Работа и циркуляция

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Понятие векторного поля. Векторная линия и векторная трубка. Работа и циркуляция векторного поля. Линейный интеграл, его существование и вычисление. Особое свойство линейного интеграла.

Анимация возникновения циркуляции.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Изображение векторного поля, вычисление работы и циркуляции в системе *Mathematica*.

4 июня 2015 г.

Перейдем ко второму типу полей, к полям векторным. Если скалярное поле в каждой точке определялось одним числом-скаляром, то векторное поле определяется в каждой точке тремя числами, т. е. вектором. Из этого следует, что векторное поле устроено более сложно, чем скалярное, и чтобы его изучить, нам понадобится не одна лекция.

1 Векторные линии и векторные трубки

Что же такое векторное поле? ***Векторным полем*** называется векторная функция точки $M(x, y, z)$ вида

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(M) = \mathbf{F}(x, y, z).$$

Векторное поле называется ***плоским***, если все векторы $\mathbf{F}(M)$ расположены в параллельных плоскостях, в которых векторное поле одинаково.

В декартовой системе координат векторное поле записывается в виде

$$\mathbf{F}(M) = F_1(M)\,\mathbf{i} + F_2(M)\,\mathbf{j} + F_3(M)\,\mathbf{k},$$

где F_1, F_2, F_3 — компоненты векторного поля, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — декартовы орты. Плоское векторное поле в декартовой системе координат имеет вид

$$\mathbf{F}(M) = F_1(M)\,\mathbf{i} + F_2(M)\,\mathbf{j}.$$

Например, совокупность всех градиентов некоторого скалярного поля, очевидно, является векторным полем.

Физическими примерами векторных полей являются поля электрической и магнитной напряженностей, поля скоростей движущейся жидкости или газа, гравитационное поле и др.

Для изображения векторных полей служат так называемые векторные линии. ***Векторной линией*** векторного поля называется кривая, касательная к которой в каждой точке имеет направление векторного поля в этой точке. При изображении векторного поля векторные линии проводят гуще там, где модуль $|\mathbf{F}(M)|$ векторного поля больше. На рис. 1 изображена картина обтекания цилиндрического тела жидкостью. Роль векторного поля $\mathbf{F}(M)$ здесь играет скорость течения жидкости.

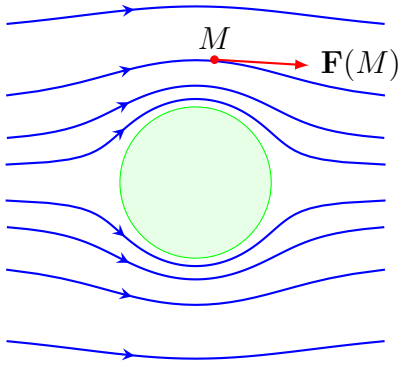


Рис. 1. Течение жидкости.

Пусть векторная линия задана векторной функцией скалярного аргумента

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}. \qquad (1)$$

По определению векторной линии вектор $\mathbf{F}$ сонаправлен вектору

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),$$

и из условия коллинеарности двух векторов приходим к соотношениям

$$\boxed{\frac{dx}{F_1} = \frac{dy}{F_2} = \frac{dz}{F_3}.} \qquad (2)$$

Эта система дифференциальных уравнений служит для определения векторных линий поля $\mathbf{F}$.

Для плоского поля $F_3 \equiv 0$ и система редуцируется к одному дифференциальному уравнению:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{F_2}{F_1}.} \qquad (3)$$

Если в некоторой области компоненты векторного поля непрерывны вместе со своими частными производными, то в силу существования и единственно-

сти решения задачи Коши для системы (2) в этой области через каждую ее точку проходит единственная векторная линия.

Пример 1. *Поле электростатической напряженности двухпроводной линии из тонких проводов, расположенных друг от друга на расстоянии* $2a$*, имеет вид*

$$\mathbf{E} = \frac{qa}{\pi}\left[\frac{x^2 - y^2 - a^2}{z(x,y)}\,\mathbf{i} + \frac{2xy}{z(x,y)}\,\mathbf{j}\right],$$

где $z(x,y) = \left(x^2 - y^2 - a^2\right)^2 + 4x^2y^2$*,* $+q$ *— линейный заряд одного провода,* $-q$ *— другого. Найти векторные линии поля.*

Решение. По формуле (3) составим дифференциальное уравнение векторных линий заданного поля:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2}, \tag{4}$$
$$2xy\,dx - \left(x^2 - y^2 - a^2\right)\,dy = 0.$$

