# Длина дуги и кривизна кривой

Волченко Ю.М.

## Содержание лекции

Длина дуги кривой и ее вычисление в различных системах координат. Кривизна кривой. Кручение. Радиус, центр и круг кривизны. Эволюта и эвольвента. Естественный трехгранник кривой. Формулы Френе.

Анимация характеристик кривой. Анимация эволюты и эвольвенты.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Расчет характеристик кривых в системе *Mathematica*.

26 ноября 2013 г.

Одним из важных приложений теории определенного интеграла является вычисление длин дуг кривых в различных системах координат. Рассматривая этот вопрос, есть смысл заодно познакомиться с понятием кривизны кривой и сопутствующими ему понятиями. Нам придется отличать отрезок с концами $A$ и $B$ и дугу с такими же концами. Для этого используем различные шрифты: отрезок будем обозначать обычным шрифтом как $AB$, а дугу – как $\mathcal{AB}$.

## 1 Длина дуги

Рассмотрим кривую $\mathcal{AB}$, определенную на отрезке $[a, b]$ и показанную на рис. 1. Разобьем отрезок $[a, b]$ на части точками $x_1, \ldots, x_{n-1}$, обозначив $x_0 = a$, $x_n = b$. Из этих точек поднимем перпендикуляры до пересечения с кривой $\mathcal{AB}$ в точках $A_0 = A$, $A_1, \ldots, A_{n-1}$, $A_n = B$. Соединив последние отрезками, получим ломаную $A_0A_1 \ldots A_n$. ***Длиной дуги*** $\mathcal{AB}$ называется предел, к которому стремится длина ломаной, вписанной в эту дугу, когда $n \to \infty$, $\max_{1\le k\le n} A_{k-1}A_k \to 0$, если этот предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части:

$$l = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max_k A_{k-1}A_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} A_{k-1}A_k. \tag{1}$$

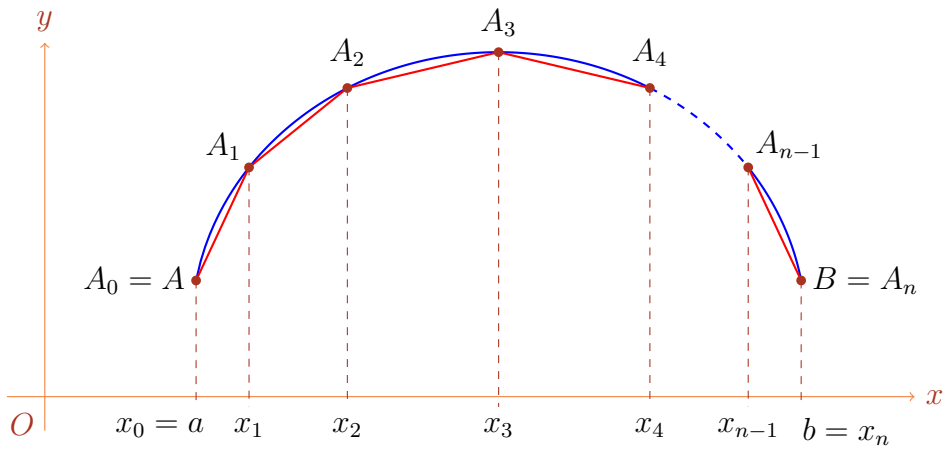
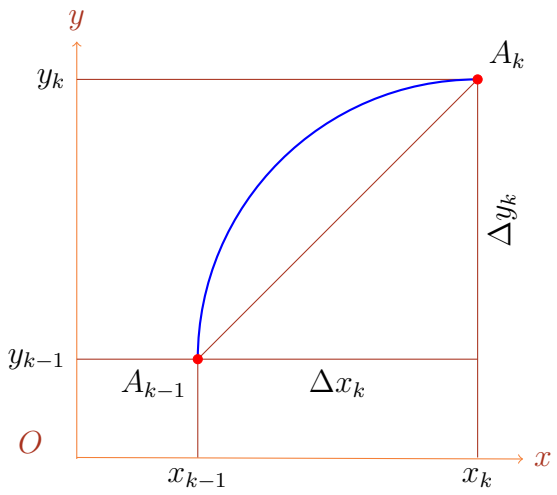



Рис. 1. К определению длины дуги кривой.

Пусть кривая $\mathcal{AB}$ задана уравнением $y = f(x)$, причем, $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$. Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, где $y_k$ — ордината точки $A_k$.




По теореме Пифагора длина отрезка $A_{k-1}A_k$ равна $\sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$, а по теореме Лагранжа получаем, что

$$\Delta y_k = f'(c_k)\,\Delta x_k,\ c_k \in (x_{k-1}, x_k).$$

Следовательно,

$$A_{k-1}A_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + f'^2(c_k)\,\Delta x_k^2} = \\ = \sqrt{1 + f'^2(c_k)}\,\Delta x_k.$$

В силу формулы (1) длина всей дуги в данном случае равна

$$l = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max_k A_{k-1}A_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(c_k)}\,\Delta x_k.$$

Стоящая в правой части интегральная сумма дает основание записать длину дуги кривой с помощью определенного интеграла:

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.} \tag{2}$$

**Пример 1.** *Найти длину полукубической параболы* $y = \sqrt{x^3}$ *от точки* $(0,0)$ *до точки* $(4;8)$.

*Решение.* В данном случае $f(x) = \sqrt{x^3}$, $f'(x) = 3\sqrt{x}/2$. Используя полученную для длины дуги формулу, находим

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} \Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}\left(10^{3/2} - 1\right) \approx 9{,}07.$$

□

Если кривая задана параметрически: $x(t)$, $y(t)$, $t_0 \le t \le T$, причем, координатные функции и их производные непрерывны на отрезке $[t_0, T]$, и выполняются условия $x(t_0) = a$, $x(T) = b$, $x'(t) \ne 0$, $t \in [t_0, T]$, то, вспоминая формулу первой производной параметрически заданной функции и используя формулу (2), получим

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx = \langle dx = x'(t)\ dt,\ f'(x) = y'(t)/x'(t)\rangle =$$
$$= \int_{t_0}^T \sqrt{1 + \left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]^2} x'(t)\ dt,$$

или

$$\boxed{l = \int_{t_0}^T \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.} \tag{3}$$

**Пример 2.** *Вычислить длину четвертой части астроиды*†

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad 0 \le t \le \pi/2.$$

*Решение.* Воспользуемся формулой (3). Так как

$$x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t, \qquad y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t,$$

то

$$l = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\, dt =$$
$$= 3a\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 t\cos^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}\, dt = \frac{3a}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2t\, dt =$$
$$= -\frac{3a}{4}\cos 2t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2}.$$

□

†По поводу этой и других кривых, использованных в данной лекции, см. лекцию «Функция II».

Из формулы (3) можно получить[1)] длину кривой в полярной системе координат:

$$\boxed{l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi.} \tag{4}$$

**Пример 3.** *Вычислить длину дуги логарифмической спирали* $\rho = ae^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$.

*Решение.* Найдем производную заданной функции: $\rho'(\varphi) = ae^{\varphi}$, и вычислим длину дуги по формуле (4):

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{a^2e^{2\varphi} + a^2e^{2\varphi}}\, d\varphi = a\sqrt{2}\int_0^{\pi} e^{\varphi}\, d\varphi = a\sqrt{2}\, e^{\varphi}\Big|_0^{\pi} = a\sqrt{2}\,(e^{\pi} - 1) \approx 31{,}3a.$$

□

Длину дуги пространственной кривой $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $t_0 \le t \le T$, при тех же предположениях относительно координатных функций, что и для плоской кривой, находят по формуле, аналогичной формуле (3):

$$\boxed{l = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt.} \tag{5}$$

Величина $dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2 + z'^2(t)}\, dt$ называется ***дифференциалом дуги***.

**Пример 4.** *Найти длину дуги винтовой линии* $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = vt$, $0 \le t \le 2\pi$.

*Решение.* Вычислим производные координатных функций:

$$x'(t) = -R\sin t, \quad y'(t) = R\cos t, \quad z'(t) = v.$$

Применим формулу (5):

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t + v^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + v^2}\, dt = 2\pi\sqrt{R^2 + v^2}.$$

## 2 Кривизна кривой

Оказывается, для инженерной работы недостаточно знать, что данная линия — кривая, надо еще иметь представление о том, насколько она искривлена. Этим мы сейчас и займемся, поставив задачу определения степени искривленности кривой.

Будем рассматривать линии, которые сами себя не пересекают и имеют вполне определенную касательную в каждой своей точке. Пусть на выбранной нами кривой находятся две точки, $A$ и $B$. Угол поворота касательной к кривой при переходе от точки $A$ к точке $B$ называется ***углом смежности*** дуги $\mathcal{AB}$. Анимационный рис. 2 показывает, что для одинаковой длины дуг больше изогнута та из них, угол смежности которой больше.

