Неоднородные ЛДУ с постоянными коэффициентами

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Методы решения. Применение к задачам электротехники.

Анимация процессов, происходящих в RLC-контурах.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Применение системы *Mathematica* для решения дифференциальных уравнений рассматриваемого типа.

29 декабря 2010 г.

Таким уравнением называется уравнение вида

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = f(x), \tag{1}$$

где a_j — действительные числа, $y(x)$ — неизвестная функция, $f(x)$ — известная непрерывная в интервале (a, b) функция. Согласно рассмотренной ранее теории для решения такого уравнения надо найти общее решение соответствующего однородного уравнения и сложить его с частным решением уравнения (1).

Сегодня мы займемся получением частного решения (1), когда его правая часть имеет специальный вид.

1 Правая часть: $f(x) = P_m(x)\, e^{\alpha x}$

Запишем уравнение (1) с такой правой частью:

$$L(y) = P_m(x)\, e^{\alpha x}, \tag{2}$$

где $P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} B_j x^{m-j}$.

Частное решение будем искать в виде

$$\boxed{\overline{y} = x^k Q_m(x) e^{\alpha x},} \tag{3}$$

где k — кратность корня α характеристического уравнения для уравнения (2), $Q_m(x) = \sum_{j=0}^{m} A_j x^{m-j}$ — полный многочлен той же степени, что и $P_m(x)$, с неопределенными коэффициентами A_j. Слово «полный» означает, что в многочлене $Q_m(x)$ присутствуют все его одночлены, даже если многочлен $P_m(x)$ таким свойством не обладает.

Подставим функцию $\overline{y}$ в уравнение (2) вместо y. Преобразуем полученное уравнение, обозначив $\varphi(x)$ левую часть характеристического уравнения и использовав формулу†

$$L\left(x^l e^{\alpha x}\right) = \sum_{\nu=0}^{l} C_l^{\nu} \varphi^{(\nu)}(\alpha) x^{l-\nu} e^{\alpha x} \tag{4}$$

и тот факт, что

$$\varphi^{(s)}(\alpha) = 0, s = \overline{0, k-1};\ \varphi^{(s)}(\alpha) \neq 0, s = \overline{k, n}. \tag{5}$$

Сначала преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} L(\overline{y}) &= L\left(x^k \sum_{j=0}^{m} A_j x^{m-j} e^{\alpha x}\right) = \sum_{j=0}^{m} A_j L\left(x^{m+k-j} e^{\alpha x}\right) \overset{(4)}{=} \\ &= \sum_{j=0}^{m} A_j \sum_{s=0}^{m+k-j} C_{m+k-j}^{s} \varphi^{(s)}(\alpha) x^{m+k-j-s} e^{\alpha x} \overset{(5)}{=} \\ &= \sum_{j=0}^{m} A_j \sum_{s=k}^{m+k-j} C_{m+k-j}^{s} \varphi^{(s)}(\alpha) x^{m+k-j-s} e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

Приравняем ее правой части, сократив при этом на $e^{\alpha x}$:

$$\sum_{j=0}^{m} A_j \sum_{s=k}^{m+k-j} C_{m+k-j}^{s} \varphi^{(s)}(\alpha) x^{m+k-j-s} = \sum_{j=0}^{m} B_j x^{m-j}. \tag{6}$$

Далее приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x. Возьмем степень $x^{m-\nu}$. В левой части (6) такая степень получается при $k - j - s = -\nu$, или $s = k - j + \nu \geq k$. Из последнего неравенства следует, что $j \leq \nu$. Следовательно, в выражении (6) в первой сумме индекс должен изменяться от 0 до ν, а вторая сумма должна исчезнуть, поскольку s должно равняться только одному значению: $s = k - j + \nu$. Поэтому равенство (6) превратится в следующую

†Лекция «Однородные ЛДУ высших порядков».

систему равенств для коэффициентов:

$$\sum_{j=0}^{\nu} A_j C_{m+k-j}^{k-j+\nu} \varphi^{(k-j+\nu)}(\alpha) = B_\nu, \ \nu = \overline{0, m}.$$

При $\nu = 0$ получаем равенство $A_0 C_{m+k}^{k} \varphi^{(k)}(\alpha) = B_0$, из которого находим A_0, так как $\varphi^{(k)}(\alpha) \neq 0$. При $\nu = 1$ приходим к равенству

$$A_0 C_{m+k}^{k+1} \varphi^{(k+1)}(\alpha) + A_1 C_{m+k-1}^{k} \varphi^{(k)}(\alpha) = B_1,$$

которое дает A_1 при известном A_0, так как $\varphi^{(k)}(\alpha) \neq 0$, $\varphi^{(k+1)}(\alpha) \neq 0$. Продолжая и т.д., при $\nu = m$ найдем A_m.

Таким образом, искомое частное решение (3) всегда может быть найдено.

Пример 1. *Найти общее решение уравнения*

$$y'' - 5y' = -5x^2 + 2x. \tag{7}$$

Решение. Составим характеристическое уравнение для уравнения (7):

$$p^2 - 5p = 0.$$

Его корни действительны и различны: $p_1 = 0$, $p_2 = 5$. Следовательно, общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (7), будет таким:

$$y^* = C_1 + C_2 e^{5x}.$$

Правая часть заданного уравнения имеет вид многочлена второй степени, умноженного на экспоненту: $(-5x^2 + 2x)\, e^{0 \cdot x}$. При этом множитель в показателе экспоненты $\alpha = 0$ является однократным корнем характеристического уравнения. Следовательно, частное решение надо искать в виде

$$\overline{y} = x\left(Ax^2 + Bx + C\right) e^{0 \cdot x} = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Найдем производные этой функции:

$$\overline{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \ \overline{y}'' = 6Ax + 2B,$$

и подставим полученные выражения вместо неизвестной функции и ее производных в заданное уравнение:

$$6Ax + 2B - 5\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = -5x^2 + 2x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, составляем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -15A = -5, \\ 6A - 10B = 2, \\ 2B - 5C = 0. \end{cases}$$

Решая ее, получаем, что $A = 1/3$, $B = C = 0$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y^* = \frac{1}{3}x^3,$$