Приведем его к уравнению в полных дифференциалах умножением на интегрирующий множитель $1/y^2$:

$$\frac{2x}{y}\,dx + \left(1 + \frac{a^2}{y^2} - \frac{x^2}{y^2}\right)\,dy = 0. \tag{5}$$

Обозначим $P(x,y) = \frac{2x}{y}$, $Q(x,y) = 1 + \frac{a^2}{y^2} - \frac{x^2}{y^2}$ и проверим равенство частных производных этих функций:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2x}{y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Выполнение равенства свидетельствует о том, что уравнение (5) является уравнением в полных дифференциалах. Тогда его левая часть должна быть полным дифференциалом некоторой функции u:

$$\frac{2x}{y}\,dx + \left(1 + \frac{a^2}{y^2} - \frac{x^2}{y^2}\right)\,dy = du(x,y).$$

Функцию u найдем из условий

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y),$$

или в данном случае — из равенств

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = 1 + \frac{a^2}{y^2} - \frac{x^2}{y^2}. \tag{6}$$

Используя первое из них, получаем

$$u(x,y) = \int \frac{2x}{y}\,dx = \frac{x^2}{y} + \varphi(y);$$

подставляя это выражение во второе из равенств (6), находим

$$-\frac{x^2}{y^2} + \varphi'(y) = 1 + \frac{a^2}{y^2} - \frac{x^2}{y^2},$$
$$\varphi'(y) = 1 + \frac{a^2}{y^2}, \ \varphi(y) = y - \frac{a^2}{y} + C,$$

$$u(x,y) = \frac{x^2}{y} + y - \frac{a^2}{y}.$$

В силу заданного уравнения $du = 0$, значит, его решением будет общий интеграл

$$\frac{x^2}{y} + y - \frac{a^2}{y} = C,$$

который мы представим следующим образом:

$$x^2 + y^2 - a^2 - Cy = 0,$$
$$x^2 + \left(y - \frac{C}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{C^2}{4}.$$

Геометрически решение является семейством окружностей с центрами в точках $\left(0; \frac{C}{2}\right)$ радиуса $\sqrt{a^2 + C^2/4}$. Все окружности проходят через точки $(-a; 0)$, $(a; 0)$, в которых нарушается условие существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (4), см. рис. 2. □

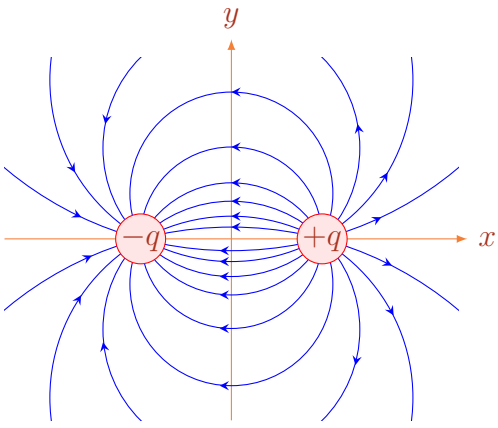


Рис. 2. Поле двухпроводной линии.

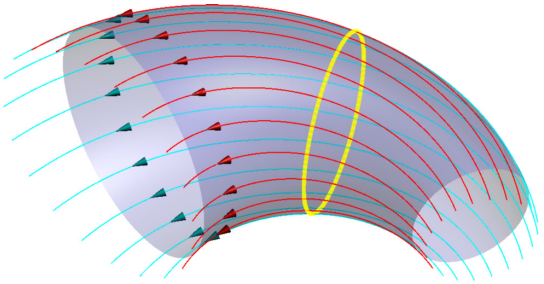


Рис. 3. Векторная трубка.

Векторной трубкой называется поверхность, образованная векторными линиями, проходящими через замкнутую кривую (контур), не совпадающую (даже частично) с какой-либо векторной линией. На рис. 3 показана часть векторной трубки, образованной векторными линиями, пересекающими контур желтого цвета.