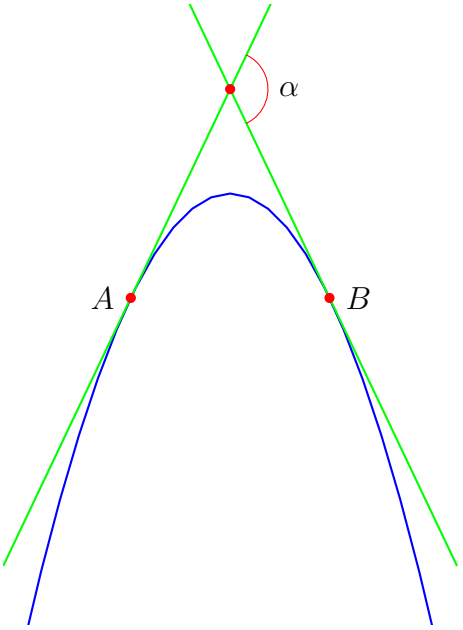



Рис. 2. Угол смежности.

Если же дуги имеют различные длины, то в общем случае угол смежности перестает служить характеристикой их искривленности. Вместо него вводят усредненную характеристику, называемую ***средней кривизной*** $K_{\text{ср}}$ дуги $\mathcal{AB}$. Она является отношением угла смежности $\alpha$ к длине дуги:

$$K_{\text{ср}} = \frac{\alpha}{\mathcal{AB}}.$$

Средняя кривизна показывает степень искривленности участка кривой, но нас может интересовать искривленность кривой вблизи некоторой ее точки или в самой точке.

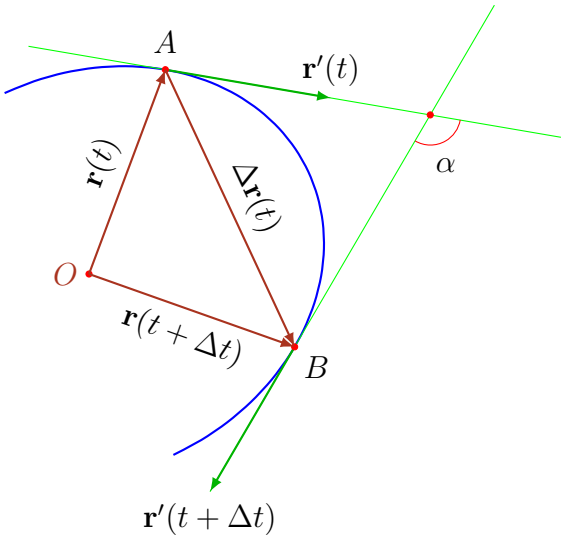
***Кривизной*** $K$ линии в точке $A$ называется предел средний кривизны дуги $\mathcal{AB}$, когда $B$ стремится к $A$ по этой дуге:

$$\boxed{K = \lim_{B \to A} K_{\text{ср}} = \lim_{B \to A} \frac{\alpha}{\mathcal{AB}}.}$$

Пусть кривая задана векторной функцией скалярного аргумента†:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}, \tag{6}$$

причем, угол $\alpha$ образуют направляющие векторы касательных $\mathbf{r}'(t)$ и $\mathbf{r}'(t+\Delta t)$. Так как при малых $\Delta t$ длина дуги $\mathcal{AB} \approx |\Delta\mathbf{r}|$, а $\sin\alpha \approx \alpha$, то




$$K = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\sin\alpha|}{|\Delta\mathbf{r}|}.$$

Как известно, площадь параллелограмма построенного на двух векторах, выражается модулем их векторного произведения, который равен произведению длин этих векторов на синус угла между ними. Поэтому $\sin\alpha$ равен модулю векторного произведения $\mathbf{r}'(t+\Delta t)$ и $\mathbf{r}'(t)$, деленному на их длины, откуда

$$K = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\mathbf{r}'(t+\Delta t) \times \mathbf{r}'(t)|}{|\Delta\mathbf{r}|\,|\mathbf{r}'(t+\Delta t)|\,|\mathbf{r}'(t)|} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\frac{\mathbf{r}'(t+\Delta t)-\mathbf{r}'(t)}{\Delta t} \times \mathbf{r}'(t)\right|}{\left|\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\right|\,|\mathbf{r}'(t+\Delta t)|\,|\mathbf{r}'(t)|},$$

так как $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'(t) = 0$. Вычисляя предел, находим

$$\boxed{K = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.} \tag{7}$$

В декартовой системе координат, вспоминая, как в ней записывается векторное произведение, получаем такую формулу кривизны:

$$\boxed{K = \frac{\left|\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}\right|}{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}}.} \tag{8}$$

Для кривой, заданной параметрически на плоскости, формула (8) упроща-

†Лекция «Векторная функция скалярного аргумента»

ется:

$$\boxed{K = \frac{\left|\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}\right|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}.} \tag{9}$$

В полярной системе координат кривизну находят следующим образом[2)]:

$$\boxed{K = \frac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho'\rho''|}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}.} \tag{10}$$

На основании формулы (9) можно определить кривизну плоской кривой, заданной в явной форме $y = f(x)$. В самом деле, считая параметром $x$, получим $x' = 1$, $x'' = 0$, $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$, и формула для кривизны примет вид

$$\boxed{K = \frac{|f''(x)|}{\left[1 + f'^2(x)\right]^{3/2}}.} \tag{11}$$

Проверим наши интуитивные представления о кривизне. Очевидно, прямая должна иметь нулевую кривизну, окружность — постоянную, а эллипс в точках, в которых он пересекается со своими осями — экстремальную.

**Пример 5.** *Найти кривизну прямой, окружности и эллипса.*

*Решение.* Возьмем прямую $y = ax + b$. Так как $y'' = 0$, то по формуле (11) получаем, что кривизна прямой равна нулю. Эллипс зададим параметрическим уравнением $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $a > b$. Используя для кривизны выражение (9) и вычисляя производные: $x' = -a\sin t$, $x'' = -a\cos t$, $y' = b\cos t$, $y'' = -b\sin t$, находим, что

$$K = \frac{|x'y'' - x''y'|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}} = \frac{\left|ab\sin^2 t + ab\cos^2 t\right|}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}} = \frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}}.$$

Обозначим выражение в круглых скобках $\varphi(t)$ и проанализируем его на предмет наибольшего и наименьшего значений. Для этого вычислим производные функции $\varphi(t)$: $\varphi' = 2a^2\sin t\cos t - 2b^2\cos t\sin t = (a^2 - b^2)\sin 2t$, $\varphi'' = 2(a^2 - b^2)\cos 2t$. Первая производная равна нулю в точках $-\pi/2, 0, \pi/2, \pi$, а вторая в точках $0, \pi$ положительна, так как $a > b$, а в точках $-\pi/2, \pi/2$ отрицательна. Значит, в первых точках знаменатель в формуле кривизны имеет наименьшее значение, а кривизна эллипса, соответственно, наибольшее, $a/b^2$, а для второй группы точек все наоборот, и эллипс имеет наименьшую кривизну, равную $b/a^2$. Следовательно, кривизна эллипса максимальна в точках его пересечения с большой осью и минимальна в точках его пересечения с малой осью. Кривизна окружности радиуса $R$ получается из кривизны эллипса при $a = b = R$:

$$K = \frac{1}{R}.$$

Как видим, она действительно постоянна и тем больше, чем меньше радиус.

**Пример 6.** *Найти кривизну винтовой линии* $\mathbf{r}(t) = R\cos t\mathbf{i} + R\sin t\mathbf{j} + vt\mathbf{k}$.

*Решение.* Первая производная этой ВФСА уже была вычислена и оказалась равной

$$\mathbf{r}'(t) = -R\sin t\mathbf{i} + R\cos t\mathbf{j} + v\mathbf{k}.$$

Найдем вторую производную:

$$\mathbf{r}''(t) = -R\cos t\mathbf{i} - R\sin t\mathbf{j}.$$

По формуле (8) получаем

$$K = \frac{\left|\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R\sin t & R\cos t & v \\ -R\cos t & -R\sin t & 0 \end{vmatrix}\right|}{\left(R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t + v^2\right)^{3/2}} = \frac{|Rv\sin t\mathbf{i} - Rv\cos t\mathbf{j} + R^2\mathbf{k}|}{\left(R^2+v^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\left(R^2v^2 + R^4\right)^{1/2}}{\left(R^2+v^2\right)^{3/2}} = \frac{R\left(v^2+R^2\right)^{1/2}}{\left(R^2+v^2\right)^{3/2}} = \frac{R}{R^2+v^2}.$$

Как видим, кривизна винтовой линии постоянна и тем больше, чем меньше скорость $v$.

