Поток векторного поля

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Ориентация гладкой поверхности. Односторонние и двусторонние поверхности. Ориентация поверхности с краем. Ориентация кусочно гладкой поверхности. Поток векторного поля, его существование, свойства и вычисление.

Анимация понятий двусторонней и односторонней поверхности.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Использование системы *Mathematica* для вычисления потоков векторных полей.

30 июня 2015 г.

Понятие потока пришло из гидродинамики, где поток означает количество жидкости, протекающей через некоторую поверхность в единицу времени. К чему здесь поверхность? Да к тому, что физическими ипостасями математической поверхности могут быть лопасти турбины или поверхность быков моста. И набегающий поток воды вызывает определенное давление на эти поверхности, которое необходимо учитывать при проектировании механизмов и сооружений. Встречаются в инженерном деле и другие потоки: тепловые, магнитные, воздушные и т. д. Все они могут быть описаны и проанализированы с помощью лишь одного потока: потока векторного поля через поверхность, изучаемого в математике. С векторным полем мы уже познакомились. А все ли мы знаем о поверхностях? Оказывается не все, так что знакомство придется продолжить.

1 Ориентация поверхности

Пусть гладкая[†] поверхность σ задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0.$$

[†]Лекция «Тройной интеграл».

Известно, что ее нормаль† в точке M выражается формулой

$$\mathbf{N}(M) = \pm\left(\frac{\partial F(M)}{\partial x}, \frac{\partial F(M)}{\partial y}, \frac{\partial F(M)}{\partial z}\right).$$

Таким образом, в каждой точке M поверхности имеются две нормали, глядящие в противоположные стороны:

$$\mathbf{N}^{+} = \left(\frac{\partial F(M)}{\partial x}, \frac{\partial F(M)}{\partial y}, \frac{\partial F(M)}{\partial z}\right)$$

и

$$\mathbf{N}^{-} = -\left(\frac{\partial F(M)}{\partial x}, \frac{\partial F(M)}{\partial y}, \frac{\partial F(M)}{\partial z}\right).$$

Соответственно, имеются в этой точке и две единичные нормали:

$$\mathbf{n}^{+}(M) = \frac{\mathbf{N}^{+}(M)}{|\mathbf{N}(M)|},\ \mathbf{n}^{-}(M) = \frac{\mathbf{N}^{-}(M)}{|\mathbf{N}(M)|}.$$

Поскольку поверхность σ — гладкая, нормали $\mathbf{n}^{+}(M)$ и $\mathbf{n}^{-}(M)$ являются непрерывными функциями точки M. Перемещая точку M непрерывным образом по поверхности, мы получим непрерывное перемещение этих нормалей (грубо говоря, для близких точек нормали не очень будут отличаться своим направлением). А может ли нормаль $\mathbf{n}^{+}$, начав путешествовать по поверхности из точки M, вернуться затем в эту точку, став нормалью $\mathbf{n}^{-}$? Такая возможность может показаться полной ерундой — не может «нормальная» нормаль вести себя подобным образом! Ведь все у нас непрерывно и вдруг в точке M происходит буквально переворот нормали в противоположную сторону! Тем не менее такая возможность имеется, и в результате все поверхности делятся на «нормальные», или двусторонние, нормали которых подобных фокусов не выкидывают, и «ненормальные», или односторонние, способные к описанному кульбиту. Перейдем к более точным определениям.

Гладкая поверхность называется ***двусторонней***, если нормаль к поверхности при обходе любого замкнутого контура, лежащего на этой поверхности и не имеющего общих точек с его границей, всегда возвращается в исходную точку обхода в первоначальном положении. В противном случае поверхность называется ***односторонней***.

На анимированном рис. 1 показано, что движение нормалей на двусторонней поверхности всегда возвращает нормаль в исходную точку с тем же самым направлением. На рис. 2 изображена лента Мёбиуса[1)], являющаяся односторонней поверхностью. Анимация демонстрирует, что, несмотря на непрерывное изменение нормали, последняя может вернуться в исходную точку, приняв

†Лекция «Полный дифференциал».

противоположное направление. Еще одна односторонняя поверхность — бутылка Клейна — представлена в правой части рис. 2.

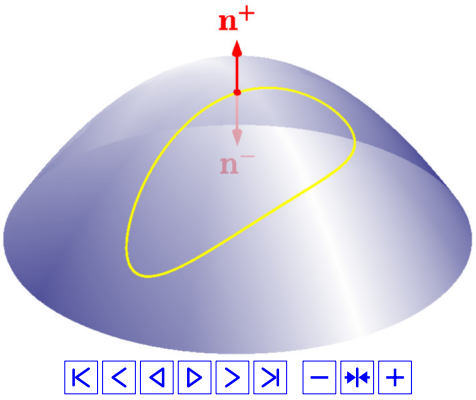

Рис. 1. Двусторонняя поверхность.

На двусторонней поверхности семейство нормалей $\{\mathbf{n}^+\}$ определяет одну сторону поверхности, а семейство нормалей $\{\mathbf{n}^-\}$ — другую. Двусторонняя гладкая поверхность с выбранным семейством нормалей называется ***ориентированной***.