а общее решение заданного уравнения является суммой этого частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения:

$$y = y^* + \overline{y} = C_1 + C_2 e^{5x} + \frac{1}{3}x^3.$$

2 Правая часть: $f(x) = [P_m(x)\cos x + R_l(x)\cos x]\, e^{\alpha x}$

В этом случае уравнение (1) имеет вид

$$L(y) = [P_m(x)\cos\beta x + R_l(x)\cos\beta x]\, e^{\alpha x}, \tag{8}$$

где $P_m(x)$, $R_l(x)$ – многочлены степеней m и l, соответственно. Согласно формулам Эйлера можем записать, что

$$\cos\beta x = \frac{1}{2}\left(e^{jbx} + e^{-jbx}\right),\ \sin\beta x = \frac{1}{2j}\left(e^{jbx} - e^{-jbx}\right).$$

Следовательно, уравнение (8) можно представить так:

$$L(y) = \overline{P}_r(x)\, e^{(\alpha+j\beta)x} + \overline{R}_r(x)\, e^{(\alpha-j\beta)x}, \tag{9}$$

где $r = \max(m, l)$, $\overline{P}_r$, $\overline{R}_r(x)$ – многочлены с комплексными коэффициентами. В соответствии с предыдущим материалом, чтобы найти частное решение этого уравнения, надо сначала найти частные решения уравнений

$$L(y) = \overline{P}_r(x)\, e^{(\alpha+j\beta)x},$$
$$L(y) = \overline{R}_r(x)\, e^{(\alpha-j\beta)x},$$

причем, искать эти решения следует в виде, рассмотренном в предыдущем п. данной лекции:

$$\overline{y}_1 = x^k \overline{Q}_r(x)\, e^{(\alpha+j\beta)x},$$
$$\overline{y}_2 = x^k \overline{T}_r(x)\, e^{(\alpha-j\beta)x},$$

где k – кратность корня $\alpha+j\beta$ характеристического уравнения, $\overline{Q}_r(x)$, $\overline{T}_r(x)$ – комплексные многочлены с неопределенными коэффициентами. Как было показано, эти коэффициенты определяются однозначно. После вычисления их значений можно составить комплексное решение уравнения (9):

$$\overline{y} = \overline{y}_1 + \overline{y}_2 = x^k\left[\overline{Q}_r(x)\, e^{(\alpha+j\beta)x} + \overline{T}_r(x)\, e^{(\alpha-j\beta)x}\right],$$

которое с помощью формул Эйлера легко преобразуется в действительное решение уравнения (8):

$$\boxed{\overline{y} = x^k\left[Q_r(x)\cos\beta x + T_r(x)\sin\beta x\right] e^{\alpha x},} \tag{10}$$

где $Q_r(x)$, $T_r(x)$ – действительные многочлены.

Тем самым мы показали, что частное решение неоднородного уравнения (8) всегда может быть найдено. Но на практике его ищут не в комплексной, а в

действительной форме (10), записывая многочлены $Q_r(x)$, $T_r(x)$ с неопределенными коэффициентами.

Пример 2. *Решить уравнение* $y'' + y' - 2y = (\cos x - 7\sin x)\, e^x$.

Решение. Составим характеристическое уравнение для заданного уравнения:

$$p^2 + p - 2 = 0.$$

Его корни: $p_1 = -2$, $p_2 = 1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения, соответствующего заданному неоднородному уравнению, имеет вид:

$$y^* = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x.$$

Правая часть заданного уравнения имеет параметры $\alpha = 1$, $\beta = 1$ и при этом число $\alpha + j\beta = 1 + j$ не является корнем характеристического уравнения. Многочлены при тригонометрических функциях имеют нулевые степени. Поэтому частное решение заданного уравнения будем искать в виде

$$\overline{y} = (A\cos x + B\sin x)\, e^x.$$

Найдем производные этой функции:

$$\begin{aligned}\overline{y}' &= (-A\sin x + B\cos x)\, e^x + (A\cos x + B\sin x)\, e^x = \\ &= [(B - A)\sin x + (A + B)\cos x]\, e^x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{y}'' &= [(B - A)\cos x - (A + B)\sin x]\, e^x + [(B - A)\sin x + (A + B)\cos x]\, e^x = \\ &= (2B\cos x - 2A\sin x)\, e^x.\end{aligned}$$

Подставим эти выражения вместо неизвестной функции и ее производных в заданное уравнение:

$$\begin{gathered}[2B\cos x - 2A\sin x + (B - A)\sin x + (A + B)\cos x - 2A\cos x - \\ - 2B\sin x]\, e^x = (\cos x - 7\sin x)\, e^x, \\ (3B - A)\cos x + (-B - 3A)\sin x = \cos x - 7\sin x.\end{gathered}$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях и получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 3B - A = 1, \\ -B - 3A = -7, \end{cases}$$

решая которую, получаем, что $A = 2$, $B = 1$. Значит, частным решением заданного уравнения является функция

$$\overline{y} = (2\cos x + \sin x)\, e^x,$$

а его общее решение имеет вид

$$y = y^* + \overline{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + (2\cos x + \sin x)\, e^x,$$

или

$$y = C_1 e^{-2x} + (C_2 + 2\cos x + \sin x)\, e^x.$$

3 Правая часть: $f(x) = \sum f_i(x)$

Здесь $f_i(x)$ — функции, рассматривавшиеся в правых частях уравнения (1) в предыдущих пунктах. Как было показано на одной из прочитанных лекций, *частное решение в таком случае ищут в виде суммы частных решений, отвечающих слагаемым в правой части уравнения*. Следующий пример поясняет сказанное.

Пример 3. *Найти общее решение уравнения:* $y'' - y = 6\sin x + 3e^{2x} + 4e^x$.