□

Если кривая не является плоской, то степень ее отличия от плоской кривой можно охарактеризовать величиной, которая носит название кручения. ***Кручение*** вычисляется по формуле

$$\boxed{\sigma = \frac{\mathbf{r}'\left(\mathbf{r}''\times\mathbf{r}'''\right)}{\left(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\right)^2}.} \qquad (12)$$

Так как в числителе стоит смешанное произведение векторов, то в случае плоской кривой оно равно нулю в силу компланарности векторов $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$ и $\mathbf{r}'''$. Значит, и кручение плоской кривой равно нулю.

В Приложении[3)] рассмотрен вывод формулы для кручения, а также такое понятие как естественный трехгранник кривой и формулы Френе.

**Пример 7.** *Найти кручение винтовой линии.*

*Решение.* Первая и вторая производные уже были найдены, найдем еще третью:

$$\mathbf{r}''' = R\sin t\mathbf{i} - R\cos t\mathbf{j}.$$

Далее вычислим смешанное произведение:

$$\mathbf{r}'\left(\mathbf{r}''\times\mathbf{r}'''\right) = \begin{vmatrix} -R\sin t & R\cos t & v \\ -R\cos t & -R\sin t & 0 \\ R\sin t & -R\cos t & 0 \end{vmatrix} = v\left(R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t\right) = vR^2.$$

При вычислении кривизны винтовой линии был найден модуль векторного произведения векторов $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$: $|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''| = |Rv\sin t\mathbf{i} - Rv\cos t\mathbf{j} + R^2\mathbf{k}|$. Найдем его квадрат:

$$\left(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\right)^2 = R^2\left(R^2+v^2\right).$$

Следовательно,

$$\sigma = \frac{R^2 v}{R^2\left(R^2+v^2\right)} = \frac{v}{R^2+v^2}.$$

Таким образом, кручение винтовой линии тоже постоянно.

## 3 Радиус, центр и круг кривизны. Эволюта и эвольвента

В последнем пункте лекции будем рассматривать только плоские кривые. Величина, обратная кривизне линии в данной точке, называется ***радиусом кривизны*** кривой в этой точке:

$$R = \frac{1}{K}.$$

Построим в точке $M$ нормаль к линии, направленную в сторону вогнутости кривой и отложим на нормали отрезок $MC = R$. Точка $C(x_C, y_C)$ называется ***центром кривизны*** данной кривой в точке $M$, круг радиуса $R$ с центром в точке $C$ и проходящий через точку $M$ – ***кругом кривизны*** (рис. 3, а)). Таким образом, в данной точке кривизна кривой и кривизна круга кривизны равны между собой, в силу чего круг кривизны является наглядным изображением кривизны кривой в данной точке.

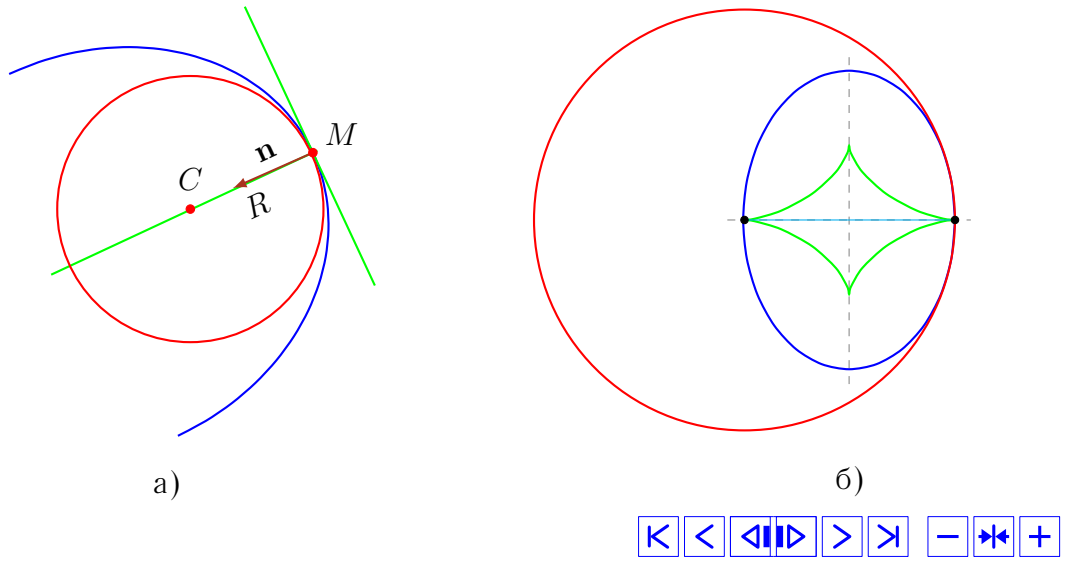



Рис. 3. Радиус, центр и круг кривизны

На анимационном рис. 3, б) можно увидеть изменение величины круга кривизны в соответствии с изменением кривизны эллипса.

Радиус кривизны приходится учитывать, например, при соединении прямых участков железнодорожного пути, находящихся под углом друг к другу. Каза-

лось бы решение очевидно: надо состыковать пути с помощью части окружности (рис. 4, а)). Однако такое решение технически неприемлемо, так как на криволинейных участках пути на поезд действует центробежная сила, обратно пропорциональная радиусу кривизны участка и, следовательно, прямо пропорциональная его кривизне. В результате, при переходе от движения по прямой к движению по окружности из-за мгновенного изменения кривизны от нуля до кривизны окружности мгновенно возникает центробежная сила, а мгновенная сила — это удар. Удар испытывают и рельсы, и колеса подвижного состава, что приводит к их износу. Возможны и более серьезные последствия. Поэтому на практике такие железнодорожные (а в горных районах и трамвайные) пути соединяют с помощью не только окружности, но и с помощью специальной переходной кривой, призванной плавно изменить кривизну от нуля до кривизны окружности (и наоборот).

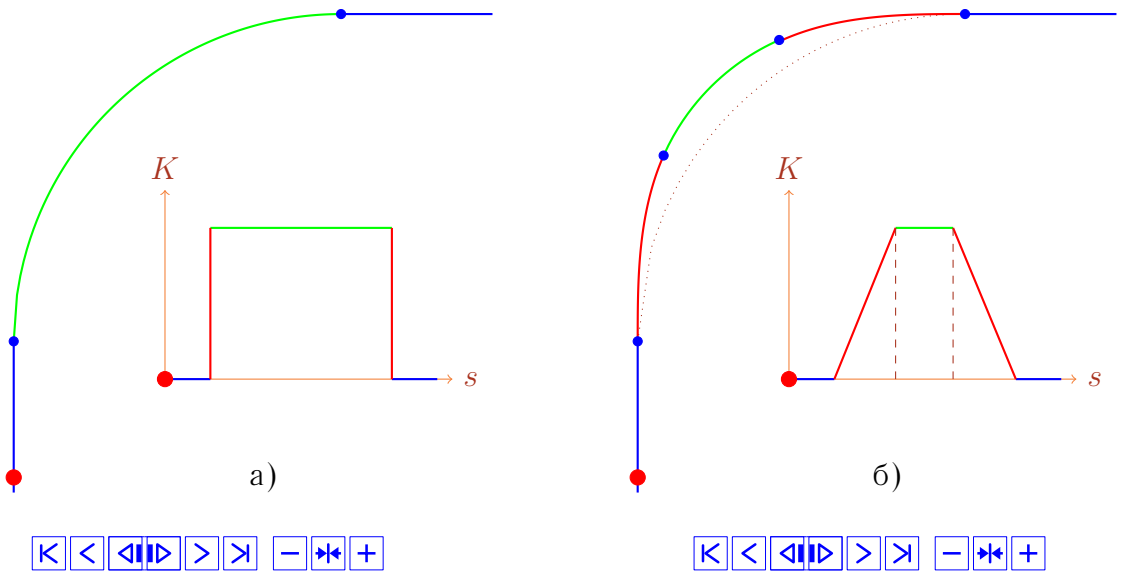



Рис. 4. Сочленение путей: а) окружностью, б) переходными кривыми и окружностью.

На анимационном рис. 4, а) показано «очевидное» сочленение перпендикулярных друг другу железнодорожных путей (синий цвет) частью окружности (зеленый цвет). Движению красной точки, имитирующему движение поезда, соответствует перемещение красной точки на графике кривизны ($s$ — расстояние, пройденное составом от начала движения). Видно, как в точках сочленения возникает удар и скачком изменяется кривизна кривой.

На рис. 4, б) соединение тех же путей осуществлено тремя кривыми: двумя переходными (красный цвет) и частью окружности (зеленый цвет). Видно, что явление удара отсутствует, а кривизна на переходных кривых плавно изменяется по линейному закону от нуля до кривизны окружности (и наоборот).

Подробнее об этом см. в Приложении[4]. Сравнение данного способа спряжения путей с их сочленением окружностью (пунктирная кривая) показывает, что применение переходных кривых незначительно увеличивает длину закругления.