На односторонней поверхности семейство нормалей $\{\mathbf{n}^+\}$ непрерывным образом переходит в семейство $\{\mathbf{n}^-\}$ и наоборот, так что фактически — это одно и то же семейство. Потому-то и сторона у такой поверхности — одна.

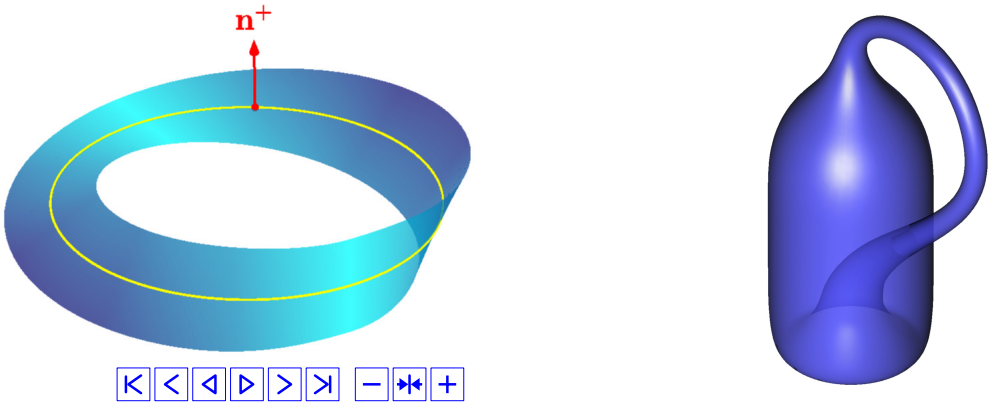

Рис. 2. Односторонние поверхности: лента Мебиуса (слева) и бутылка Клейна (справа).

Координатная плоскость xOy становится ориентированной, если в качестве одного семейства нормалей выбрать единичные векторы, сонаправленные вектору $\mathbf{k}$, а в качестве второго — векторы, сонаправленные $-\mathbf{k}$.

Эллипсоид тоже можно ориентировать семействами его нормалей: внешними (направленными вовне эллипсоида) и внутренними (направленными противоположным образом).

Далее будут рассматриваться только двусторонние поверхности.

Чтобы перейти к кусочно гладким поверхностям, вспомним, что они состоят из гладких кусков, т. е. гладких поверхностей, ограниченных кривыми. Такие поверхности называют поверхностями с краем. Чтобы считать кусочно гладкую поверхность ориентированной, надо не только выбрать на ней семейство нормалей, но и согласовать обходы кривых, ограничивающих куски гладких

поверхностей, с выбранным семейством и между собой.

Начнем с поверхности с краем, на которой возьмем точку M, не принадлежащую краю, и построим в этой точке сначала нормаль $\mathbf{n}(M)$ (выбрав тем самым сторону поверхности), а затем и правую декартову систему координат, в которой началом координат будет точка M, а направляющим вектором оси аппликат — нормаль $\mathbf{n}(M)$ (см. рис. 3, слева). В правой системе координат, если смотреть из конца вектора $\mathbf{n}(M)$, поворот от оси абсцисс к оси ординат видится совершающимся против часовой стрелки. Чтобы наглядно представить себе этот факт, окружим точку M контуром, лежащим на поверхности, выбрав на нем соответствующее направление, которое будем считать ***положительным***. Отметим, что при положительном обходе контура ограниченная им область остается слева.

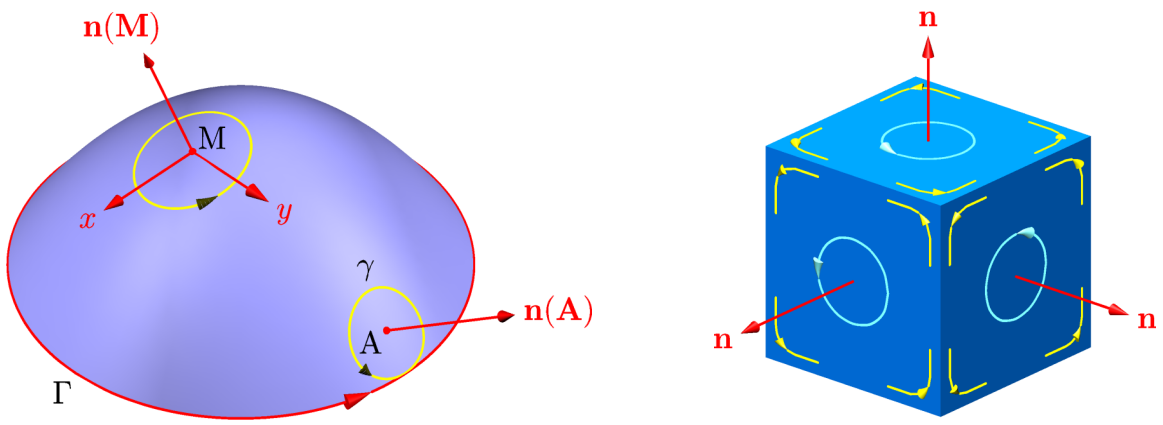

Рис. 3. Ориентация поверхностей: с краем (слева) и кусочно гладкой (справа).