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$p^2 - 1 = 0.$$

Его корни: $p_1 = -1$, $p_2 = 1$. Следовательно, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^x.$$

В соответствии с видом правой части заданного уравнения и с учетом того, что для третьего слагаемого в правой части коэффициент $\alpha = 1$ в показателе экспоненты совпадает с однократным корнем характеристического уравнения, частное решение следует искать в виде

$$\overline{y} = A\sin x + B\cos x + Ce^{2x} + Dxe^x.$$

Найдем производные этой функции:

$$\overline{y}' = A\cos x - B\sin x + 2Ce^{2x} + De^x + Dxe^x,$$
$$\overline{y}'' = -A\sin x - B\cos x + 4Ce^{2x} + 2De^x + Dxe^x.$$

Подставим эти выражения вместо неизвестной функции и ее производных в заданное уравнение:

$$-A\sin x - B\cos x + 4Ce^{2x} + 2De^x + Dxe^x -$$
$$- A\ \sin x - B\cos x - Ce^{2x} - Dxe^x = 6\sin x + 3e^{2x} + 4e^x.$$

Приравниваем коэффициенты при различных функциях и получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -2B = 0, \\ -2A = 6, \\ 3C = 3, \\ 2D = 4, \end{cases}$$

из которой находим неопределенные коэффициенты: $A = -3$, $B = 0$, $C = 1$, $D = 2$. Искомое частное решение имеет вид

$$\overline{y} = -3\sin x + e^{2x} + 2xe^x.$$

Следовательно, общее решение заданного уравнения будет таким:

$$y = y^* + \overline{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - 3\sin x + e^{2x} + 2xe^x,$$

или

$$y = C_1 e^{-x} + (C_2 + 2x)\, e^x + e^{2x} - 3\sin x.$$

□

В Приложении[1)] приводятся примеры решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений в системе *Mathematica*.

4 Применение в электротехнике

На лекции, посвященной однородным линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами, было получено уравнение для тока в RLC-контуре, изображенном на рис. 1.

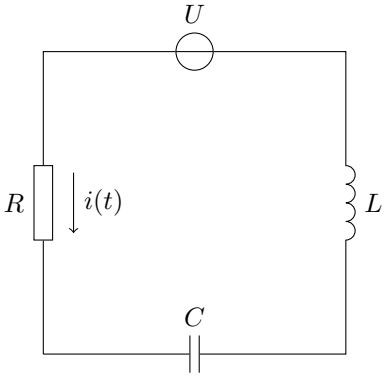


Рис. 1. RLC-контур.

Это уравнение имело вид

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}\, i = \frac{1}{L} \cdot \frac{du}{dt}. \tag{11}$$

Было рассмотрено и решено соответствующее однородное уравнение (случай постоянного входного напряжения), которое при определенных значениях параметров контура приводило к свободным колебаниям тока в контуре (затухающим и гармоническим). Рассмотрим этот же контур при подаче в него напряжения в виде гармонических колебаний с частотой ω и амплитудой U:

$$u\,(t) = U \sin \omega t.$$

Уравнение (11) при этом будет выглядеть так:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}\, i = \frac{U}{L}\, \omega \cos \omega t. \tag{12}$$

Это уравнение называется уравнением ***вынужденных колебаний***.
Рассмотрим случай, когда $R^2 < 4L/C$, т.е., когда общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (12), имеет вид

$$i^* = (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)\, e^{-\alpha t},$$

где $\alpha = \frac{R}{2L}$, $\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$. Естественно считать, что $\alpha \neq 0$, и тогда частное решение уравнения (12) можно искать в виде

$$\bar{i} = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Продифференцируем эту функцию:

$$\bar{i}' = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t, \qquad \bar{i}'' = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t.$$

Подставим в уравнение (12) эти выражения вместо неизвестного тока и его производных:

$$-A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t + \frac{R}{L}\left(-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t\right) +$$
$$+ \frac{1}{LC}\left(A \cos \omega t + B \sin \omega t\right) = \frac{U}{L}\omega \cos \omega t.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{LC} - \omega^2\right) A + \dfrac{R}{L}\omega B = \dfrac{U}{L}\omega, \\ -\dfrac{R}{L}\omega A + \left(\dfrac{1}{LC} - \omega^2\right) B = 0. \end{cases}$$

Решим ее по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{LC} - \omega^2 & \dfrac{R}{L}\omega \\ -\dfrac{R}{L}\omega & \dfrac{1}{LC} - \omega^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \frac{R^2}{L^2}\omega^2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{U}{L}\omega & \dfrac{R}{L}\omega \\ 0 & \dfrac{1}{LC} - \omega^2 \end{vmatrix} = \frac{U}{L}\omega\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{LC} - \omega^2 & \dfrac{U}{L}\omega \\ -\dfrac{R}{L}\omega & 0 \end{vmatrix} = \frac{RU}{L^2}\omega^2.$$

$$A(\omega) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{U}{L}\omega\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \frac{R^2}{L^2}\omega^2}, \; B(\omega) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\frac{RU}{L^2}\omega^2}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \frac{R^2}{L^2}\omega^2}.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$i(t) = i^* + \bar{i} = \left(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t\right) e^{-\alpha t} + A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t.$$

Продифференцируем полученную функцию:

$$i'(t) = \left(-C_1\beta \sin \beta t + C_2\beta \cos \beta t\right) e^{-\alpha t} - \alpha\left(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t\right) e^{-\alpha t} -$$

$$-A(\omega)\,\omega\sin\omega t + B(\omega)\,\omega\cos\omega t,$$

чтобы найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$i(0) = i_0,\ i'(0) = i'_0. \tag{13}$$

Получим

$$i(0) = C_1 + A(\omega) = i_0, \qquad i'(0) = C_2\beta - \alpha C_1 + B(\omega)\,\omega = i'_0,$$

$$C_1 = i_0 - A(\omega)\,,\ C_2 = \frac{i'_0 - B(\omega)\,\omega + \alpha\left[i_0 - A(\omega)\right]}{\beta}.$$

Следовательно, решение задачи Коши будет таким:

$$i(t) = \left\{\left[i_0 - A(\omega)\right]\cos\beta t + \frac{i'_0 - B(\omega)\,\omega + \alpha\left[i_0 - A(\omega)\right]}{\beta}\sin\beta t\right\}e^{-\alpha t} +$$
$$+ A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t. \tag{14}$$