Если кривая задана в явной форме $y = f(x)$, то координаты центра кривизны $(x_C, y_C)$ вычисляются по формулам

$$x_C = x - \frac{y'\left(1 + y'^2\right)}{y''}, \qquad y_C = y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \tag{13}$$

Если кривая задана параметрически, $\mathbf{r} = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$, то формулы становятся такими:

$$x_C = x - \frac{y'\left(x'^2 + y'^2\right)}{x'y'' - x''y'}, \qquad y_C = y + \frac{x'\left(x'^2 + y'^2\right)}{x'y'' - x''y'}. \tag{14}$$

Совокупность всех центров кривизны данной линии образует некоторую новую линию, называемую ***эволютой*** по отношению к первой линии. По отношению к своей эволюте данная линия называется ***эвольвентой***. Можно показать что эволюта циклоиды есть циклоида, а эволюта эллипса есть астроида (см. рис. 3, б)). Профиль зуба шестерни чаще всего имеет форму эвольвенты окружности.

Вывод формул для координат центра кривизны и уравнений эволюты см. в Приложении[5].

В заключение в Приложении[6] показано, как вычислять характеристики кривых в системе *Mathematica*.

## Приложение

1) Пусть в полярной системе координат кривая задается в виде $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, причем, $\rho(\varphi)$ и $\rho'(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда, справедливы соотношения

$$x(\varphi) = \rho(\varphi)\cos\varphi, \qquad y(\varphi) = \rho(\varphi)\sin\varphi, \tag{П1}$$

которые можно считать параметрическими (с параметром $\varphi$) уравнениями кривой. Найдем производные координатных функций:

$$x'(\varphi) = \rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi, \quad y'(\varphi) = \rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi \tag{П2}$$

и вычислим подкоренное выражение в формуле (3):

$$\begin{aligned} x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) &= (\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi)^2 + (\rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi)^2 = \\ &= \rho'^2\cos^2\varphi - \cancel{2\rho'\rho\sin\varphi\cos\varphi} + \rho^2\sin^2\varphi + \\ &\quad + \rho'^2\sin^2\varphi + \cancel{2\rho'\rho\sin\varphi\cos\varphi} + \rho^2\cos^2\varphi = \\ &= \rho'^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + \rho^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) = \rho'^2 + \rho^2. \end{aligned} \tag{П3}$$

Из (3) получаем формулу (4) длины дуги в полярной системе координат.

2) Пусть кривая в полярной системе координат задана в виде (П1). Первые производные координатных функций нами уже найдены, см. (П2). Вычислим вторые производные:

$$\begin{aligned} x'' &= \rho''\cos\varphi - 2\rho'\sin\varphi - \rho\cos\varphi, \\ y'' &= \rho''\sin\varphi + 2\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi. \end{aligned}$$

Преобразуем выражение под знаком модуля в формуле (9):

$$\begin{aligned} x'y'' - x''y' &= (\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi)(\rho''\sin\varphi + 2\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi) - \\ &\quad - (\rho''\cos\varphi - 2\rho'\sin\varphi - \rho\cos\varphi)(\rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi) = \\ &= \cancel{\rho'\rho''\sin\varphi\cos\varphi} + \underline{2\rho'^2\cos^2\varphi} - \cancel{\rho\rho'\sin\varphi\cos\varphi} - \underline{\underline{\rho''\rho\sin^2\varphi}} - \\ &\quad - \cancel{2\rho'\rho\sin\varphi\cos\varphi} + \underline{\rho^2\sin^2\varphi} - \cancel{\rho'\rho''\sin\varphi\cos\varphi} + \underline{2\rho'^2\sin^2\varphi} + \\ &\quad + \cancel{\rho\rho'\sin\varphi\cos\varphi} - \underline{\underline{\rho\rho''\cos^2\varphi}} + \cancel{2\rho\rho'\sin\varphi\cos\varphi} + \underline{\rho^2\cos^2\varphi} = \\ &= \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho'\rho''. \end{aligned}$$

Используя также упрощение (П3), из формулы (9) получаем формулу (10).

3) На рис.5 показана линия $\mathcal{L}$, проходящая через точку $M(x(t), y(t), z(t))$, а также векторы, прямые и плоскости, используемые при изучении пространственных кривых. Нам уже известны касательная прямая и нормальная плоскость кривой†. Рассмотрим остальные геометрические объекты, представленные на рис.

Пусть кривая $\mathcal{L}$ задана уравнением (6), причем, первые три производные функции $\mathbf{r}(t)$ существуют и конечны, а векторы $\mathbf{r}'(t)$ и $\mathbf{r}''(t)$ неколлинеарны. ***Соприкасающейся плоскостью*** кривой $\mathcal{L}$ в точке $M$ называется плоскость, проходящая через касательную к кривой в этой точке и параллельная вектору $\mathbf{r}''(t)$. Обозначим $\mathbf{r}$ — радиус-вектор переменной точки соприкасающейся плоскости. Тогда векторы $\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}'(t)$ и $\mathbf{r}''(t)$ компланарны и, следовательно, векторное уравнение соприкасающейся плоскости имеет вид

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)), \mathbf{r}', \mathbf{r}'') = 0,$$

†Лекция «Векторная функция скалярного аргумента»

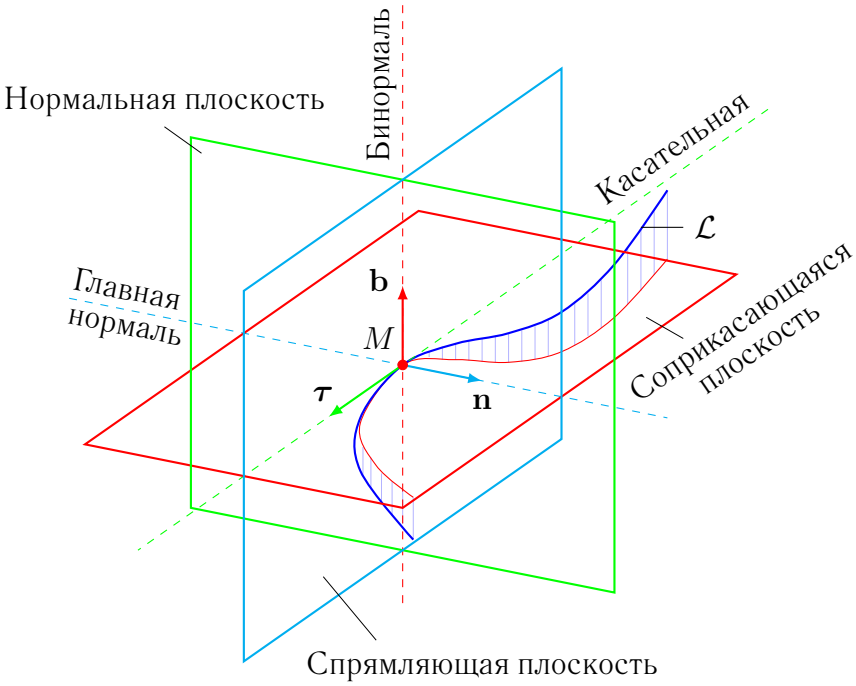



Рис. 5. Естественный трехгранник кривой в точке $M$.

где в левой части уравнения стоит смешанное произведение векторов. Очевидно, вектором нормали соприкасающейся плоскости будет вектор

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''.$$

Прямая, являющаяся нормалью к соприкасающейся плоскости и проходящая через точку $M$, называется ***бинормалью*** кривой. Нормаль, расположенная в соприкасающейся в плоскости и проходящая через точку $M$, называется ***главной нормалью*** кривой. Плоскость, проходящая через касательную и бинормаль, называется ***спрямляющей плоскостью*** кривой.

**Вывод формулы для кручения.** Возьмем на кривой $\mathcal{L}$ точку

$$P(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t)),$$

отличную от $M$, и обозначим $\varphi$ угол между соприкасающимися плоскостями в этих точках, а через $l$ — длину дуги $\mathcal{MP}$. ***Абсолютным кручением*** $|\sigma|$ в точке $M$ называется предел отношения $\varphi/l$ при $l \to 0$ (т. е. при $P \to M$, или $\Delta t \to 0$).

Выведем формулу для вычисления абсолютного кручения кривой. Будем обозначать значение ВФСА $\mathbf{r}(t)$ в точке $A$ как $\mathbf{r}_A$ и всюду далее считать, что $\mathbf{r}'(t) \neq 0$. Аналогично выводу формулы для кривизны нам понадобится выражение синуса угла $\varphi$ через модуль векторного произведения векторов $[\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M$ и $[\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_P$ и произведение их модулей.