Переместим теперь всю эту конструкцию из точки M в точку A так, чтобы контур коснулся края поверхности (оси абсцисс и ординат рисовать не будем). Направление обхода края выберем таким, чтобы оно было согласовано с положительным направлением обхода контура (чтобы при движении по контуру и краю мы «входили» в точку их касания с одной и той же «стороны» точки, а «выходили» — с другой). Если все это выполнено, направление обхода края считается ***положительным*** и согласованным с выбранным семейством нормалей (или с выбранной стороной поверхности), а сама поверхность с краем называется ***ориентированной***.

Возьмем теперь куб, который является кусочно гладкой поверхностью, составленной из граней куба. Если на каждой грани задать ориентацию внешними нормалями куба, мы увидим, что обходы краев граней по их общим ребрам будут противоположны (рис. 3, справа). Поэтому кусочно гладкая поверхность называется ***ориентированной***, если каждый из ее гладких кусков ориентирован и направления обхода краев по их общим границам для со-

седних кусков противоположны.

Далее понадобится еще одно определение. Область пространства называется ***поверхностно связной***, если на любой контур, лежащий на ней, можно натянуть поверхность, целиком лежащую в этой области.

Например, плоскость с выколотой точкой в двумерном пространстве не является поверхностно связной, а в трехмерном — является.

2 Определение потока

Одной из важных характеристик векторного поля является его поток. В гидродинамике поток означает количество жидкости, протекающей в единицу времени через некоторую воображаемую поверхность σ, например, σ может быть сечением трубы.

Проще всего рассчитать поток жидкости, если поверхность σ плоская, а скорость течения жидкости $\mathbf{v}$ постоянна. Объем жидкости, протекающей за единицу времени через плоскую площадку σ, равен объему наклонного цилиндра с основанием σ и образующей $\mathbf{v}$, рис. 4. Произведем сечение цилиндра плоскостями, параллельными площадке σ. Тогда согласно методу поперечных сечений† его объем будет равен

$$V = \int_0^h \sigma\, dz = \sigma h,$$

т. е. произведению площади основания на высоту, h, (как и объем всеми любимого прямого кругового цилиндра). Но высота цилиндра $h = |\mathbf{v}| \cos\alpha = \mathbf{vn}$, где $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к площадке σ, и поэтому $V = \mathbf{vn}\sigma$.

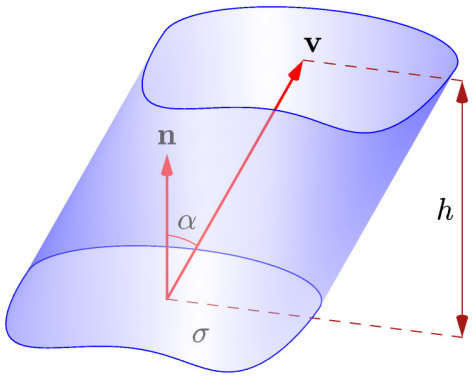

Рис. 4. Поток через площадку.

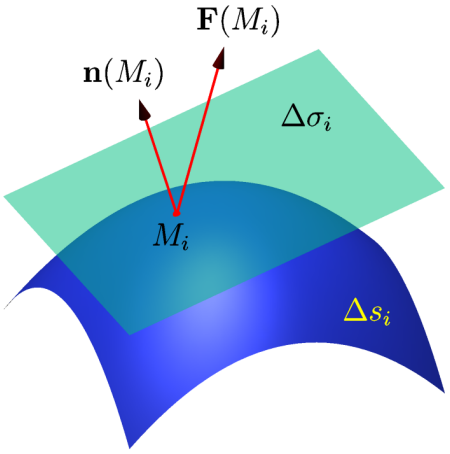

Рис. 5. Поток в общем случае.

†Лекция «Геометрические приложения определенного интеграла».

По аналогии с этой формулой *потоком постоянного векторного поля* $\mathbf{F}$ через *плоскую площадку* σ называется скалярное произведение поля на единичную нормаль $\mathbf{n}$ к площадке, умноженное на площадь этой площадки:

$$\Pi = \mathbf{F}\mathbf{n}\sigma.$$

Теперь обобщим понятие потока на переменное векторное поле $\mathbf{F}$ и произвольную поверхность σ. Разобьем σ на части (ячейки) Δs_i, $i = \overline{1, n}$, кривыми, лежащими на поверхности. Выберем в каждой ячейке Δs_i произвольным образом точку M_i и проведем через M_i касательную плоскость к поверхности. Спроектируем на эту плоскость ячейку Δs_i, получив таким образом на касательной плоскости плоскую ячейку $\Delta\sigma_i$ (рис. 5). Приближенно можно считать, что векторное поле постоянно в пределах ячеек $\Delta\sigma_i$ и Δs_i, а его поток через ячейку Δs_i — приближенно равен потоку через площвдку $\Delta\sigma_i$, т. е. равен $\mathbf{F}(M_i)\,\mathbf{n}(M_i)\,\Delta\sigma_i$. Тогда поток поля через поверхность σ можно считать приближенно равным сумме потоков через все ячейки разбиения:

$$\Pi \approx \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(M_i)\,\mathbf{n}(M_i)\,\Delta\sigma_i. \tag{1}$$