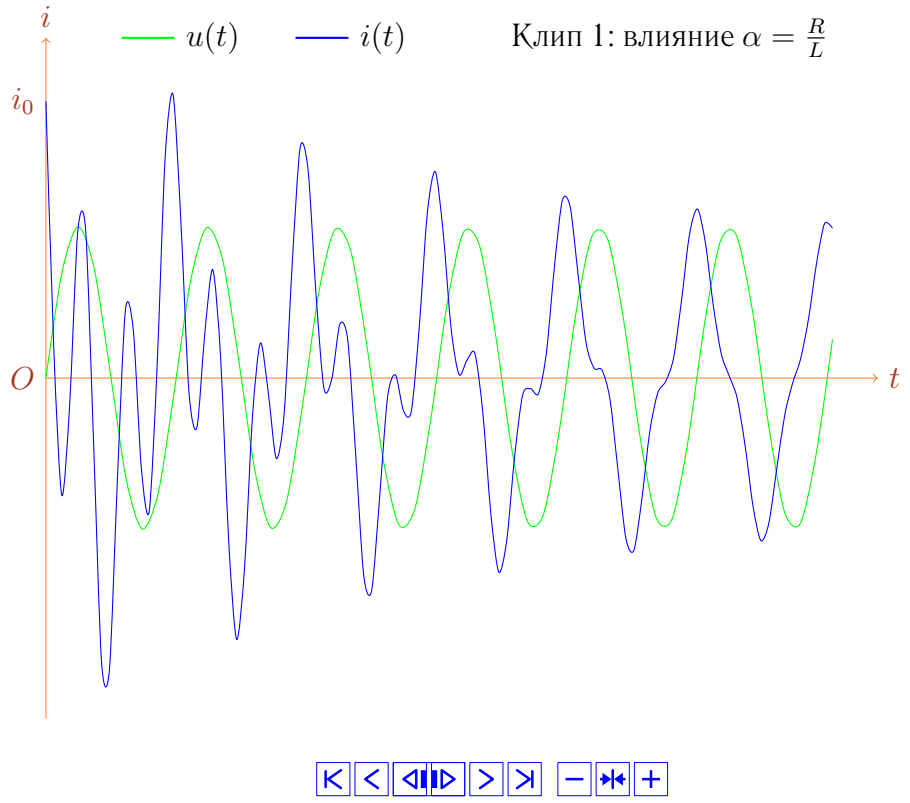


Рис. 2. Вынужденные колебания тока в RLC-контуре.

Видно, что при $t \to \infty$ ток стремится к гармоническим колебаниям:

$$i_\infty(t) = A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t. \tag{15}$$

Встроенная в рис. 2 анимация демонстрирует поведение полученного решения при изменении некоторых параметров.

Анимация состоит из четырех клипов. Первый клип показывает, как при увеличении параметра $\alpha = R/L$ все раньше наступает момент превращения переходного процесса для тока в гармонические колебания (15). Во втором клипе можно наблюдать, как приближение частоты ω к собственной частоте контура $\beta_0 = 1/\sqrt{LC}$ (в результате уменьшения параметра $\gamma = \sqrt{\beta_0^2 - \omega^2}$) приводит к резкому возрастанию амплитуды колебаний. Это явление более детально рассматривается в Приложении (раздел «Резонанс»). В третьем клипе изучается влияние параметра $\delta = U/L$. Вначале он равен нулю, что равносильно отсутствию напряжения на входе контура. Колебания носят характер затухающих. При увеличении δ они быстро превращаются в колебания переходного процесса, предваряющего установление почти гармонических колебаний в контуре. Четвертый клип демонстрирует увеличение частоты колебаний тока в ответ на увеличение частоты входного напряжения ω.

В Приложении рассмотрены и другие явления, возникающие в RLC-контуре.[2)]

Приложение

[1] Как и при решении линейных однородных дифференциальных уравнений с помощью системы *Mathematica*, следует применить либо команду `DSolve`, обеспечивающую решение в аналитическом виде, либо команду `NDSolve`, которая дает численное решение дифференциального уравнения.

Решим с помощью первой команды рассмотренные на лекции примеры:

```
DSolve[y''[x] - 5 y'[x] == -5 x^2 + 2 x, y[x], x]
```

$$\{\{y[x] \to \frac{x^3}{3} + \frac{1}{5}e^{5x}C[1] + C[2]\}\}$$

```
DSolve[y''[x] + y'[x] - 2 y[x] == (Cos[x] - 7 Sin[x])e^x, y[x], x]
```

$$\{\{y[x] \to e^{-2x}C[1] + e^x C[2] + e^x(2\,\mathrm{Cos}[x] + \mathrm{Sin}[x])\}\}$$

```
DSolve[y''[x] - y[x] == 6 Sin[x] + 3 e^(2x) + 4e^x, y[x], x]
```

$$\{\{\mathrm{y[x]} \to -e^x + e^{2x} + 2e^x x + e^x \mathrm{C}[1] + e^{-x}\mathrm{C}[2] - 3\,\mathrm{Sin}[x]\}\}$$

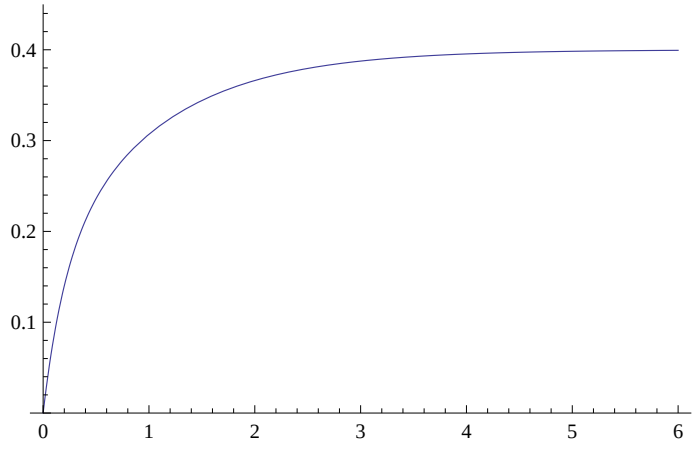
При заданных начальных условиях *Mathematica* находит решение задачи Коши:

```
DSolve[{y''[x] + 5 y'[x] == e^-x, y[0] == 0, y'[0] == 1}, y[x], x]
```

$$\{\{y[x] \to \frac{1}{20}e^{-5x}(-3 - 5e^{4x} + 8e^{5x})\}\}$$

В этом случае можно построить график решения:

```
Plot[y[x] /. %, {x, 0, 6}, PlotRange → {0, 0.5}]
```