Указанное векторное произведение запишем следующим образом:

$$[\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M \times [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_P = [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M \times \left(\mathbf{r}'_P \times \left(\frac{\mathbf{r}''_P - \mathbf{r}''_M}{\Delta t}\Delta t + \mathbf{r}''_M\right)\right) =$$

$$= [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M \times \left(\mathbf{r}'_P \times \frac{\mathbf{r}''_P - \mathbf{r}''_M}{\Delta t}\right)\Delta t + [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M \times (\mathbf{r}'_P \times \mathbf{r}''_M). \qquad (\text{П}4)$$

В лекции «Векторная функция скалярного аргумента» была получена формула Тейлора для ВФСА, которую для функции $\mathbf{r}'(t)$ и $n = 1$ в нашем случае можно записать так:

$$\mathbf{r}'(t+\Delta t) = \mathbf{r}'(t) + [x'(c_1)\,\mathbf{i} + y'(c_2)\,\mathbf{j} + z'(c_3)\,\mathbf{k}]\,\Delta t,$$

$c_1, c_2, c_3 \prec t, t+\Delta t$. Перепишем ее по-другому, обозначив $\boldsymbol{\beta} = x'(c_1)\,\mathbf{i} + y'(c_2)\,\mathbf{j} + z'(c_3)\,\mathbf{k}$:

$$\mathbf{r}'_P = \mathbf{r}'_M + \boldsymbol{\beta}\Delta t.$$

Используем это выражение во втором слагаемом (П4):

$$\begin{aligned}[\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M \times (\mathbf{r}'_P \times \mathbf{r}''_M) &= [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M \times ((\mathbf{r}'_M + \boldsymbol{\beta}\Delta t) \times \mathbf{r}''_M) = \\ &= [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M \times [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M + [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}''_M)\,\Delta t.\end{aligned}$$

Учитывая, что первое слагаемое здесь равно нулю и подставляя этот результат вместо второго слагаемого в формулу (П4), придем к формуле

$$[\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M \times [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_P = [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M \times \left(\left(\mathbf{r}'_P \times \frac{\mathbf{r}''_P - \mathbf{r}''_M}{\Delta t}\right) + (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}''_M)\right)\Delta t. \qquad (\text{П5})$$

Еще нам понадобится специальное выражение для длины $l$ дуги $\mathcal{MP}$. Применяя формулу (3) и теорему о среднем для определенного интеграла от непрерывной функции, запишем, что

$$l = \int_t^{t+\Delta t} |\mathbf{r}'(t)|\, dt = |\mathbf{r}'(t^*)|\,|\Delta t|, \qquad (\text{П6})$$

$t^* \prec t, t+\Delta t$. Функция $|\mathbf{r}'(t)|$ непрерывна в силу непрерывности модуля и существования конечной производной $\mathbf{r}''(t)$, что обеспечивает непрерывность компонент первой производной.

Запишем и преобразуем отношение $\varphi/l$, используя формулы (П5) и (П6):

$$\begin{aligned}\frac{\varphi}{l} &= \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{l} = \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cdot\frac{|[\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M \times [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_P|}{l\,|[\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M|\,|[\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_P|} = \\ &= \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cdot\frac{\left|[\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M \times \left(\left(\mathbf{r}'_P \times \frac{\mathbf{r}''_P - \mathbf{r}''_M}{\Delta t}\right) + (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}''_M)\right)\right|}{|\mathbf{r}'(t^*)|\,|[\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M|\,|[\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_P|}.\end{aligned}$$

При $\Delta t \to 0$ величина $\boldsymbol{\beta} \to \mathbf{r}'_M$, а $t^* \to t$, $P \to M$. Учитывая первый замечательный предел, получим

$$\begin{aligned}|\sigma| &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varphi}{l} = \frac{|[\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M \times ((\mathbf{r}'_M \times \mathbf{r}'''_M) + [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M)|}{|\mathbf{r}'_M|\,([\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M)^2} = \\ &= \frac{|[\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M \times [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''']_M|}{|\mathbf{r}'_M|\,([\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M)^2}.\end{aligned}$$

Для двойного векторного произведения справедлива формула $\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = \mathbf{b}\,(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{ab})$, в которой мы положим $\mathbf{a} = [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M$, $\mathbf{b} = \mathbf{r}'_M$, $\mathbf{c} = \mathbf{r}'''_M$, тогда

$$\begin{aligned}|\sigma| &= \frac{|\mathbf{r}'_M\,([\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M\,\mathbf{r}'''_M) - \mathbf{r}'''_M\,([\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''']_M\,\mathbf{r}'_M)|}{|\mathbf{r}'_M|\,([\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M)^2} = \frac{|\mathbf{r}'_M\,([\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M\,\mathbf{r}'''_M)|}{|\mathbf{r}'_M|\,([\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M)^2} = \\ &= \frac{|\mathbf{r}'_M|\,|(\mathbf{r}'_M, \mathbf{r}''_M, \mathbf{r}'''_M)|}{|\mathbf{r}'_M|\,([\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M)^2} = \frac{|(\mathbf{r}'_M, \mathbf{r}''_M, \mathbf{r}'''_M)|}{([\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M)^2},\end{aligned}$$

где $(\mathbf{r}'_M, \mathbf{r}''_M, \mathbf{r}'''_M)$ — смешанное произведение векторов $\mathbf{r}'_M$, $\mathbf{r}''_M$, $\mathbf{r}'''_M$.

Кручением называется величина

$$\sigma = \frac{(\mathbf{r}'_M, \mathbf{r}''_M, \mathbf{r}'''_M)}{([\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'']_M)^2}. \qquad (\text{П7})$$

Это и есть формула (12). Отметим, что перед дробью нами выбран знак плюс, но можно было выбрать и знак минус.

**Естественная параметризация кривой**. Возьмем точку $M_0\left(x\left(t_0\right), y(t_0), z\left(t_0\right)\right), t_0 < t$, на кривой $\mathcal{L}$ и найдем длину дуги $\mathcal{M}_0\mathcal{M}$:

$$s\left(t\right) = \int_{t_0}^{t} \left|\mathbf{r}'\left(t\right)\right| \, dt.$$

Очевидно, эта функция дифференцируема и строго положительна, так как $s'\left(t\right) = \left|\mathbf{r}'\left(t\right)\right| > 0$ (по сделанному предположению $\mathbf{r}'\left(t\right) \neq 0$), а, значит, строго возрастает по $t$. Следовательно, существует обратная функция $s^{-1}\left(t\right) = t\left(s\right)$, тоже дифференцируемая, непрерывная и строго возрастающая†. Это позволяет величину $s$ использовать в качестве параметра для параметризации кривой $\mathcal{L}$. Такую параметризацию $\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(s\right) = \mathbf{r}\left(t\left(s\right)\right)$ называют ***естественной параметризацией кривой***. Модуль производной вектор-функции $\mathbf{r}\left(s\right)$ в этом случае всегда равен 1:

$$\left|\mathbf{r}'\left(s\right)\right| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{1}{s'\left(t\right)}\right| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| \cdot \frac{1}{\left|\mathbf{r}'\left(t\right)\right|} = 1.$$

Векторы $\mathbf{r}'\left(s\right)$ и $\mathbf{r}''\left(s\right)$ перпендикулярны при любом $s$, так как, дифференцируя равенство $\left(\mathbf{r}'\left(s\right)\right)^2 = 1$, получаем

$$\mathbf{r}'\left(s\right)\mathbf{r}''\left(s\right) = 0.$$

Модуль векторного произведения $\left|\mathbf{r}'\left(s\right) \times \mathbf{r}''\left(s\right)\right|$ при естественной параметризации кривой принимает вид

$$\left|\mathbf{r}'\left(s\right) \times \mathbf{r}''\left(s\right)\right| = \left|\mathbf{r}'\left(s\right)\right| \left|\mathbf{r}''\left(s\right)\right| \sin\frac{\pi}{2} = \left|\mathbf{r}''\left(s\right)\right|.$$

Поэтому формула кривизны в этом случае упрощается:

$$K\left(s\right) = \left|\mathbf{r}''\left(s\right)\right|, \tag{П8}$$

а кручение кривой вычисляется как

$$\sigma\left(s\right) = \frac{\left(\mathbf{r}'(s), \mathbf{r}''\left(s\right), \mathbf{r}'''\left(s\right)\right)}{\left|\mathbf{r}''\left(s\right)\right|^2} = \frac{\left(\mathbf{r}'(s), \mathbf{r}''\left(s\right), \mathbf{r}'''\left(s\right)\right)}{K^2\left(s\right)}. \tag{П9}$$

**Формулы Френе**. Пусть на кривой $\mathcal{L}$ выбрана естественная параметризация, а ее кривизна в точке $M$ отлична от нуля. Обозначим

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}'(s)$$

единичный вектор касательной в точке $M$.

Рассмотрим также вектор

$$\mathbf{n} = \frac{1}{K}\,\mathbf{r}''\left(s\right).$$

Этот вектор в силу формулы (П8) тоже имеет единичную длину и сонаправлен вектору $\mathbf{r}''\left(s\right)$. Кроме того, он перпендикулярен вектору $\boldsymbol{\tau}$, поскольку перпендикулярны векторы $\mathbf{r}'\left(s\right)$ и $\mathbf{r}''\left(s\right)$. Следовательно, вектор $\mathbf{n}$ направлен по главной нормали.