Переходя к интегральному пределу, получим точное значение потока векторного поля через поверхность σ, а заодно и новый тип интеграла, который называется ***потоком***, или ***поверхностным интегралом II рода***:

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} \mathbf{F}\mathbf{n}\,d\sigma. \tag{2}$$

Теорема 1. *Если σ — кусочно гладкая ориентированная поверхностно связная поверхность, а поле $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ имеет непрерывные компоненты, то поток этого поля через поверхность σ существует.*

Поток векторного поля обладает специфическим свойством: если изменить направление нормали на противоположное (выбрать другую сторону поверхности), то поток изменит свой знак на противоположный. Это очевидно: если в формуле (1) вместо нормали $\mathbf{n}(M_i)$ взять нормаль $-\mathbf{n}(M_i)$, то знак минуса можно вынести за знак суммы, следовательно, и в формуле (2) знак минуса можно выносить за знак интеграла:

$$\iint\limits_{\sigma} \mathbf{F}(-\mathbf{n})\,d\sigma = -\iint\limits_{\sigma} \mathbf{F}\mathbf{n}\,d\sigma.$$

Остальные свойства потока аналогичны свойствам уже изученных интегралов.

3 Вычисление потока векторного поля

Представим единичную нормаль к поверхности $F(x,y,z)=0$ с помощью ее направляющих косинусов: $\mathbf{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, тогда поток векторного поля можно записать следующим образом:

$$\Pi=\iint\limits_{\sigma}\mathbf{F}\mathbf{n}\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma}\left(F_1\cos\alpha+F_2\cos\beta+F_3\cos\gamma\right)\,d\sigma.$$

В соответствии с определением интегральной суммы для поверхностного интеграла I рода и построением интегральной суммы для потока можно утверждать, что в правой части последнего равенства стоит поверхностный интеграл I рода от скалярной функции $F_1\cos\alpha+F_2\cos\beta+F_3\cos\gamma$. *Это равенство связывает поверхностные интегралы I и II рода.*

Пусть поверхность σ однозначно проектируется на плоскость xOy в область D_{xy}, тогда она представима уравнением $z=f(x,y)$, или $z-f(x,y)=0$, а нормаль к поверхности принимает вид $\mathbf{N}=\pm\left(-f'_x,-f'_y,1\right)$, так что

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}=\pm\left(\frac{-f'_x}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}},\frac{-f'_y}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}},\frac{1}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}\right),$$

а $\cos\gamma=\pm1/\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}$. Поэтому вычисляя поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{\sigma}F_3\cos\gamma\,d\sigma$$

с помощью двойного[†], получим:

$$\iint\limits_{\sigma}F_1\cos\gamma\,d\sigma=$$

$$=\pm\iint\limits_{Dxy}F_1\left[x,y,f(x,y)\right]\frac{1}{\cancel{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}}\cancel{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}\,dx\,dy=$$

$$=\pm\iint\limits_{Dxy}F_1\left[x,y,f(x,y)\right]\,dx\,dy.\quad(3)$$

Знак перед интегралом должен совпадать со знаком $\cos\gamma=\cos\widehat{\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}}$, поэтому выбирается в соответствии с правилом: если нормаль $\mathbf{n}$ образует острый угол с осью Oz, берется знак плюс, в противном случае — знак минус.

[†]Лекция «Криволинейный и поверхностный интегралы».

Если к тому же поверхность σ однозначно проектируется на плоскость yOz в область D_{yz} и на плоскость xOz — в область D_{xz}, то ее можно представить уравнениями $x = h(y,z)$ и $y = g(x,z)$ и в результате получить формулу вычисления потока для случая однозначного проектирования поверхности σ на все три координатные плоскости:

$$\boxed{\begin{aligned}\Pi = \pm \iint\limits_{D_{yz}} F_1(h(y,z),y,z)\,dy\,dz \pm \iint\limits_{D_{xz}} F_2(x,g(x,y),z)\,dx\,dz \pm \\ \pm \iint\limits_{D_{xy}} F_3(x,y,f(x,y))\,dx\,dy.\end{aligned}} \tag{4}$$

Знаки перед первым и вторым интегралами выбираются аналогично выбору знака перед третьим интегралом, только вместо оси Oz рассматриваются оси Ox и Oy, соответственно.

Еще одна вычислительная формула получается, если поверхность σ однозначно проектируется только на одну координатную плоскость, например, на плоскость xOy в область D_{xy}, что снова-таки позволяет записать уравнение поверхности σ как $z = f(x,y)$. В этом случае

$$\begin{aligned}\Pi &= \iint\limits_{\sigma} \mathbf{F}\mathbf{n}\,d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} (\mathbf{F}\mathbf{n})\big|_{z=f(x,y)} \sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,dx\,dy = \\ &= \iint\limits_{D_{xy}} \left(\mathbf{F}\frac{\mathbf{N}}{\cancel{|\mathbf{N}|}}\right)\Bigg|_{z=f(x,y)} \cancel{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}}\,dx\,dy,\end{aligned}$$

т. е. поток вычисляется с помощью следующего двойного интеграла:

$$\boxed{\Pi = \iint\limits_{D_{xy}} (\mathbf{F}\mathbf{N})\big|_{z=f(x,y)}\,dx\,dy.} \tag{5}$$

Знак перед интегралом выбирается так же, как в формуле (3).