[2] Можно заметить, что колебания, описываемые формулой (15), отличаются от колебаний входного напряжения, поэтому исследуем их отдельно. Правую часть последнего равенства можно преобразовать обычным в электротехнике способом:

$$i_\infty(t) = W(\omega)\left[\frac{A(\omega)}{W(\omega)}\cos\omega t + \frac{B(\omega)}{W(\omega)}\sin\omega t\right],$$
$$i_\infty(t) = W(\omega)\sin(\omega t + \varphi),$$

где

$$W(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)},\ \sin\varphi = \frac{A(\omega)}{W(\omega)},\ \cos\varphi = \frac{B(\omega)}{W(\omega)}.$$

Найдем максимальное значение $W_{\max}$ амплитуды $W(\omega)$. Для этого сначала преобразуем выражение для нее:

$$W(\omega) = \sqrt{\left[\frac{\frac{U}{L}\omega\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)}{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\frac{R^2}{L^2}\omega^2}\right]^2+\left[\frac{\frac{RU}{L^2}\omega^2}{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\frac{R^2}{L^2}\omega^2}\right]^2} =$$

$$= \frac{U}{L}\omega\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\frac{R^2}{L^2}\omega^2}{\left[\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\frac{R^2}{L^2}\omega^2\right]^2}} = \frac{U}{L}\cdot\frac{\omega}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\frac{R^2}{L^2}\omega^2}}.$$

Теперь найдем производную полученной функции:

$$W'(\omega) = \frac{U}{L}\cdot\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\frac{R^2}{L^2}\omega^2}-\omega\frac{-4\omega\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)+2\omega\frac{R^2}{L^2}}{2\sqrt{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\frac{R^2}{L^2}\omega^2}}}{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\frac{R^2}{L^2}\omega^2} =$$

$$= \frac{U}{L}\cdot\frac{2\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\frac{2R^2}{L^2}\omega^2+4\omega^2\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)-2\omega^2\frac{R^2}{L^2}}{2\left[\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\frac{R^2}{L^2}\omega^2\right]^{3/2}} =$$

$$= \frac{2U}{L}\cdot\frac{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)\left(\frac{1}{LC}-\omega^2+2\omega^2\right)}{2\left[\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\frac{R^2}{L^2}\omega^2\right]^{3/2}} = \frac{U}{L}\cdot\frac{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)\left(\frac{1}{LC}+\omega^2\right)}{\left[\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\frac{R^2}{L^2}\omega^2\right]^{3/2}}.$$

Точку экстремума определяет параболическая зависимость от ω в первых скобках в числителе. Так как ветви соответствующей параболы идут вниз, то в точке экстремума имеется максимум функции $W(\omega)$. В точке экстремума $\omega_{\max} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, максимум функции равен $W_{\max} = W(\omega_{\max}) = \frac{U}{R}$.

На лекции по однородным ЛДУ высших порядков величина $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ была названа частотой собственных колебаний контура. Мы видим, что амплитуда вынужденных колебаний максимальна, когда частота внешнего напряжения (***вынуждающая частота***) совпадает с частотой собственных колебаний контура $\frac{1}{\sqrt{LC}}$. Это явление носит название ***резонанса***.

Зависимость максимальной амплитуды колебаний от параметра R такова, что амплитуда неограниченно возрастает, когда сопротивление неограниченно уменьшается. Для случая резонанса ($R = 0$, $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$) решение не может быть выражено формулой (14), потому что знаменатели коэффициентов $A(\omega)$ и $B(\omega)$ обращаются в 0. Поэтому поведение контура в условиях резонанса надо рассмотреть отдельно.

Резонанс

Уравнение (12), когда $R = 0$, $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, становится таким:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \omega^2 i = \frac{U}{L}\omega\cos\omega t. \qquad (\text{П}1)$$

Решая характеристическое уравнение

$$p^2 + \omega^2 = 0,$$

получаем корни $p_{1,2} = \pm j\omega$, которые определяют решение соответствующего однородного уравнения:

$$i^* = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t.$$

Учитывая, что правой части уравнения (П1) отвечает однократный корень характеристического уравнения, частное решение следует искать в виде

$$\bar{i} = t\left(M\cos\omega t + N\sin\omega t\right),$$

где M, N — неопределенные коэффициенты. Найдем производные искомого частного решения:

$$\begin{aligned}
\bar{i}' &= M\cos\omega t + N\sin\omega t + t\left(-M\omega\sin\omega t + N\omega\cos\omega t\right) = \\
&= (M + N\omega t)\cos\omega t + (N - M\omega t)\sin\omega t, \\
\bar{i}'' &= N\omega\cos\omega t - \omega\left(M + N\omega t\right)\sin\omega t - M\omega\sin\omega t + \omega\left(N - M\omega t\right)\cos\omega t = \\
&= \left(2N\omega - M\omega^2 t\right)\cos\omega t - \left(2M\omega + N\omega^2 t\right)\sin\omega t.
\end{aligned}$$

Подставим найденные выражения вместо неизвестной функции и ее второй производной в уравнение (П1):

$$\begin{gathered}
\left(2N\omega - M\omega^2 t\right)\cos\omega t - \left(2M\omega + N\omega^2 t\right)\sin\omega t + \\
+ \omega^2 t\left(M\cos\omega t + N\sin\omega t\right) = \frac{U}{L}\,\omega\cos\omega t.
\end{gathered}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}
2N\omega = \dfrac{U}{L}\,\omega, \\
-2M\omega = 0,
\end{cases}$$

из которой находим, что $M = 0$, $N = \frac{U}{2L}$. Значит, искомое частное решение имеет вид

$$\bar{i} = \frac{U}{2L}\,t\sin\omega t,$$

а общее решение уравнения (П1) выражается формулой

$$i\left(t\right) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{U}{2L}\,t\sin\omega t.$$

Продифференцируем это решение:

$$i'\left(t\right) = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t + \frac{U}{2L}\,\sin\omega t + \frac{U}{2L}\,\omega t\cos\omega t,$$

и найдем произвольные постоянные, используя начальные условия (13):

$$\begin{gathered}
i\left(0\right) = C_1 = i_0,\ i'\left(0\right) = C_2\omega = i_0'; \\
C_1 = i_0,\ C_2 = \frac{i_0'}{\omega}.
\end{gathered}$$

Таким образом, решение задачи Коши имеет вид

$$i\left(t\right) = i_0\cos\omega t + \frac{i_0'}{\omega}\sin\omega t + \frac{U}{2L}\,t\sin\omega t.$$

Замечаем, что наличие множителя t перед синусом приводит к неограниченному росту амплитуды колебаний со временем (рис. 3), в чем и заключается явление резонанса.

