знайти вірні й сумнівні цифри наближення.*

Розв'язання. З запису величини віходить, що $4,58 \le a \le 4,68$. Цифра 6 вірна, оскільки $\Delta = 0,05 < 0,1$. Цифра 4 теж вірна. Цифра 3 сумнівна, бо $\Delta = 0,05 > 0,01$. Тобто, за наближення можна взяти $\underline{4,6}$. □

11.4 Округлення

Нехай подане число

$$\overline{a_1a_2\ldots a_n}bc_1\ldots c_m,$$

яке треба округлити до n значущих цифр. Назви: a_n — остання цифра, що зберігається; b — перша цифра, що відкидається.

Округлення виконують за таким правилом. Цифри b, c_1, ... , c_m заміннюють нулями, а далі, якщо

1) $b < 5$, то a_n не змінюється: $\overline{13}246 \approx \underline{13}000$; $0,\overline{2}4786 \approx 0,\underline{2}$;

2) $b > 5$, то a_n збільшується на одиницю: $\overline{14}751 \approx \underline{15}000$; $\overline{0,024}8 \approx$ $\approx 0,0\underline{25}$;

3) $b = 5$ і $\exists(i)\ \ c_i \neq 0$, то a_n збільшується на одиницю: $\overline{13}501 \approx$ $\approx \underline{14}000$; $\overline{0,027}53 \approx 0,0\underline{28}$;

4) $b = 5$ і $c_1 = \cdots = c_m = 0$, то a_n не змінюється, якщо вона парна і збільшується на 1, якщо вона непарна: $\overline{13}500 \approx \underline{14}000$; $\overline{12}500 \approx \underline{12}000$; $\overline{0,02}5 \approx 0,0\underline{2}$; $\overline{0,07}5 \approx 0,0\underline{8}$.

11.5 Дії над наближеними величинами

11.5.1 Додавання й віднімання наближених величин

Якщо наближені величини a і b додаються або віднімаються, їхні абсолютні похибки додаються:

$$\Delta_{a+b} = \Delta_{a-b} = \Delta_a + \Delta_b, \tag{11.1}$$

а відносні похибки обчислюються за формулами

$$\delta_{a+b} = \frac{\Delta_a + \Delta_b}{|\overline{a} + \overline{b}|},$$
$$\delta_{a-b} = \frac{\Delta_a + \Delta_b}{|\overline{a} - \overline{b}|}. \quad (11.2)$$

З рівності (11.1) випливає, що точність додавання й віднімання визначається точністю найменш точних доданків.

З формули (11.2) виходить, що віднімання близьких за величиною чисел може призвести до істотної втрати точності.

Правило для підрахування вірних цифр для додавання і віднімання наближених чисел, в запису яких всі цифри вірні:

1) вилучити доданок з найменшою кількістю вірних цифр;

2) округлити решту доданків, залишаючи в кожному на один десятковий знак більше, ніж у вилученому доданку;

3) виконати додавання або віднімання, враховуючи всі знаки, що збереглися;

4) округлити результат до передостаннього знака.

Приклад 11.5. *Додати й відняти наближені величини*

$$a = 2,386 \pm 0,002, \ \ b = 8,42 \pm 0,03.$$

Розв'язання. Виконаємо додавання: $\overline{a}+\overline{b} = 2,386+8,42 = 10,806$. Знайдемо абсолютну і відносну похибки суми: $\Delta_{a+b} = \Delta_a + \Delta_b = 0,032$; $\delta_{a+b} = 0,032/10,806 = 0,003$. Таким чином, $a + b = 10,81 \pm 0,03$. Тепер виконаємо віднімання: $\overline{a} - \overline{b} = 2,386 - 8,42 = -6,034$ і знайдемо абсолютну і відносну похибки різниці: $\delta_{a-b} = 0,032/6,034 = 0,0053$. Виходить $a - b = -6,03 \pm 0,03$. □

Приклад 11.6. *Нехай* $a = \underline{2,386}$; $b = \underline{8,4}$. *Визначити вірні цифри для суми цих величин.*

Розв'язання. Вилучаємо найменш точний доданок b і округляємо $a = 2,39$. Виконуємо додавання: $a + b = 10,79$. Округляємо результат: $a + b = 10,8$. □

11.5.2 Множення й ділення наближених величин

Якщо наближені величини a і b множаться або діляться, їхні відносні похибки додаються:

$$\delta_{ab} = \delta_{a/b} = \delta_a + \delta_b. \tag{11.3}$$

Назвемо величини, над якими виконуються ариметичні дії, ***операндами***.

Правило для підрахування вірних цифр для множення й ділення наближених чисел, в запису яких всі цифри вірні:

1) вилучити операнд з найменшою кількістю вірних цифр;

2) округлити решту операндів, залишаючи в кожному на один десятковий знак більше, ніж у вилученому операнді;

3) виконати множення або ділення, враховуючи всі знаки, що зберіглися;

4) зберігти в отриманому результаті стільки значущих цифр, скільки їх має вилучений операнд.

Приклад 11.7. *Помножити наближені величини* $a = 3,746 \pm 0,002$*;* $b = 4,87 \pm 0,01$.