Пример 1. *Положительный электрический заряд q находится в начале координат и создает векторное поле силы Кулона*

$$\mathbf{F} = k\,\frac{q}{r^2}\,\mathbf{r},$$

где r — расстояние от данной точки до начала координат, $\mathbf{r}$ — единичный вектор, направленный по радиус-вектору данной точки, k — постоянная. Найти поток данного векторного поля через сферу радиуса R с центром в начале координат.

Решение. Понятно, что надо выбрать нормаль $\mathbf{n}$, соответствующую внешней стороне сферы. Учитывая, что для точек сферы $r^2 = R^2$, получаем

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} \mathbf{Fn}\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma} \frac{kq}{R^2}\mathbf{rn}\, d\sigma = \frac{kq}{R^2}\iint\limits_{\sigma} d\sigma = \frac{kq\sigma}{R^2} = \frac{kq4\pi R^2}{R^2} = 4\pi kq,$$

так как $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = 1$, потому что $\mathbf{n} \uparrow\uparrow \mathbf{r}$ и $|\mathbf{n}| = |\mathbf{r}| = 1$. Кроме того, для поверхностного интеграла I рода справедливо, что

$$\iint\limits_{\sigma} d\sigma = \sigma.$$

Пример 2. *Цилиндрический конденсатор состоит из внутреннего цилиндрического электрода радиуса $r_1 = 1$ и наружного электрода в виде трубы, концентричной внутреннему электроду (рис. 6). Радиус наружного электрода $r_2 = 3$. Координатная плоскость xOz перпендикулярна оси конденсатора, которая является осью Oy трехмерной системы координат. Приняв напряженность электрического поля конденсатора равной*

$$\mathbf{E} = \alpha\left(\frac{x}{x^2+z^2}\,\mathbf{i} + \frac{z}{x^2+z^2}\,\mathbf{k}\right),\ \alpha = \frac{u_1 - u_2}{\ln(r_2/r_1)},$$

где u_1 — потенциал на границе внутреннего, а u_2 — на границе внешнего электрода, найти поток этого поля через пластину σ, определяемую соотношениями

$$-1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1,\ z = 2,$$

в направлении ее нормали $\mathbf{n} = \mathbf{k}$.

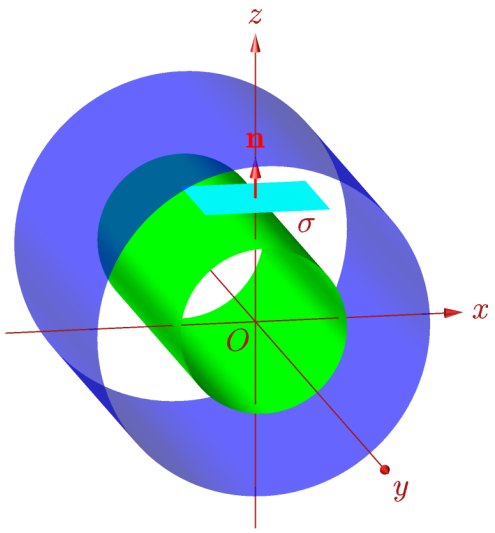

Рис. 6.

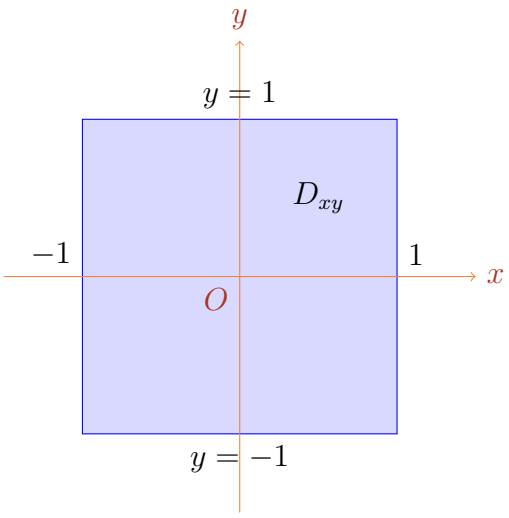

Рис. 7.