Наконец, добавим к ним третий единичный вектор $\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}$, направленный, таким образом, по бинормали к кривой.

Три полупрямые, исходящие из точки $M$ кривой и имеющие направления векторов $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, являются ребрами трехгранного угла, который называется ***естественным трехгранником*** кривой в точке $M$ (рис. 5).

†Лекции «Непрерывность функции» и «Производная».

Выразим производные векторов $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ по параметру $s$ через сами эти векторы. Из определений первых двух векторов сразу имеем

$$\boldsymbol{\tau}' = \mathbf{r}''(s) = K\mathbf{n}. \tag{П10}$$

Вектор $\mathbf{b}'$ перпендикулярен вектору $\mathbf{b}$, так как $(1)' = (\mathbf{b}^2)' = 2\mathbf{b}\mathbf{b}' = 0$. Он перпендикулярен и вектору $\boldsymbol{\tau}$, потому что

$$\mathbf{b}' = (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n})' = \boldsymbol{\tau}' \times \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}'.$$

Но (П10) означает, что $\boldsymbol{\tau}' \parallel \mathbf{n}$, и поэтому $\mathbf{b}' = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}'$. Значит, $\mathbf{b}' \perp \boldsymbol{\tau}$. Из $\mathbf{b}' \perp \mathbf{b}$ и $\mathbf{b}' \perp \boldsymbol{\tau}$ следует, что $\mathbf{b}' \parallel \mathbf{b} \times \boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{b}' \parallel \mathbf{n}$.

Рассмотрим два вектора бинормали $\mathbf{b}(s)$ и $\mathbf{b}(s + \Delta s)$ и отметим, что угол $\Delta\varphi$ между ними является одновременно и углом между соответствующими им соприкасающимися плоскостями. Так как векторы $\mathbf{b}(s)$ и $\mathbf{b}(s + \Delta s)$ единичные, то $|\mathbf{b}(s + \Delta s) - \mathbf{b}(s)| = 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$. Запишем отношение

$$\frac{|\mathbf{b}(s + \Delta s) - \mathbf{b}(s)|}{|\Delta s|} = \frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{|\Delta s|} = \frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \frac{\Delta\varphi}{|\Delta s|}.$$

Переходя в нем к пределу при $|\Delta s| \to 0$, в левой части равенства получим модуль производной вектора $\mathbf{b}$, а в правой части — кручение кривой: $|\mathbf{b}'| = \sigma$. С учетом коллинеарности векторов $\mathbf{b}'$ и $\mathbf{n}$ теперь можно записать, что

$$\mathbf{b}' = -\sigma\mathbf{n}. \tag{П11}$$

Знак минус, как будет показано дальше, согласовывает последнюю формулу с формулой (П7).

Перейдем к третьему вектору. Продифференцируем равенство $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \boldsymbol{\tau}$:

$$\mathbf{n}' = (\mathbf{b} \times \boldsymbol{\tau})' = \mathbf{b}' \times \boldsymbol{\tau} + \mathbf{b} \times \boldsymbol{\tau}' = -\sigma\mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau} + \mathbf{b} \times K\mathbf{n} = \sigma\mathbf{b} - K\boldsymbol{\tau}. \tag{П12}$$

Формулы для производных векторов $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ объединим в систему уравнений:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}' &= K\mathbf{n}, \\ \mathbf{n}' &= \sigma\mathbf{b} - K\boldsymbol{\tau}, \\ \mathbf{b}' &= -\sigma\mathbf{n}. \end{aligned}$$

Эта система уравнений носит название ***формул Френе***.

Мы видим, что уравнения для любой кривой отличаются лишь кривизной и кручением. Оказывается, эти две характеристики действительно определяют кривую с точностью до ее положения в пространстве.

**Теорема П1.** *Пусть $K = K(s)$ и $\sigma = \sigma(s)$ — любые дифференцируемые функции, причем, $K(s) > 0$. Тогда существует единственная с точностью до положения в пространстве кривая, для которой $K(s)$ и $\sigma(s)$ являются соответственно кривизной и кручением.*

Покажем теперь, что выбор знака минус в формуле (П11) соответствует выбору знака плюс в формуле (П7). Продифференцируем равенство (П10) и воспользуемся формулой (П12):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}''' &= K'\mathbf{n} + K\mathbf{n}' = K'\mathbf{n} + K(\sigma\mathbf{b} - K\boldsymbol{\tau}), \\ \mathbf{r}''' &= -K^2\boldsymbol{\tau} + K'\mathbf{n} + K\sigma\mathbf{b}. \end{aligned} \tag{П13}$$

Перемножим векторно равенства $\mathbf{r}' = \boldsymbol{\tau}$ и (П10) почленно:

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \boldsymbol{\tau} \times K\mathbf{n} = K\mathbf{b}. \tag{П14}$$

Найдем отсюда $\mathbf{b}$, используя формулу (П8):

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{K} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}''|}.$$

Умножим скалярно равенства (П14) и (П13) почленно:

$$(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') = K^2\sigma.$$

Отсюда с учетом формулы (П8) получаем

$$\sigma = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{K^2} = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{(\mathbf{r}'')^2}.$$

Этот результат полностью совпадает с формулой (П9), а, значит, и с выбором знака в формуле (П7).

4) На самом деле изменение кривизны пути на переходных участках происходило по линейному закону лишь в приближенном смысле, так как точные уравнения переходных кривых выражаются «неберущимися» интегралами, которые приходилось аппроксимировать многочленами. Дальнейшее изложение проведем в системе *Mathematica*.

Например, одна из переходных кривых задавалась ВФСА вида

$$\texttt{r[s_]:=}\left\{s - \frac{s^5}{40\ \ R^2 l^2}, \frac{s^3}{6\,Rl} - \frac{s^7}{336\,R^3 l^3}, 0\right\}$$

Чтобы найти ее кривизну, сначала зададим оператор, вычисляющий длину вектора:

$$\texttt{norm[r_]:=}\sqrt{r^2_{[[1]]} + r^2_{[[2]]} + r^2_{[[3]]}}$$

а затем определим кривизну переходной кривой по формуле (7):

$$\texttt{K} = \frac{\texttt{norm[Cross[r'[s], r''[s]]]}}{\texttt{norm[r'[s]]}^3}$$

```
Refine[% // FullSimplify, R > 0 && l > 0 && s > 0]
```

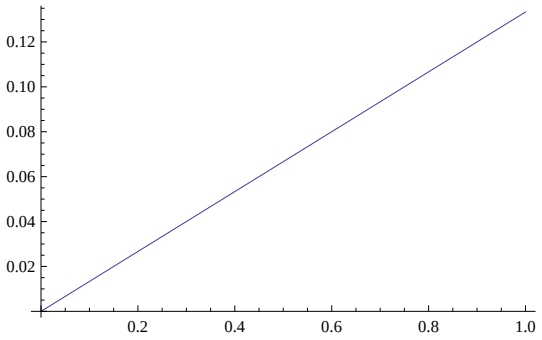
$$\frac{576(192\,l^4R^4s + s^9)}{l^5R^5\left(2304 + \frac{-12\,l^2R^2s^8+s^{12}}{l^6R^6}\right)^{3/2}}$$

где оператор `Cross` находит векторное произведение векторов, а оператор `Refine` упрощает выражение при заданных о нем предположениях. Представим полученный результат в виде

$$K = \frac{576\,l^4R^4s(192\,l^4R^4 + s^8)}{(2304\,l^6R^6 - 12\,l^2R^2s^8 + s^{12})^{3/2}}.$$

Очевидно, функция $K(s)$ совсем не похожа на линейную. Тем не менее в требуемом диапазоне $s \in [0; 1]$ кривизна ведет себя приблизительно как линейная функция. Чтобы убедиться в этом, достаточно построить ее график:

```
Plot[K /.{R → 3, l → 5/2}, {s,0,1}]
```



[5)] Будем считать, что кривая $\mathcal{L}$ задана с помощью естественной параметризации в виде ВФСА $\mathbf{r}(s)$. Прежде всего уточним, что подразумевается под тем, что центр кривизны лежит на нормали к кривой в сторону ее вогнутости. Это означает, что вектор $\mathbf{MC}$ (см. рис. 3, а)) сонаправлен вектору главной нормали $\mathbf{n}$, а, точнее, $\mathbf{MC} = R\,\mathbf{n}$, где $R$ — радиус кривизны (рис. 6, а)).