Пример 2. *Определить вид векторных трубок для поля*

$$\mathbf{F} = (y - z)\,\mathbf{i} + (z - x)\,\mathbf{j} + (x - y)\,\mathbf{k}.$$

Решение. Составим систему дифференциальных уравнений (2) для определения векторных линий заданного поля:

$$\frac{dx}{y - z} = \frac{dy}{z - x} = \frac{dz}{x - y}. \tag{7}$$

Представим ее в таком виде:

$$\frac{x\,dx}{x\,(y - z)} = \frac{y\,dy}{y\,(z - x)} = \frac{z\,dz}{z\,(x - y)}.$$

Выражая $x\,dx$ и $y\,dy$ из этой системы через $z\,dz$ и складывая полученные выражения с $z\,dz$, придем к равенству

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = \frac{x\,(y-z)}{z\,(x-y)}z\,dz + \frac{y\,(z-x)}{z\,(x-y)}z\,dz + z\,dz = \\ = \frac{x\,(y-z) + y\,(z-x) + z\,(x-y)}{z\,(x-y)}\,z\,dz \equiv 0.$$

Таким образом, $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$ и, значит,

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2.$$

Из уравнения (7) аналогичным образом получаем, что

$$dx + dy + dz = \frac{y-z}{x-y}\,dz + \frac{z-x}{x-y}\,dz + dz = \\ = \frac{y-z+z-x+x-y}{x-y}\,dz \equiv 0,$$

и, следовательно, $x + y + z = C_2$. В результате приходим к следующей системе уравнений, описывающих векторные линии:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2, \\ x + y + z = C_2. \end{cases}$$

Векторные линии образуются пересечением сфер с общим центром в начале координат с плоскостями, перпендикулярными вектору $N\,(1,1,1)$, рис. 4. Следовательно, для заданного контура векторной трубкой является тороидальная поверхность, образованная окружностями с центром на прямой $x = y = z$, лежащими в плоскостях $x+y+z = C_2$ и пересекающими заданный контур (рис. 5, на котором заданный контур изображен желтым цветом). □

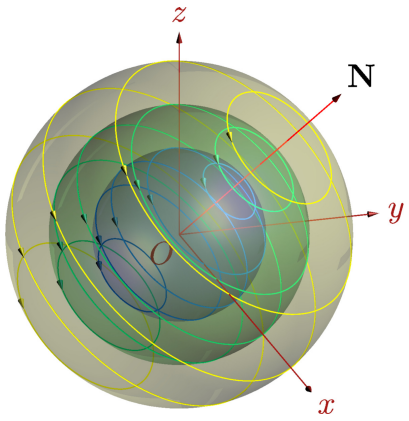


Рис. 4. К примеру 2: векторные линии.

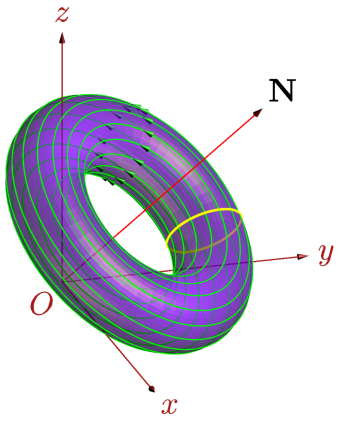


Рис. 5. К примеру 2: векторная трубка.

2 Работа и циркуляция

На лекции «Физические приложения определенного интеграла» уже упоминалось, что работа W постоянной силы, а в нашем случае постоянного векторного поля $\mathbf{F}\,(M) \equiv \mathbf{F} = \text{const}$, вдоль вектора $\mathbf{AB}$ вычисляется с помощью

скалярного произведения $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{AB} = \mathrm{Pr}_{\mathbf{AB}} \mathbf{F} \cdot |\mathbf{AB}|$. В Приложении к лекции была получена формула вычисления работы *переменной* силы вдоль заданной кривой с использованием определенного интеграла. Можно было бы просто применить эти результаты к векторному полю, если бы речь шла только о вычислительной стороне дела. Но нам понадобится новое понятие, циркуляция, имеющее важное значение для всего векторного анализа, а его лучше выразить с помощью нового интеграла. Так что придется нам для векторного поля заново определить понятие работы, которое, конечно же, не будет противоречить определению, сформулированному с помощью определенного интеграла.

Поэтому снова рассмотрим кривую $\mathcal{AB}$, которую разобьем на части-ячейки точками $A_0 = A$, A_1, …, A_{n-1}, $A_n = B$ и в каждой ячейке $\mathcal{A}_{i-1}\mathcal{A}_i$ произвольным образом выберем точку M_i. Работу поля $\mathbf{F}(M)$ вдоль дуги $\mathcal{A}_{i-1}\mathcal{A}_i$ будем считать приближенно равной работе постоянного поля $\mathbf{F}(M_i)$ вдоль вектора $d\mathbf{r}_i = \mathbf{A}_{i-1}\mathbf{A}_i$. Тогда работа поля вдоль всей кривой $\mathcal{AB}$ будет приближенно равна

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(M_i)\, d\mathbf{r}_i. \tag{8}$$

Если интегральный предел такой суммы существует, то он и называется ***работой*** векторного $\mathbf{F}$ поля вдоль кривой $\mathcal{AB}$. Интеграл, возникающий при этом, называют ***линейным интегралом*** векторного поля, или ***криволинейным интегралом II рода***.