Розв'язання. відносні похибки заданих величин $\delta_a = 0,002/3,746 = 0,0005$; $\delta_b = 0,01/4,87 = 0,002$. За формулою (11.3) дістаємо відносну похибку добутку $\delta_{ab} = 0,0005 + 0,002 = 0,0025$. Тоді абсолютна похибка становить $\Delta_{ab} = \left|\overline{ab}\right| \delta_{ab} = 18,24302 \cdot 0,0025 = 0,05$. Таким чином, $ab = 18,24 \pm 0,05$. □

Приклад 11.8. *Нехай* $a = \underline{3,75}$*;* $b = \underline{4,9}$. *Визначити вірні цифри для добутку цих величин.*

Розв'язання. Вилучаємо найменш точний доданок b і округляємо $a = 3,75$. Виконуємо множення: $ab = 18,375$. Округляємо результат: $ab = 18,4$. □

11.5.3 Піднесення до степеня

Відносна похибка степеня:

$$\delta_{a^n} = n\delta_a.$$

Відносна похибка кореня:

$$\delta_{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{n}\delta_a.$$

В результаті піднесення до степеня і добування кореня треба зберігати стільки значущих цифр, сільки їх має відповідно основа степеня і підкорене число.

При обчисленні проміжних результатів треба зберігати на одну цифру більше, ніж в розглянутих вище правилах, причому, в остаточному результаті запасну цифру не враховувати.

Приклад 11.9. *Знайти*

$$d = \frac{ab + c}{b^2 - 4c},$$

де $a = 0,25 \pm 0,01$*;* $b = 0,375 \pm 0,003$*;* $c = 0,218 \pm 0,002$.

Розв'язання. Виконаємо множення в чисельнику:

$$\delta_a = \frac{0,01}{0,25} = 0,04;\ \delta_b = \frac{0,003}{0,375} = 0,008;\ \delta_{ab} = \delta_a + \delta_b = 0,048;$$
$$\overline{a}\overline{b} = 0,09375;\ \Delta_{ab} = \left|\overline{a}\overline{b}\right| \delta_{ab} = 0,09375 \cdot 0,048 = 0,0045;$$
$$ab = 0,0938 \pm 0,0045.$$

Виконаємо додавання в чисельнику:

$$\Delta_{ab+c} = \Delta_{ab} + \Delta_c = 0,0045 + 0,002 = 0,0065;$$
$$\overline{a}\overline{b} + \overline{c} = 0,0938 + 0,218 = 0,3118;\ \delta_{ab+c} = \frac{0,0065}{0,3118} = 0,021;$$
$$ab + c = 0,3118 \pm 0,0021.$$

Виконаємо піднесення до квадрата:

$$\delta_{b^2} = 2\delta_b = 2 \cdot 0,008 = 0,016;\ \overline{b}^2 = 0,140625;$$
$$\Delta_{b^2} = 0,140625 \cdot 0.016 = 0,023;\ b^2 = 0,1406 \pm 0,0023.$$

Виконаємо віднімання в знаменнику:

$$\Delta_{b^2-4c} = \Delta_{b^2} + 4\Delta_c = 0,0023 + 0,008 = 0,0103;$$
$$\overline{b}^2 - 4\overline{c} = 0,1406 - 4 \cdot 0,218 = -0,7314;\ \delta_{b^2-4c} = \frac{0,01}{0,731} = 0,014;$$
$$b^2 - 4c = -0,731 \pm 0,010.$$

Нарешті обчислюємо величину d діленням:

$$\delta_d = \delta_{ab+c} + \delta_{b^2-4c} = 0,021 + 0,014 = 0,035;$$

$$\overline{d} = \frac{\overline{a}\overline{b} + \overline{c}}{\overline{b}^2 - 4\overline{c}} = \frac{0,3118}{-0,7314} = -0,42630571;\ \Delta_d = \left|\overline{d}\right| \delta_d = 0,015;$$

$$d = -0,43 \pm 0,02.$$

□

Предметний покажчик

Література

[1] Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1984.

[2] Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1984.

[3] Горбатов В.А., Горбатов А.В., Горбатова М.В. Дискретная математика. Учебник для студентов втузов. — М.: Астрель, 2003.

[4] Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1986, ч. I.

[5] Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа. — М.: Наука, 1981.

[6] Математика для радиоинженеров. Теория дискретных структур. — М.: Радио и связь, 1984.

Волченко Юрій Михайлович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Базові математичні поняття

(для студентів спеціальності АТЗ)

Комп'ютерний макет *Волченко Ю.М.*

Технічні редактори *Григор'єва Л.В.*
Ростовцева О.О.

Підписано до друку 28.02.2005
Формат $60 \times 84/16$. Папір офс. Гарн. Times New Roman
Друк ризографічний
Умов. друк. арк. 1,2. Обл.-вид. арк. 1,4 Наклад 100 прим. Зам. № 42 р.

Донецький інститут залізничного транспорту

Надруковано в редакційно-видавничому відділі ДонІЗТ
Свідоцтво про внесення до Держ. реєстру від 22.06.2004 р.,
серія ДК № 1851

83018, м. Донецьк – 18, вул. Горна, 6.