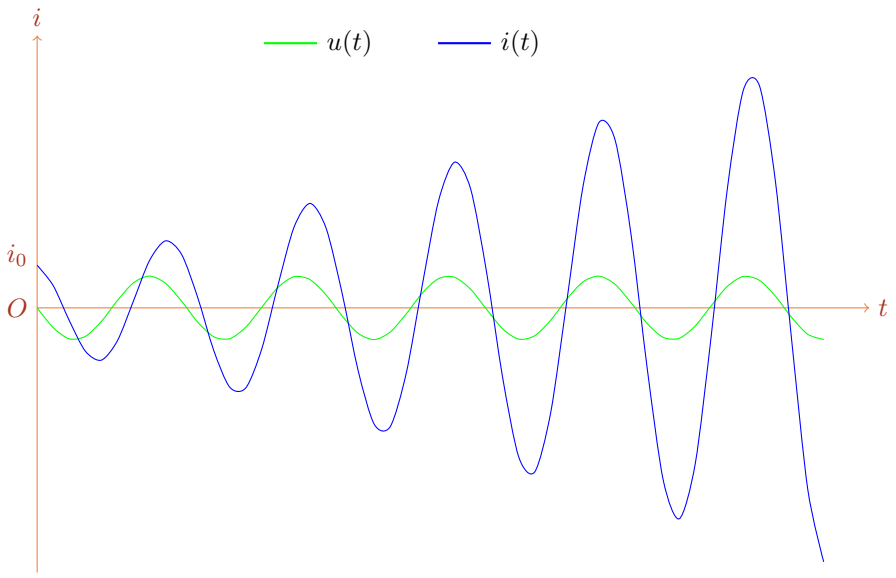


Рис. 3. Резонанс в RLC-контуре.

Нерезонансный LC-контур

Предположим теперь, что сопротивление $R = 0$, так что в электрическом контуре остаются только индуктивность L и емкость C. Пусть резонанс отсутствует: $\omega \neq \beta = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. При этих предположениях

$$\alpha = 0,\ A(\omega) = \frac{UC\omega}{1 - LC\omega^2},\ B(\omega) = 0.$$

Уравнение (12) принимает вид

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \beta^2 i = \frac{U}{L}\,\omega \cos \omega t,$$

а его частное решение (14) становится таким:

$$i\,(t) = [i_0 - A\,(\omega)] \cos \beta t + \frac{i_0'}{\beta} \sin \beta t + A\,(\omega) \cos \omega t.$$

Обозначив

$$V(\omega) = \sqrt{C_1^2(\omega) + C_2^2(\omega)},\ \sin \psi = C_1(\omega)/V(\omega),\ \cos \psi = C_2(\omega)/V(\omega),$$

где

$$C_1(\omega) = i_0 - A(\omega),\ C_2(\omega) = \frac{i_0'}{\beta},$$

получим решение в виде

$$i\,(t) = V(\omega) \sin(\beta t + \psi) + A(\omega) \sin(\omega t + \varphi), \tag{П2}$$

где $\varphi = \pi/2$.

На анимационном рис. 4 можно наблюдать большое разнообразие процессов, происходящих в рассматриваемом контуре, при изменении всего лишь одного параметра, частоты β.

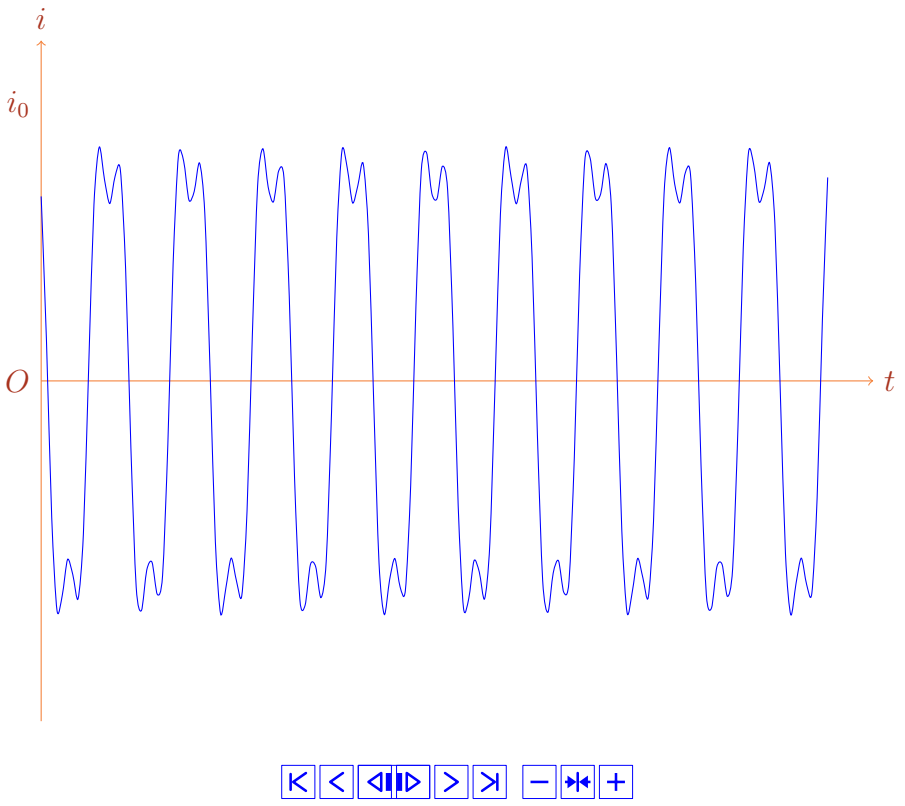


Рис. 4. Нерезонансный LC-контур.