Работу векторного поля с помощью линейного интеграла обозначают следующим образом

$$W = \int\limits_{\mathcal{AB}} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int\limits_{\mathcal{AB}} F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz, \tag{9}$$

причем, второй интеграл получается из первого «расшифровкой» скалярного произведения ($d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$):

$$\mathbf{F}\, d\mathbf{r} = (F_1, F_2, F_3) \cdot (dx, dy, dz)\,.$$

Линейный интеграл обладает всеми свойствами других интегралов†, но имеет и одно специфическое свойство

$$\int\limits_{\mathcal{AB}} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = -\int\limits_{\mathcal{BA}} \mathbf{F}\, d\mathbf{r}. \tag{10}$$

Оно следует из особенностей разбиения кривой $\mathcal{AB}$ на ячейки: мы производили это разбиение *в направлении* от A к B, так как вектор $d\mathbf{r}_i$ был направлен

†Лекция «Двойной интеграл I».

от точки A_{i-1} к точке A_i. Если провести разбиение от B к A, то все векторы $d\mathbf{r}_i$ изменят свое направление на противоположное и перед суммой (8) появится знак минус. Мы будем это свойство формулировать так: *если направление интегрирования по кривой изменить на противоположное, то и знак перед линейным интегралом изменится на противоположный.*

Криволинейные интегралы I† и II рода выражаются один через другой[1)].

Кривая $\mathcal{L}$ называется ***контуром***, если она замкнута и не имеет самопересечений.

Линейный интеграл по контуру L от векторного поля $\mathbf{F}$ называется ***циркуляцией*** векторного поля по этому контуру:

$$\text{Ц} = \int\limits_L \mathbf{F}\, d\mathbf{r}. \tag{11}$$

Как и для незамкнутой кривой, для контура имеет значение направление интегрирования. ***Положительным направлением*** обхода контура считается то, при котором область, ограниченная контуром, остается слева. Противоположное направление обхода называется ***отрицательным***. Контур, имеющий положительное направление обхода, будем обозначать $\mathcal{L}^+$, а отрицательное — $\mathcal{L}^-$.

Свойство (10) для контуров записывается так:

$$\int\limits_{\mathcal{L}^+} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = -\int\limits_{\mathcal{L}^-} \mathbf{F}\, d\mathbf{r}.$$

Возникает законный вопрос: почему для замкнутых контуров вдруг появляется новое понятие, называемое циркуляцией? Что, собственно говоря, циркулирует в векторном поле? Ну, во-первых, не всегда и циркулирует; именно, если циркуляция равна нулю… А, во-вторых, если внести в электромагнитное поле проводник в виде контура, то в нем действительно зациркулирует электрический ток.

Другой наглядный пример приведен в известной книге‡. Вообразим, что мы наблюдаем за текущей жидкостью, в которой мысленно выделяем контур в виде трубки, а затем «по щучьему велению, по моему хотению» берем и мгновенно замораживаем воду всюду, кроме этой самой воображаемой трубки. Что будет делать вода? Оказывается, вода продолжит свое движение, но уже внутри трубки в одном из двух возможных направлений (а может и не продолжить, если циркуляция равна нулю). Запустив анимационный рис. 6, можно увидеть, как это происходит: как векторное поле, порожденное движущейся жидкостью, приводит к возникновению циркуляции по контуру.

†Лекция «Криволинейный и поверхностный интегралы»; здесь же даны определения самопересечения и замкнутости кривой.
‡Фейнмановские лекции по физике. Электричество и магнетизм.— вып. 5, М.: Мир, 1966.

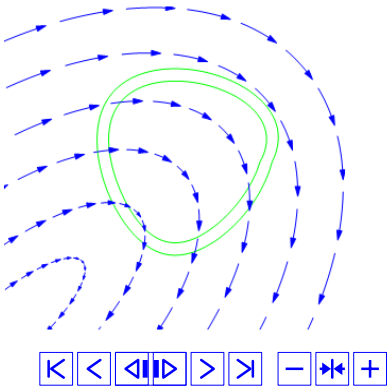


Рис. 6. Возникновение циркуляции.