Решение. На рис. 7 показана проекция пластинки на плоскость xOy. Для вычисления потока используем формулу (5):

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} \mathbf{En}\, d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} (\mathbf{Ek})|_{z=2}\, dx\, dy = \alpha \iint\limits_{D_{xy}} \left.\frac{z}{x^2+z^2}\right|_{z=2} dx\, dy =$$

$$= \alpha \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} \frac{2}{x^2+4}\, dy = 2\alpha \int_{-1}^{1} \frac{y}{x^2+4}\Big|_{-1}^{1} dx =$$
$$= 4\alpha \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+4} = 2\alpha \operatorname{arctg} \frac{x}{2}\Big|_{-1}^{1} = 4\alpha \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \approx 1{,}855\alpha.$$

Пример 3. *Найти поток векторного поля* $\mathbf{F} = 3x\,\mathbf{i} - 4y\,\mathbf{j} + (1+z)\,\mathbf{k}$ *через треугольник* σ*, вырезаемый из плоскости* $3x + 4y + z - 4 = 0$ *координатными плоскостями, рис. 8. В качестве нормали к треугольнику выбрать нормаль, образующую острый угол с осью* Oz.

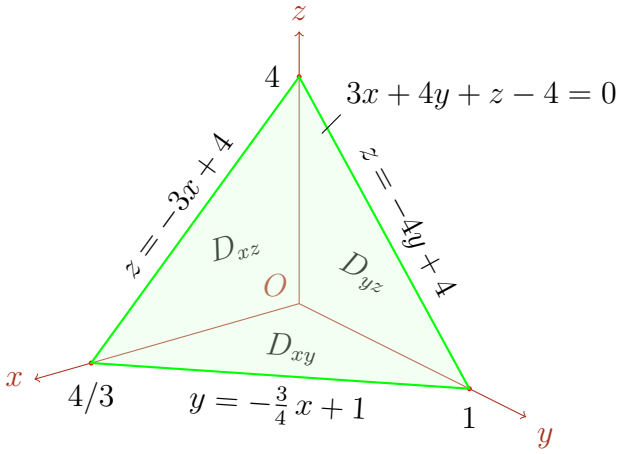

Рис. 8.

Решение. Заданный треугольник однозначно проектируется на все координатные плоскости, в силу чего уравнение плоскости может быть записано еще тремя способами:

$$x = h(y,z) = -\frac{4}{3}\,y - \frac{1}{3}\,z + \frac{4}{3},\ \ y = g(x,z) = -\frac{3}{4}\,x - \frac{1}{4}\,z + 1,$$
$$z = f(x,y) = -3x - 4y + 4.$$

Заметим, что нормаль, образующая острый угол с осью аппликат, в данном случае образует острые углы и с другими координатными осями. Чтобы применить формулу (4), вычислим каждый из трех входящих в нее двойных интегралов:

$$\iint\limits_{D_{yz}} F_1\left(h(y,z), y, z\right)\, dy\, dz = \iint\limits_{D_{yz}} \left(-4y - z + 4\right)\, dy\, dz =$$
$$= \int_0^1 dy \int_0^{-4y+4} \left(-4y - z + 4\right)\, dz = \int_0^1 \left[4(1-y)\,z - \frac{z^2}{2}\right]\Big|_0^{-4y+4} dy =$$
$$= \int_0^1 \left(8y^2 - 16y + 8\right)\, dy = \left(\frac{8}{3}\,y^3 - 8\,y^2 + 8y\right)\Big|_0^1 = \frac{8}{3};$$

$$\iint\limits_{D_{xz}} F_2\left(x, g(x,y), z\right)\, dx\, dz = \iint\limits_{D_{xz}} \left(3x + z - 4\right)\, dy\, dz =$$

$$= \int_0^{4/3} dx \int_0^{-3x+4} (3x + z - 4)\ dz = \int_0^{4/3} \left[(3x-4)\, z + \frac{z^2}{2} \right] \Big|_0^{-3x+4}\ dx =$$

$$= \int_0^{4/3} \left(-\frac{9}{2}\, x^2 + 12x - 8 \right)\ dx = \left(-\frac{3}{2}\, x^3 + 6x^2 - 8x \right) \Big|_0^{4/3} =$$

$$= -\frac{32}{9} + \frac{32}{3} - \frac{32}{3} = -\frac{32}{9};$$

$$\iint\limits_{D_{xy}} F_3\left(x, y, f\left(x, y\right)\right)\ dx\, dy = \iint\limits_{D_{xz}} \left(-3x - 4y + 5\right)\ dx\, dy =$$

$$= \int_0^{4/3} dx \int_0^{-3x/4+1} \left(-3x - 4y + 5\right)\ dy = \int_0^{4/3} \left[(5-3x)\, y - 2y^2 \right] \Big|_0^{-3x/4+1}\ dx =$$

$$= \int_0^{4/3} \left(\frac{9}{8}\, x^2 - \frac{15}{4}\, x + 3 \right)\ dx = \left(\frac{3}{8}\, x^3 - \frac{15}{8}\, x^2 + 3x \right) \Big|_0^{4/3}\ dx =$$

$$= \frac{8}{9} - \frac{10}{3} + 4 = \frac{14}{9}.$$

Складывая результаты по формуле (4), получим

$$\Pi = \frac{8}{3} - \frac{32}{9} + \frac{14}{9} = \frac{2}{3}.$$

□

В Приложении рассмотрены возможности применения системы *Mathematica* к вычислению потока векторного поля[2)].