Обозначим $\mathbf{r}_1(s)$ вектор-функцию, описывающую эволюту кривой $\mathcal{L}$. Из рис. 6, а) видно, что $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + R\mathbf{n}$. Продифференцируем это равенство по $s$ и упростим результат, используя определение вектора $\boldsymbol{\tau}$ и вторую формулу Френе, в которой для плоской кривой $\sigma = 0$:

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}' + R'\mathbf{n} + R\mathbf{n}' = \boldsymbol{\tau} + R'\mathbf{n} - RK\boldsymbol{\tau},$$
$$\mathbf{r}_1' = R'\mathbf{n}.$$

Последнее соотношение выражает следующее свойство эволюты: *нормаль к эвольвенте является касательной к эволюте*.

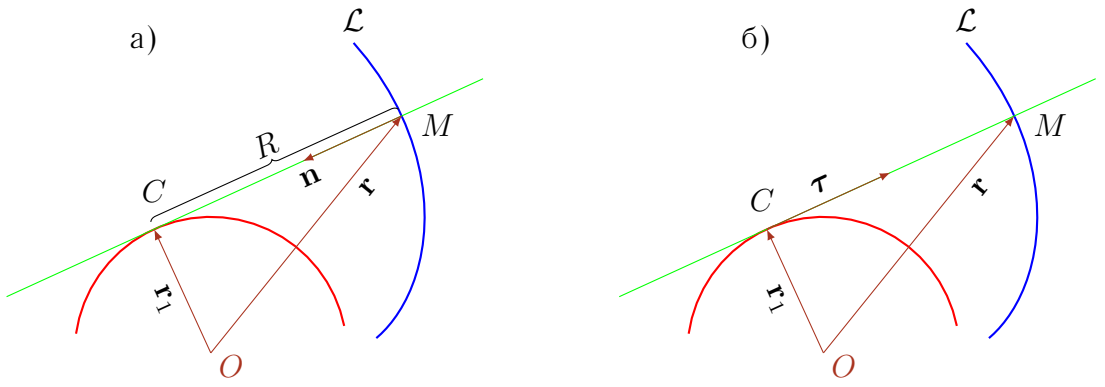



Рис. 6. Эволюта и эвольвента

Еще говорят, что эволюта является *огибающей нормалей к кривой* $\mathcal{L}$, потому что огибающей семейства кривых, зависящего от некоторого параметра $\gamma$, называют кривую, которая в каждой своей точке касается хотя бы одной кривой семейства. Очевидно, эволюта является огибающей семейства нормалей к кривой $\mathcal{L}$, зависящего от параметра $s$. На анимационном рис. 7, а) показано, как семейство нормалей к эллипсу формирует его эволюту (ср. с рис. 3, б)).

Найдем формулы координат центров кривизны кривой $\mathcal{L}$, которые одновременно будут давать и координаты точек ее эволюты. Пусть кривая $\mathcal{L}$ задана уравнением $y = y(x)$. Тогда уравнение ее нормали в точке $M(x, y)$ имеет вид

$$Y - y = -\frac{1}{y'(x)}(X - x),$$

где $(X, Y)$ — координаты произвольной точки нормали. Так как центр кривизны $C(x_C, y_C)$ лежит на нормали, его координаты должны удовлетворять уравнению нормали:

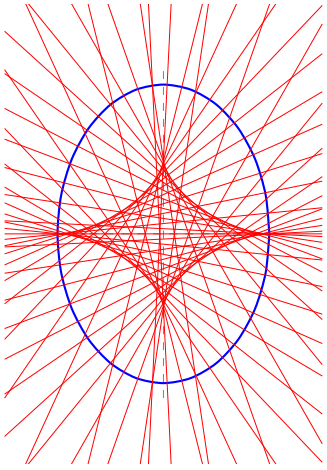
$$y_C - y = -\frac{1}{y'(x)}(x_C - x). \qquad (\text{П}15)$$

Кроме того, поскольку $MC = R$ (рис. 6, а)), то

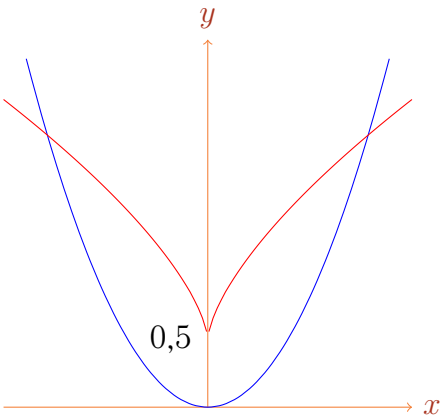
$$(x_C - x)^2 + (y_C - y)^2 = R^2.$$

Подставляя в это уравнение выражение для $y_C - y$ из (П15), получим

$$(x_C - x)^2 + \frac{1}{y'^2(x)}(x_C - x)^2 = R^2, \quad (x_C - x)^2\,\frac{1 + y'^2(x)}{y'^2(x)} = R^2,$$



а)




б)

Рис. 7. Эволюта: а) как огибающая, б) параболы.

$$x_C = x \pm \frac{y'(x)\,R}{\sqrt{1+y'^2(x)}}, \quad y_C = y \mp \frac{R}{\sqrt{1+y'^2(x)}}.$$

В силу формулы (11) и определения радиуса кривизны как $R = 1/K$, найдем, что

$$x_C = x \pm \frac{y'(x)\left[1+y'^2(x)\right]}{|y''(x)|}, \quad y_C = y \mp \frac{1+y'^2(x)}{|y''(x)|}.$$

Если $y''(x) > 0$, то кривая выпукла вниз и $y_C - y > 0$. Поэтому в формулах следует брать нижние знаки. При этом $|y''(x)| = y''(x)$. В результате придем к выражениям (13). Понятно, что при $y''(x) < 0$ вывод останется прежним.

Если кривая $\mathcal{L}$ задана в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, то представив производные $y'$ и $y''$ по известным формулам

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t}, \; y'' = \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{x'^3_t}$$

и подставив эти выражения в (13), придем к равенствам (14).

**Пример П1.** *Найти эволюту параболы* $y = x^2$.

*Решение.* Проведем вычисления по формулам (13):

$$x_C = x - \frac{2x\left(1+4x^2\right)}{2} = x - x - 4x^3 = -4x^3,$$
$$y_C = x^2 + \frac{1+4x^2}{2} = \frac{1}{2} + 3x^2.$$

Из первого уравнения выразим $x$ через $x_C$: $x = -\sqrt[3]{x_C/4}$, а, подставляя это выражение во второе уравнение, найдем, что

$$y_C = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{\sqrt[3]{2}}\,x^{2/3}\right).$$

Получили полукубическую параболу, рис. 7, б).

**Пример П2.** *Найти эволюту эллипса* $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

*Решение.* Вычисляя кривизну эллипса в примере 5, мы нашли, что

$$x'y'' - x''y' = ab, \qquad x'^2 + y'^2 = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t,$$

поэтому по формулам (14) получим

$$x_C = a\cos t - \frac{b\cos t\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)}{ab} = \frac{1}{ab}\left(a^2 b\cos t - a^2 b\cos t\sin^2 t - b^3\cos^3 t\right) =$$

$$= \frac{1}{ab}\left(\cancel{a^2 b\cos t} - \cancel{a^2 b\cos t} + a^2 b\cos^3 t - b^3\cos^3 t\right) = \left(a - \frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t, \qquad (\text{П}16)$$

$$y_C = b\sin t + \frac{-a\sin t\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)}{ab} = \frac{1}{ab}\left(ab^2\sin t - a^3\sin^3 t - ab^2\sin t\cos^2 t\right) =$$

$$= \frac{1}{ab}\left(\cancel{ab^2\sin t} - a^3\sin^3 t - \cancel{ab^2\sin t} + ab^2\sin^3 t\right) = \left(b - \frac{a^2}{b}\right)\sin^3 t. \qquad (\text{П}17)$$

Разделим первое равенство на $b$, второе — на $a$, возведем обе части полученных равенств в степень $2/3$ и сложим:

$$\left(\frac{x_C}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{y_C}{a}\right)^{2/3} = \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^{2/3}.$$

Это — уравнение удлиненной астроиды. □

Перейдем к выводу уравнения эвольвенты, считая известной вектор-функцию $\mathbf{r}_1'$, а неизвестной — вектор-функцию $\mathbf{r}$. Естественный трехранник привяжем теперь к эволюте, так что $s$ будет означать длину дуги эволюты, а вектор $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_1'(s)$ — ее единичный вектор касательной. Из рис. 6, б) видно, что

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mu\boldsymbol{\tau}, \qquad (\text{П}18)$$

где $\mu(s)$ —неизвестная пока функция. Поэтому дифференцируя это равенство, из первой формулы Френе получим

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_1' + \mu'\boldsymbol{\tau} + \mu\boldsymbol{\tau}' = \mathbf{r}_1' + \mu'\boldsymbol{\tau} + K\mu\mathbf{n} = \boldsymbol{\tau} + \mu'\boldsymbol{\tau} + K\mu\mathbf{n}.$$

Умножим обе части равенства на $\boldsymbol{\tau}$ и учтем. что $\boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{r}'$ и $\boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{n}$:

$$0 = 1 + \mu', \ \mu' = -1,$$

значит,

$$\mu(s) = c - s,$$

где $c = \text{const}$.