3 Вычисление линейного интеграла

Пусть кривая $\mathcal{AB}$ задана в виде векторной функции скалярного аргумента (1). На лекции «Физические приложения определенного интеграла» была получена формула работы, произведенной вдоль этой кривой:

$$W = \int_{t_0}^{T} \mathbf{F}(t)\,\mathbf{r}'(t)\,dt.$$

Сопоставляя это равенство с формулой (9), получаем формулу вычисления линейного интеграла поля с помощью определенного интеграла:

$$\int\limits_{\mathcal{AB}} \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \int_{t_0}^{T} \mathbf{F}(t)\,\mathbf{r}'(t)\,dt,$$

или в развернутом виде:

$$\boxed{\begin{aligned}&\int\limits_{\mathcal{AB}} \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \\ &\quad = \int_{t_0}^{T} \{F_1[x(t), y(t), z(t)]\,x'(t) + F_2[x(t), y(t), z(t)]\,y'(t) + \\ &\qquad\qquad + F_3[x(t), y(t), z(t)]\,z'(t)\}dt.\end{aligned}} \quad (12)$$

Здесь надо иметь в виду, что, поскольку для линейного интеграла направление интегрирования имеет значение, то изменению параметра t от t_0 до T должно соответствовать движение по кривой от точки A к точке B.

Вспоминая теорему о существовании определенного интеграла, приходим к выводу, что для линейного интеграла справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Линейный интеграл существует, если кривая $\mathcal{AB}$ кусочно гладкая, а поле* $\mathbf{F}$ *имеет непрерывные компоненты.*

Если поле $\mathbf{F}$ плоское, формула (12) упрощается:

$$\boxed{\int\limits_{\mathcal{AB}} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int_{t_0}^{T} \left\{F_1\left[x\left(t\right), y\left(t\right)\right] x'\left(t\right) + F_2\left[x\left(t\right), y\left(t\right)\right] y'\left(t\right)\right\} dt.} \tag{13}$$

Если кривая задана на плоскости xOy явно как $y = y\left(x\right)$, $x \in [a, b]$, то, взяв в качестве параметра t переменную x, из формулы (13) получим

$$\boxed{\int\limits_{\mathcal{AB}} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int_{a}^{b} \left\{F_1\left[x, y\left(x\right)\right] + F_2\left[x, y\left(x\right)\right] y'\left(x\right)\right\} dx,} \tag{14}$$

причем, изменению переменной x от a до b должно соответствовать движение по кривой от точки A к точке B.

Пример 3. *Поле магнитной индукции тонкого прямолинейного проводника с током, пересекающего плоскость xOy в начале координат и находящегося во внешнем однородном магнитном поле $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{i}$, имеет вид*

$$\mathbf{B} = \left(B_0 + \frac{\beta y}{x^2 + y^2}\right)\mathbf{i} - \frac{\beta x}{x^2 + y^2}\,\mathbf{j},$$

где $\beta = \frac{i}{2\pi}$, i — линейная плотность тока в проводнике. Найти циркуляцию поля $\mathbf{B}$ *по окружностям*

$$\mathcal{L}_1 : \mathbf{r}_1(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2\pi;$$
$$\mathcal{L}_2 : \mathbf{r}_2(t) = \cos t\,\mathbf{i} + (2 + \sin t)\,\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2\pi.$$

Решение. Вначале с помощью формул (11) и (13) запишем циркуляцию по более общему контуру $\mathcal{L} : \mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + (p + \sin t)\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$, для которого $\mathbf{r}'(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$:

$$\begin{aligned}
\text{Ц} &= \int\limits_{\mathcal{L}} \mathbf{B}\, d\mathbf{r} = \\
&= \int_0^{2\pi} \left\{\left[B_0 + \frac{\beta\left(p + \sin t\right)}{\cos^2 t + \left(p + \sin t\right)^2}\right](-\sin t) - \frac{\beta \cos t}{\cos^2 t + \left(p + \sin t\right)^2}\,\cos t\right\} dt = \\
&= -\,B_0 \sin t\Big|_0^{2\pi} + \beta \int_0^{2\pi} \frac{-p\sin t - \sin^2 t - \cos^2 t}{1 + p^2 + 2p\sin t}\, dt = -\beta \int_0^{2\pi} \frac{1 + p\sin t}{1 + p^2 + 2p\sin t}\, dt.
\end{aligned}$$

При $p = 0$ находим циркуляцию по первой окружности:

$$\text{Ц}_1 = \int\limits_{\mathcal{L}_1} \mathbf{B}\, d\mathbf{r} = -\,\beta \int_0^{2\pi} dt = -2\pi\beta.$$