Приложение

[1)] Модель ленты Мёбиуса получится, если взять полоску бумаги (рис. 9) и склеить ее узкие края, предварительно перекрутив полоску так, чтобы точка a приклеилась к точке d, а точка b — к c.

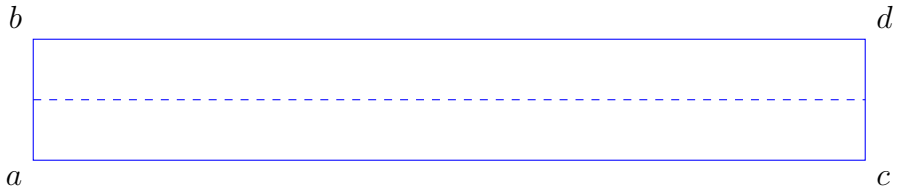

Рис. 9.

[2)] В принципе возможности системы *Mathematica* для расчета потока векторного поля равносильны возможностям вычисления двойного интеграла, к которому в конечном итоге и сводится поверхностный интеграл II рода. Решим таким образом в системе *Mathematica* 10 пример 2:

```
R=ÌmplicitRegion[-1 ≤ x ≤ 1 && -1 ≤ y ≤ 1, {x,y}];
Integrate[α z/(x^2 + z^2) /. z → 2, {x,y} ∈ R]
% // N
```

$4\,\alpha\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{1}{2}\right]$

$1.85459\,\alpha$

В других случаях *Mathematica* может выполнить интегрирование, в максимальной степени избавив нас от промежуточных вычислений и тем самым предохранив от досадных ошибок. Продемонстрируем это на примере 3.

Вначале зададим векторное поле и левую часть уравнения плоскости из этого примера:

```
F = {3 x, -4 y, 1 + z};
ff = 3 x + 4 y + z - 4;
```

Далее, разрешая уравнение плоскости относительно переменных, найдем функции h, g и f, выводя их для контроля процесса на дисплей:

```
solX = Solve[ff == 0, x]
h[y_,z_] := x /. solX[[1]]
solY = Solve[ff == 0, y]
g[x_,z_] := y /. solY[[1]]
solZ = Solve[ff == 0, z]
f[x_,y_] := z /. solZ[[1]]
```

$\left\{\left\{x \to \frac{1}{3}(4 - 4y - z)\right\}\right\}$

$\left\{\left\{y \to \frac{1}{4}(4 - 3x - z)\right\}\right\}$

$\{\{y \to 4 - 3x - 4y\}\}$

Сформируем подынтегральные функции:

```
F1[y_,z_] := F[[1]] /. x → h[y,z]
F2[x_,z_] := F[[2]] /. y → g[x,z]
F3[x_,y_] := F[[3]] /. z → f[x,y]
```

Найдем область, ограниченную заданной плоскостью и координатными плоскостями:

```
Dxyz = ImplicitRegion[x ≥ 0 && y ≥ 0 && 0 ≤ z ≤ f[x,y], {x,y,z}];
```

Оператор `RegionBounds` позволяет найти границы изменения переменных для заданной области:

```
tetra = RegionBounds[Dxyz]
```

$$\left\{\left\{0, \frac{4}{3}\right\}, \{0, 1\}, \{0, 4\}\right\}$$

Этот ответ означает, что x изменяется от 0 до $4/3$, y — от 0 до 1, а z — от 0 до 4.

Найдем функции, ограничивающие области D_{yz}, D_{xz} и D_{xy} сверху:

```
solYZ = Solve[(ff /. x → 0) == 0, z]
bYZ[y_] := z /. solYZ[[1]]
solXZ = Solve[(ff /. y → 0) == 0, z]
bXZ[x_] := z /. solXZ[[1]]
solXY = Solve[(ff /. z → 0) == 0, y]
bXY[x_] := y /. solXY[[1]]
{{z → -4(-1 + y)}}
{{z → 4 - 3 x}}
```

$$\left\{\left\{y \to \frac{1}{4}(4 - 3x)\right\}\right\}$$

Вычислим интеграл по области D_{yz}:

```
Dyz = ImplicitRegion[tetra[[2,1]] ≤ y ≤ tetra[[2,2]] && 0 ≤ z ≤ bYZ[y], {y,z}];
```

$$\text{intYZ} = \int_{\{y,z\} \in \text{Dyz}} \text{F1}[y,z]$$

затем по области D_{xz}:

```
Dxz = ImplicitRegion[tetra[[1,1]] ≤ x ≤ tetra[[1,2]] && 0 ≤ z ≤ bXZ[x], {x,z}];
```

$$\text{intXZ} = \int_{\{x,z\} \in \text{Dxz}} \text{F2}[x,z]$$

и, наконец, по области D_{xy}:

```
Dxy = ImplicitRegion[tetra[[1,1]] ≤ x ≤ tetra[[1,2]] && 0 ≤ y ≤ bXY[x], {x,y}];
```

$$\text{intXY} = \int_{\{x,y\} \in \text{Dxy}} \text{F3}[x,y]$$

Остается сложить все три интеграла:

```
intYZ + intXZ + intXY
```

$$\frac{2}{3}$$

Пример П1. *Найти поток векторного поля* $\mathbf{F} = 2x\,\mathbf{i} + (1-2y)\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$ *через замкнутую поверхность* $\sigma : x^2 + z^2 = 1 - 2y$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, *представляющую собой часть поверхности параболоида, в направлении его внешней нормали.*