Первый кадр анимации демонстрирует периодичность колебаний тока, далеких от синусоидальных. Далее возникают и почти периодические, и другие периодические колебания, и биения, изучаемые в следующих п. Полезно также пройти анимацию пошагово, более детально знакомясь с различными видами переходных процессов в контуре.

Периодичность колебаний

В отношении полученного решения возникает вопрос: будет ли сумма двух синусоид, с различными амплитудой и частотой, периодической функцией? Ответ: в некоторых случаях будет, а в некоторых — нет.

Пусть частоты β и ω ***соизмеримы***, то есть их отношение есть рациональное число:

$$\frac{\beta}{\omega} = \frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{N}.$$

Функция (П2) периодична, если выполняется условие $kT_\beta = lT_\omega = T$, $k, l \in \mathbb{N}$, где T_β, T_ω — периоды, соответствующие индексирующим их частотам, T — период функции (П2). Но $T_\beta = \frac{2\pi}{\beta}$, $T_\omega = \frac{2\pi}{\omega}$ и поэтому

$$\frac{\beta}{\omega} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow \frac{2\pi n}{\omega} = \frac{2\pi m}{\beta} \Leftrightarrow nT_\omega = mT_\beta.$$

Следовательно, условие периодичности выполняется, и решение (П2) будет периодическим с периодом $T = nT_\omega = mT_\beta$.

На рис. 5 показан пример периодического решения.

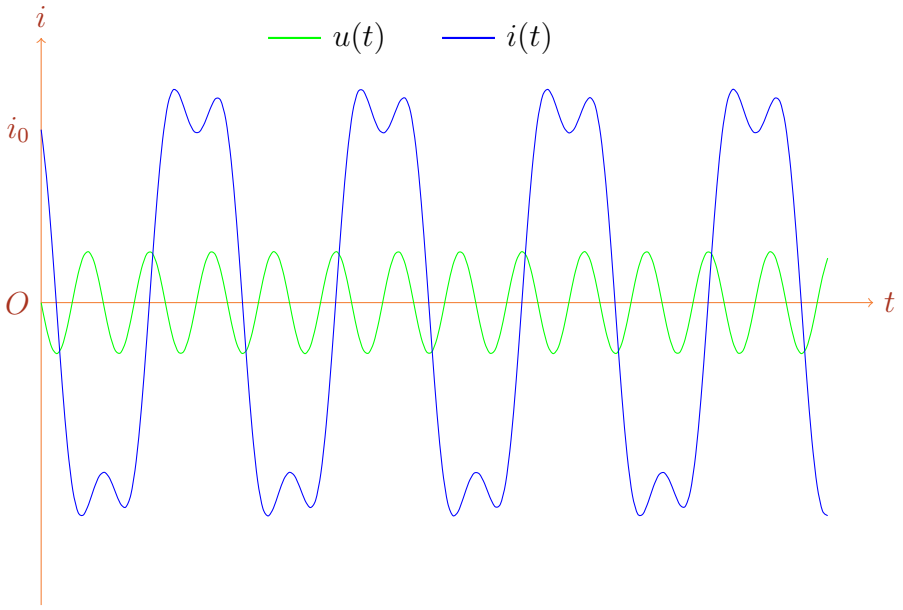


Рис. 5. Периодичность тока в LC-контуре.

Почти периодичность

Если β и ω ***несоизмеримы***, то есть их отношение является иррациональным числом, то решение (П2) не будет периодическим [3, с. 54]. Можно уточнить, что такое решение представляет собой почти периодическую функцию.

Функция $x(t)$ называется ***почти периодической***, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $l = l(\varepsilon) > 0$ такое, что в каждом интервале длины l найдется число T такое, что

$$|x(T+t) - x(t)| < \varepsilon.$$

Число T называется ***ε-почти периодом***. Можно сказать, что через время T функция $x(t)$ почти повторяет свое значение, то есть повторяет с ошибкой ε.

На рис. 6 можно увидеть почти периодические колебания тока.

Биения

Предположим, что частоты β и ω близки между собой, то есть $\frac{\omega-\beta}{\beta} \ll 1$, и что $\omega > \beta > 0$. Преобразуем решение (П2) к виду

$$i(t) = Q(t)\cos[\beta t - \gamma(t)]. \tag{П3}$$

Чтобы выполнить такое преобразование, вначале применим его для случая одинаковых частот к функции вида:

$$x\,(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_2). \tag{П4}$$

Произведем простые тригонометрические преобразования:

$$\begin{gathered} x\,(t) = A_1 \sin\omega_1 t \cos\varphi_1 + A_1 \sin\varphi_1 \cos\omega_1 t + \\ + A_2 \sin\omega_1 t \cos\varphi_2 + A_2 \sin\varphi_2 \cos\omega_1 t = \\ = (A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2)\sin\omega_1 t + (A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2)\cos\omega_1 t. \end{gathered} \tag{П5}$$

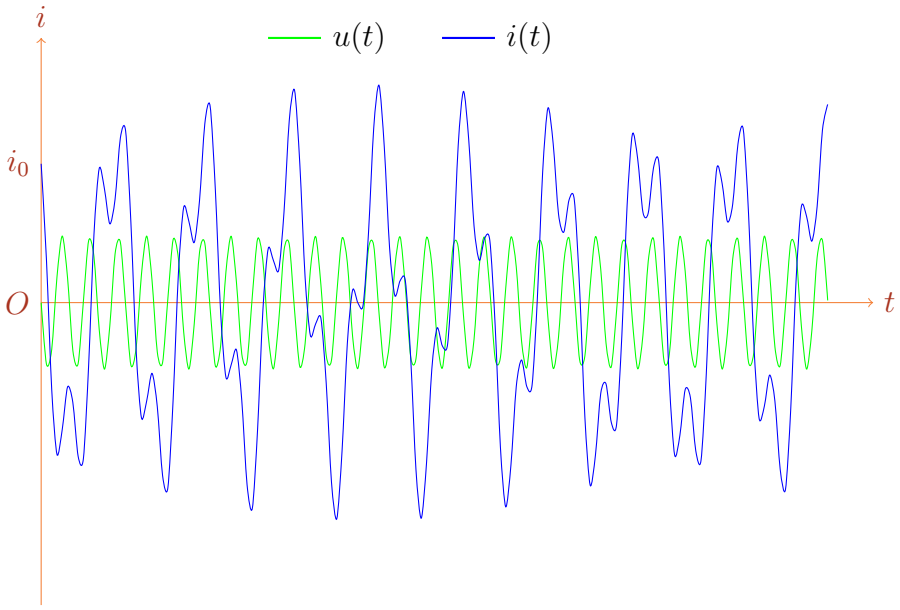


Рис. 6. Почти периодичность тока в LC-контуре.