При $p = 2$ получаем выражение для циркуляции по второй окружности:

$$\text{Ц}_2 = \int\limits_{\mathcal{L}_2} \mathbf{B}\, d\mathbf{r} = -\,\beta \int_0^{2\pi} \frac{1 + 2\sin t}{5 + 4\sin t}\, dt.$$

Однако, чтобы вычислить эту циркуляцию, придется потрудиться. Выполним в интеграле универсальную тригонометрическую подстановку:

$$u = \operatorname{tg}\frac{t}{2},\ dt = \frac{2\,du}{1+u^2},\ \sin t = \frac{2u}{1+u^2},\ \cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2};$$

$$\int \frac{1 + 2\sin t}{5 + 4\sin t}\, dt = \int \frac{1 + 2\,\frac{2u}{1+u^2}}{5 + 4\,\frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2du}{1+u^2} = \int \frac{2(u^2+4u+1)}{(u^2+1)\,(5u^2+8u+5)}\, du.$$

Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших ДРФ:

$$\frac{2(u^2+4u+1)}{(u^2+1)\,(5u^2+8u+5)} = \frac{Au+B}{u^2+1}^{\backslash 5u^2+8u+5} + \frac{Cu+D}{5u^2+8u+5}^{\backslash u^2+1}$$

u^3	$5A + C = 0$	$C = -5A$	$C = -5A$	$A = 0$
u^2	$8A + 5B + D = 2$	$8A + 5B + D = 2$	$8A = 0$	$C = 0$
u	$5A + 8B + C = 8$	$\cancel{5A} + 8B - \cancel{5A} = 8$	$B = 1$	$B = 1$
u^0	$5B + D = 2$	$5B + D = 2$	$D = -3$	$D = -3$

Таким образом,

$$\int \frac{1 + 2\sin t}{5 + 4\sin t}\, dt = \int \frac{2(u^2+4u+1)}{(u^2+1)\,(5u^2+8u+5)}\, du = \int \frac{du}{1+u^2} - \int \frac{3\,du}{5u^2+8u+5}.$$

Первый интеграл — табличный, поэтому найдем второй интеграл:

$$\int \frac{3\,du}{5u^2+8u+5} = \int \frac{3\,du}{5\left(u^2 + \frac{8}{5}u + 1\right)} = \int \frac{3\,du}{5\left[\left(u + \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{9}{25}\right]} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{u + 4/5}{3/5} + C = \operatorname{arctg}\frac{5u+4}{3} + C.$$

Следовательно,

$$\int \frac{1 + 2\sin t}{5 + 4\sin t}\, dt = \operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg}\frac{5u+4}{3} + C = \operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{t}{2} - \operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{t}{2} + 4}{3} + C.$$

Заметим, что $\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{t}{2} \neq \frac{t}{2}$ (например, при $t = 2\pi$). Подставляя в полученное выражение пределы интегрирования 0 и 2π, получим

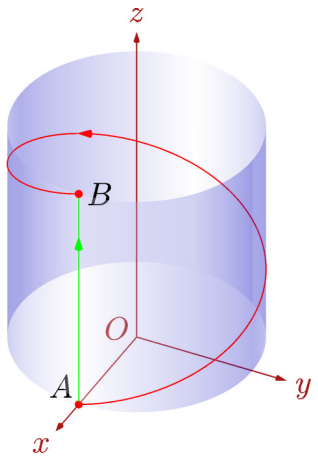
$$\text{Ц}_2 = \int\limits_{\mathcal{L}_2} \mathbf{B}\, d\mathbf{r} = -\beta \int_0^{2\pi} \frac{1 + 2\sin t}{5 + 4\sin t}\, dt = \left(\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{t}{2} - \operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{t}{2} + 4}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= -\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + \operatorname{arctg}\frac{4}{3} = 0.$$

Мы видим, что в магнитном поле циркуляция может быть как нулевой, так и не равной нулю.

Пример 4. *Найти работу векторного поля* $\mathbf{F} = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$ *вдоль дуги винтовой линии* $\mathbf{r}(t) = R\cos t\,\mathbf{i} + R\sin t\,\mathbf{j} + \frac{t}{2\pi}\,\mathbf{k}$ *от точки* A *пересечения линии с плоскостью* $z = 0$ *до точки* B *ее пересечения с плоскостью* $z = 1$.