Решение. Разрешим уравнение параболоида относительно z и запишем правую часть этой функции в системе *Mathematica*:

```
f[x_,y_] := √(1 - x^2 - 2 y);
```

Введем также векторное поле:

```
F[x_,y_,z_] := {2 x,1 - 2 y,2 z};
```

Вычислим нормаль к поверхности и найдем ее скалярное произведение на вектор $\mathbf{k}$:

```
nrm[x_,y_] := {-∂x f[x,y],-∂y f[x,y],1}
nrm[x,y]
nrm[x,y].{0,0,1}
```

$$\left\{\frac{x}{\sqrt{1-x^2-2y}}, \frac{1}{\sqrt{1-x^2-2y}}, 1\right\}$$

1

Поскольку скалярное произведение положительно, то нормаль образует острый угол с осью Oz и является внешней для параболоида (рис. 10).

Далее получим проекцию D_{xy} поверхности на плоскость xOy, т. е. область интегрирования для двойного интеграла, и нарисуем ее (рис. 11):

```
Dxy = ImplicitRegion[y ≥ 0 && 0 ≤ f[x,y] ≤ 1, {x,y}];
RegionPlot[Dxy, FrameLabel → {x,y}]
```

Оператор `FrameLabel` служит для обозначения сторон координатной рамки, в которую берется рисунок. Выполнив интегрирование по формуле (5), получим ответ:

$$\int\limits_{\{x,y\}\in D_{xy}} ((F[x,y,z].nrm[x,y]) /. z \to f[x,y])$$

$$\frac{3\pi}{4}$$

Рисунок 10 был получен следующим образом. Вначале была выбрана точка для построения нормали:

```
x0 = 0.4; y0 = 0.1; z0 = f[x0, y0];
```

Потом были сформированы графики параболоида:

```
plot1 = Plot3D[f[x,y], {x,-1,1}, {y,0,0.55}, AxesLabel → {"x","y","z"},
    BoxRatios → {1.3,1,1}];
```

векторного поля:

```
plot2 = VectorPlot3D[F[x,y,z], {x,-1,1}, {y,0,0.55}, {z,0,1.5}, VectorPoints → 8,
    VectorScale → {0.07,Scaled[1]}, VectorStyle → Green];
```

и нормали:

```
plot3 = ParametricPlot3D[{x0 + t nrm[x,y][[1]] /. {x → x0, y → y0},
    y0 + t nrm[x,y][[2]] /. {x → x0, y → y0}, z0 + t}, {t,0,0.15},
```

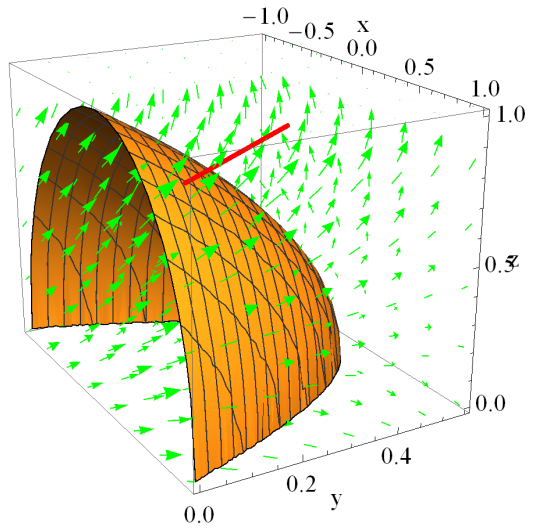

Рис. 10.

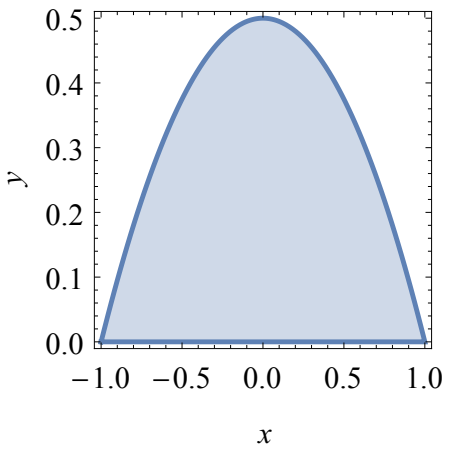

Рис. 11.

```
PlotStyle → {Thick,Red}];
```

а затем все графики были сведены в один рисунок:

```
Show[plot1,plot2,plot3]
```

Опция `Scaled`, использованная для построения графика `plot2`, обеспечивала соответственно длине стрелки, изображающей векторное поле, изменение других ее размеров. Еще одна опция, `VectorStyle`, определила стиль изображения векторного поля, в данном случае цвет изображающих элементов (вообще говоря, ими могут быть не только стрелки).

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного* . — М.: Наука, 1985, — с. 230-245.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* — М.: Рольф, 2000. Ч. 2. — с. 99-102, 170-173.