Покажем, что всегда можно подобрать число Q и угол μ такие, что будет справедлива система равенств:

$$\begin{cases} A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2 = Q \sin\mu, \\ A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2 = Q \cos\mu. \end{cases} \tag{П6}$$

Действительно, возведем обе части каждого уравнения в квадрат:

$$\begin{cases} A_1^2 \cos^2\varphi_1 + A_2^2 \cos^2\varphi_2 + 2A_1A_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 = Q^2 \sin^2\mu, \\ A_1^2 \sin^2\varphi_1 + A_2^2 \sin^2\varphi_2 + 2A_1A_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = Q^2 \cos^2\mu, \end{cases}$$

и сложим полученные равенства:

$$Q^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Таким образом, число Q определяется следующим образом:

$$Q = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Далее разделим первое уравнение (П6) на второе:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}.$$

Следовательно, по тангенсу можно найти угол μ, уточняя четверть системы координат с помощью знаков числителя и знаменателя дроби.

Теперь равенство (П5) можно переписать так:

$$x(t) = Q \sin\mu \sin\omega_1 t + Q \cos\mu \cos\omega_1 t,$$

или

$$x(t) = Q \cos(\omega_1 t - \mu).$$

Вернемся к решению (П2). Для его преобразования с использованием полученного результата введем следующие обозначения: $\Omega = \omega - \beta$, $\nu(t) = \Omega t + \varphi$. В этих обозначениях равенство (П2) запишется в виде

$$\begin{aligned} i\,(t) &= V(\omega)\sin(\beta t + \psi) + A(\omega)\sin[(\Omega + \beta)t + \varphi] = \\ &= V(\omega)\sin(\beta t + \psi) + A(\omega)\sin(\beta t + \nu(t)). \end{aligned}$$

Теперь частоты формально одинаковы и можно применить преобразование, выполненное над функцией (П4). Получим формулу (П3), в которой

$$Q(t) = \sqrt{V^2(\omega) + A^2(\omega) + 2V(\omega)A(\omega)\cos[\psi - \nu(t)]},$$

а угол $\gamma(t)$ определяется равенством

$$\operatorname{tg}\gamma(t) = \frac{V(\omega)\cos\psi + A(\omega)\cos\nu(t)}{V(\omega)\sin\psi + A(\omega)\sin\nu(t)}.$$

«Амплитуда» $Q(t)$ является медленно изменяющейся периодической функцией с периодом $2\pi/\Omega$. Так как $V(\omega) > 0$, $A(\omega) > 0$, то $Q^2(t)$ изменяется от $[V(\omega) - A(\omega)]^2$ до $[V(\omega) + A(\omega)]^2$. Множитель $\cos[\beta t - \gamma(t)]$ есть быстро изменяющаяся функция. График тока можно видеть на рис. 7. Такая картина называется ***биениями***; график функции $Q(t)$ называется ***огибающей***. Это — физический термин, не совпадающий с понятием огибающей в математике.

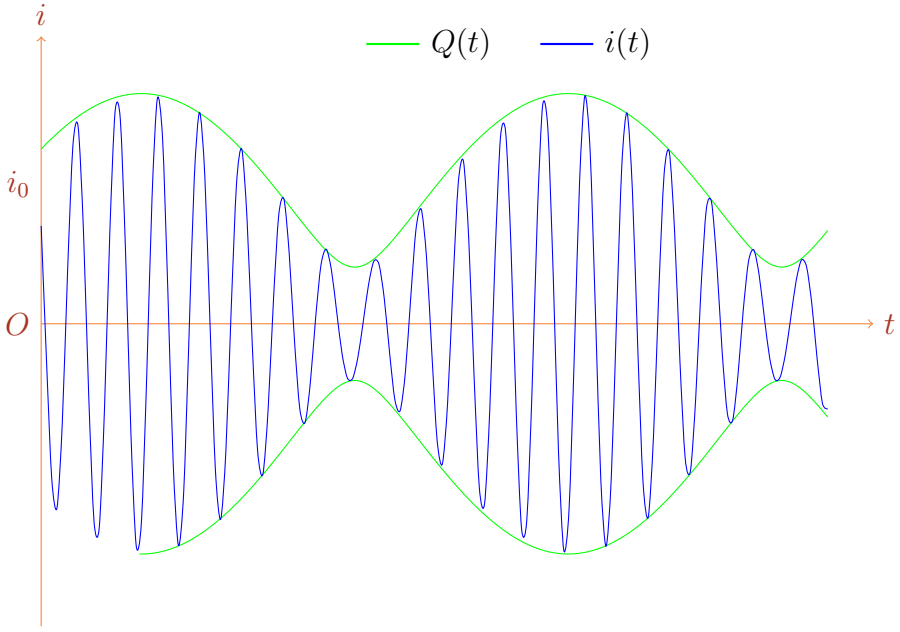


Рис. 7. Биения в LC-контуре.

Очень часто чувствительность прибора не позволяет отследить высокочастотную составляющую сигнала, воспринимая лишь его огибающую. Точно так же человеческое ухо, улавливая звук от двух излучателей с близкими частотами, не может услышать по отдельности звуки высокой частоты, издаваемые ими, но вполне хорошо слышит их огибающую, то есть биения: звук периодически то усиливается, то ослабляется.

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.* — М.: Наука, 1985, — с. 80-91.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* — М.: Рольф, 2000. Ч. 2. — с. 42-47.

[3] Федорюк М.В. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* — М.: Наука, 1985, 50-59.