Решение. Используя формулы (9) и (12), получим



$$
\begin{aligned}
W &= \int\limits_{\mathcal{AB}} \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \int\limits_{\mathcal{AB}} z\,dx + x\,dy + y\,dz = \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{t}{2\pi}\,(-R\sin t) + R^2\cos^2 t + \frac{R}{2\pi}\,\sin t\right] dt = \\
&= -\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\sin t\,dt + \\
&\quad + \frac{R^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt - \frac{R}{2\pi}\,\cos t\Big|_0^{2\pi} = \\
&= \langle u = t,\ dv = \sin t\,dt,\ du = dt,\ v = -\cos t\rangle = \\
&= -\frac{R}{2\pi}\,(-t\cos t)\Big|_0^{2\pi} + \\
&\quad + \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos t\,dt + \frac{R^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\,\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = \\
&= R + \frac{R}{2\pi}\sin t\Big|_0^{2\pi} + \pi R^2 = R\,(\pi R + 1)\,.
\end{aligned}
$$

Пример 5. *Найти работу того же поля по отрезку* AB.

Решение. Отрезок AB определяется равенствами $x = R$, $y = 0$, поэтому по тем же формулам получаем

$$W = \int\limits_{AB} \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \int\limits_{AB} z\cdot 0 + R\cdot 0 + 0\cdot dz = 0.$$

Как видим, для данного поля работа зависит от пути интегрирования. □

В Приложении[2)] показано применение системы *Mathematica* к изображению векторных линий и вычислению работы и циркуляции векторного поля.

Приложение

1) Выберем естественную параметризацию† $\mathbf{r}(s)$ кривой $\mathcal{AB}$, при которой $|\mathbf{r}'(s)| = 1$. Пользуясь сведениями, полученными в области векторной алгебры, единичный вектор $\mathbf{r}'(s)$ представим в виде $\mathbf{r}'(s) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где в скобках стоят направляющие косинусы этого вектора. Тогда, основываясь на формулах, связывающих криволинейные интегралы с определенными, получим

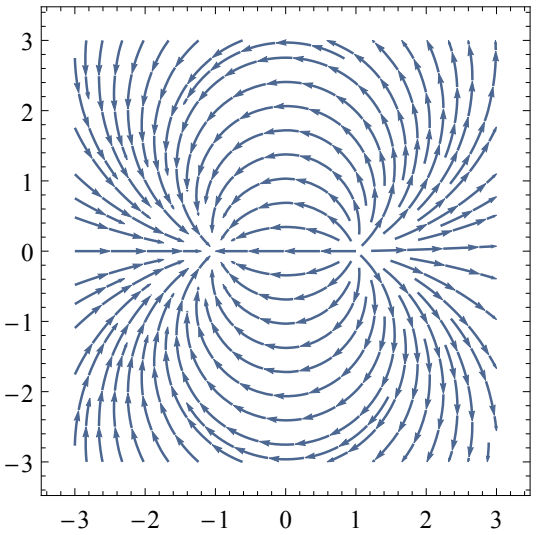
$$\int\limits_{\mathcal{AB}} \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \int_{s_0}^{s_1} \mathbf{F}(s)\,\mathbf{r}'(s)\,ds = \int_{s_0}^{s_1} \mathbf{F}(s)\cdot(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\,ds =$$
$$= \int_{s_0}^{s_1} [F_1(s)\cos\alpha + F_2(s)\cos\beta + F_3(s)\cos\gamma]\,ds =$$
$$= \int\limits_{\mathcal{AB}} [F_1(s)\cos\alpha + F_2(s)\cos\beta + F_3(s)\cos\gamma]\,ds.$$

В самой левой части равенства стоит криволинейный интеграл II рода, а в самой правой — криволинейный интеграл I рода.

2) *Mathematica* может быть использована для решения систем дифференциальных уравнений, определяющих векторные линии. Это обеспечивает не только получение аналитических выражений для таких линий, но также их визуализацию и исследование. Особенности решения дифференциальных уравнений в системе *Mathematica* были рассмотрены на предыдущих лекциях.

Визуализацию векторных линий, уже представленную аналитической моделью, реализуют операторы `StreamPlot`, `VectorPlot` и `VectorPlot3D`, рассмотренные на прошлой лекции. Например, картину векторных линий двухпроводной линии из примера 1 можно получить, применив следующие операторы:

```
z[x_,y_] := (x^2 - y^2 - 1)^2 + 4 x^2 y^2
StreamPlot[{(x^2 - y^2 - 1)/z[x,y], 2xy/z[x,y]}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
```



†Лекция «Длина дуги и кривизна кривой».

Для того чтобы иметь возможность рассчитывать работу и циркуляцию векторного поля, создадим оператор, аргументами которого будут `F` — векторное поле; `r` — кривая интегрирования; `t` — аргумент кривой интегрирования; $\mathtt{t}_0$, `T` — пределы интегрирования:

$$\mathtt{workCirc[F_,r_][t_,t0_,T_]} := \int_{\mathtt{t0}}^{\mathtt{T}} \mathtt{F\,@@\,r[t].r'[t]\,dt}$$

Оператор @@ превращает список `r[t]` в список аргументов функции `F`. Решим с помощью `workCirc` несколько примеров, вручную проверяя выкладки.

Пример П1. *Найти работу векторного поля*

$$\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + \cos z\,\mathbf{k}$$

вдоль одного витка $\mathcal{AB}$ винтовой линии

$$\mathbf{r}(t) = R\cos t\,\mathbf{i} + R\sin t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k},$$

где точкам A и B отвечают, соответственно, $t = 0$ и $t = 3\pi/2$.

Решение. В системе Mathematica:

```
F[x_,y_,z_] := {x^2,y,Cos[z]}
r[t_] := {R Cos[t],R Sin[t],2 t}
workCirc[F,r][t,0,3π/2]
```

$\frac{1}{6}(3-2\,\mathtt{R})\mathtt{R}^2$

Проверка. Учитывая, что $\mathbf{r}'(t) = -R\sin t\,\mathbf{i} + R\cos t\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$, применим формулу (12):

$$W = \int_0^{3\pi/2} [R^2\cos^2 t(-R\sin t) + R^2\sin t\cos t + 2\cos 2t]\,dt = \langle u = \cos t,\ du = -\sin t\,dt\rangle =$$

$$= R^3\int_1^0 u^2\,du + \frac{R^2}{2}\int_0^{3\pi/2} \sin 2t\,dt + \ \sin 2t\Big|_0^{3\pi/2} dt = \frac{R^3u^3}{3}\Big|_1^0 - \frac{R^2}{4}\cos 2t\Big|_0^{3\pi/2} =$$

$$= -\frac{R^3}{3} + \frac{R^2}{2} = \frac{R^2(3-2R)}{6}.$$

Пример П2. *Вычислить работу векторного поля*

$$\mathbf{F} = (2R - y)\,\mathbf{i} + (y - R)\,\mathbf{j}$$

вдоль первой арки $\mathcal{AB}$ (от начала координат) циклоиды

$$\mathbf{r}(t) = R(t - \sin t)\,\mathbf{i} + R(1 - \cos t)\,\mathbf{j}.$$

Решение. В системе Mathematica:

```
F[x_,y_,z_] := {2R - y,y - R,0}
r[t_] := {R(t - Sin[t]),R(1 - Cos[t]),0}
workCirc[F,r][t,0,2π]
```

$\pi\mathtt{R}^2$

Проверка. В данном случае $\mathbf{r}'(t) = R(1-\cos t)\,\mathbf{i} + R\sin t\,\mathbf{j}$, поэтому по формуле (13) получаем

$$W = \int_0^{2\pi} \{[2R - R(1-\cos t)]R(1-\cos t) + [R(1-\cos t) - R]R\sin t\}\,dt =$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t - \sin t \cos t)\, dt = \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t - \sin 2t)\, dt =$$
$$= \frac{R^2}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\cos 2t}{2} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = \pi R^2.$$

Пример П3. *Найти циркуляцию векторного поля*

$$\mathbf{F} = \mathbf{i} + 2x\,\mathbf{j}$$

вдоль окружностей

$$\mathcal{L} : \mathbf{r}(t) = (a + R\cos t)\,\mathbf{i} + (b + R\sin t)\,\mathbf{j}.$$

Решение. В системе Mathematica:

```
F[x_,y_,z_] := {1,2 x,0}
r[t_] := {a + R Cos[t],b + R Sin[t],0}
workCirc[F,r][t,0,2π]
```

$2\pi R^2$

Проверка. Находим $\mathbf{r}'(t) = -R\sin t\,\mathbf{i} + R\cos t\,\mathbf{j}$ и по формуле (14) вычисляем циркуляцию:

$$\text{Ц} = \int_0^{2\pi} \{[-R\sin t + 2(a + R\cos t)R\cos t]\}\, dt =$$
$$= R \int_0^{2\pi} [-\sin t + 2a\cos t + R(1 + \cos 2t)]\, dt =$$
$$= R \left(\cos t + 2a\sin t + Rt + \frac{R\sin 2t}{2} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi R^2.$$

Интересно, что циркуляция данного векторного поля не зависит от расположения окружности на плоскости, а только от ее радиуса.

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного* . – М.: Наука, 1985, – с. 205–211.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 2. – с. 82-86.