Таким образом, из (П18) находим, что

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + (c - s)\boldsymbol{\tau}. \qquad (\text{П}19)$$

Можно наглядно представить образование эвольвенты. Вообразим себе нерастяжимую нить, натянутую на часть эволюты, которой соответствует $s < c$ с концом в точке $N(c)$. Если нить, натягивая за конец, сматывать с эволюты, то этот конец опишет эвольвенту. Действительно, длина оттянутой нити равна $c - s$, а направлена она по вектору $\boldsymbol{\tau}$, так что оттягиваемый конец нити удовлетворяет уравнению (П19) (см. рис. 8, 1)).

Для произвольной параметризации с параметром $t$ уравнение эвольвенты переписывается следующим образом:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1(t) - \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\int_{t_0}^{t} |\mathbf{r}'(u)|\, du,$$

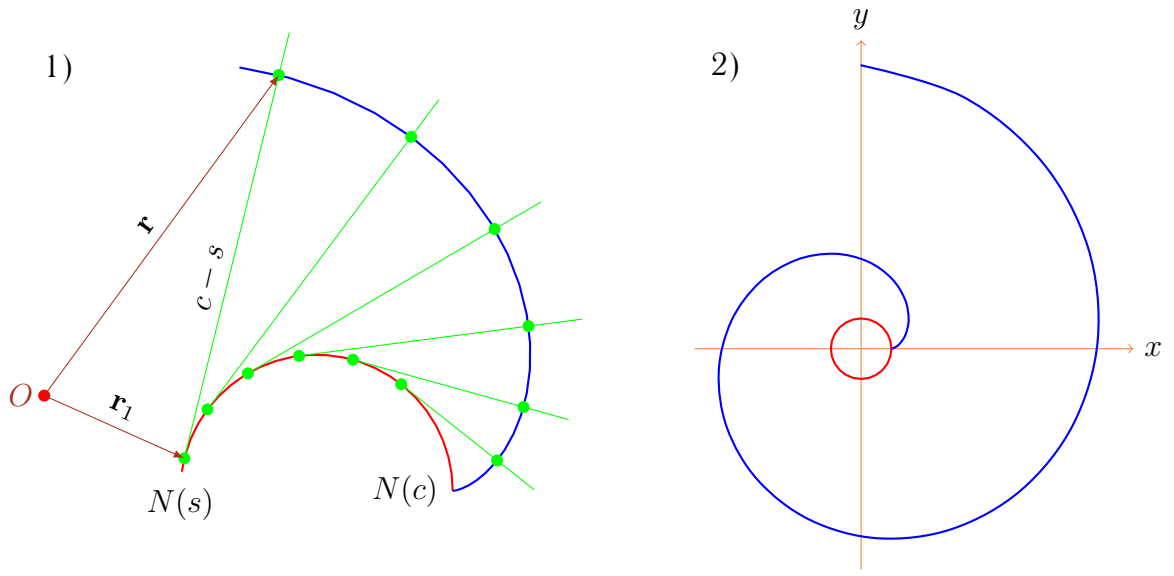



Рис. 8. 1) Формирование эвольвенты. 2) Эвольвента окружности.

так как в силу формулы (5) $s = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{r}'(u)|\, du$, а $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}'(t) / |\mathbf{r}'(t)|$. Предположим, что $\mathbf{r}_1(t) = x_1(t)\,\mathbf{i} + y_1(t)\,\mathbf{j}$, тогда в скалярной форме уравнение эвольвенты принимает вид

$$x_1(t) = x(t) - \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)}\, du,$$

$$y_1(t) = y(t) - \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)}\, du.$$

**Пример П3.** *Найти эвольвенту окружности* $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

*Решение.* Учитывая, что $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = a$, проведем вычисления по полученным формулам:

$$x_1(t) = a\cos t - \frac{-a\sin t}{a} \int_{t_0}^{t} a\, du = a\cos t + a(t - t_0)\sin t =$$
$$= a(\cos t + t\sin t) - at_0 \sin t,$$
$$y_1(t) = a\sin t - \frac{a\cos t}{a} \int_{t_0}^{t} a\, du = a(\sin t - t\cos t) + at_0 \cos t.$$

Полагая $t_0 = 0$, приходим к следующим уравнениям эвольвенты окружности:

$$x_1(t) = a(\cos t + t\sin t),$$
$$y_1(t) = a(\sin t - t\cos t).$$

Ее изображение показано на рис. 8, 2).

6) **Длина дуги кривой.** *Mathematica* легко справляется с вычислением этой характеристики — ведь ничего другого, кроме взятия интеграла, ей делать не надо. Но на лекции были получены целых четыре формулы для таких расчетов (с учетом различных способов задания

кривой, ее двух- и трехмерности). Было бы хорошо объединить все эти варианты вычислений в один-единственный оператор. *Mathematica* позволяет это сделать, так как умеет различать операторы, имеющие одинаковые имена, но отличающиеся числом параметров. Есть только одна закавыка: операторы, вычисляющие длину дуги в декартовых и полярных координатах, имеют одно и то же число аргументов, равное трем. Это — название функции и два предела интегрирования. Поэтому для этого случая мы заведем еще один параметр, например, `coord`. Его значение "`cart`", будет означать вычисление длины дуги в декартовой системе координат, а значение "`pol`" — в полярной системе.

Для удобства будем заключать пределы интегрирования в одну пару квадратных скобок, а функции, определяющие кривую — в другую. С точки зрения синтаксиса системы это допустимо. Вот что у нас получится:

$$\texttt{lenArc[a_,b_,coord_][f_]:=If}\left[\texttt{coord=="cart"},\int_a^b\sqrt{1+(f'[x])^2}\,dx,\int_a^b\sqrt{(\rho[\varphi])^2+(\rho'[\varphi])^2}\,d\varphi\right];$$

$$\texttt{lenArc[t0_,T_][x_,y_]:=}\int_{t0}^{T}\sqrt{(x'[t])^2+(y'[t])^2}\,dt;$$

$$\texttt{lenArc[t0_,T_][x_,y_,z_]:=}\int_{t0}^{T}\sqrt{(x'[t])^2+(y'[t])^2+(z'[t])^2}\,dt;$$

Проверим работу оператора `lenArc` на лекционных примерах. Длина дуги полукубической параболы:

$$\texttt{f[x_]:=}\sqrt{x^3}$$

```
lenArc[0,4,"cart"][f]
%//N
```

$$\frac{8}{27}(-1+10\sqrt{10})$$

9.07342

Длина дуги логарифмической спирали:

$$\rho[\varphi_]:=a\,e^{\varphi}$$

```
Refine[lenArc[0,π,"pol"][ρ], a>0]
%//N
```

$$\sqrt{2}a\,(-1+e^{\pi})$$

$31.3117a$

Длина дуги астроиды:

$$\texttt{x[t_]:=a Cos[t]}^3$$

$$\texttt{x[t_]:=a Sin[t]}^3$$

```
Refine[lenArc[0,π/2][x,y], a>0]
```

$$\frac{3a}{2}$$

Длина дуги винтовой линии:

```
xx[t_]:=R Cos[t]
xx[t_]:=R Sin[t]
xx[t_]:=v t
```

```
lenArc[0,2π][xx,yy,zz]
```

$2\pi(R^2+v^2)$

Но что делать, если интеграл, вычисляющий длину дуги, не выражается в элементарных функциях? Очевидно, применить численное интегрирование. Поэтому нам придется написать еще один оператор, `lenArcN`, который будем использовать в случае «неберущихся» интегралов:

```
lenArc[a_,b_,coord_][f_]:= If[coord=="cart", NIntegrate[Sqrt[1+(f'[x])^2],{x,a,b}],
                              NIntegrate[Sqrt[(ρ[φ])^2+(ρ'[φ])^2],{φ,a,b}]];
lenArc[t0_,T_][x_,y_]:= NIntegrate[Sqrt[(x'[t])^2+(y'[t])^2],{t,t0,T}];
lenArc[t0_,T_][x_,y_,z_]:= NIntegrate[Sqrt[(x'[t])^2+(y'[t])^2+(z'[t])^2],{t,t0,T}];
```

С его помощью найдем приближенное значение длины дуги кривой $y=e^{-x^2}$, $-1\le x\le 1$:

```
f[x_]:= e^(-x^2)
lenArcN[-1,1,"cart"][f]
2.40888
```

и трехмерной кривой:

```
xx[t_]:= t Sin[t]
yy[t_]:= Cos[t]
zz[t]:= t
lenArcN[0,π][xx,yy,zz]
5.55744
```

**Кривизна**. Для вычисления кривизны кривой можно поступить точно так же, составив оператор для четырех различных случаев задания кривой. Но мы рассмотрим другой вариант: запишем оператор лишь для параметрически заданной кривой в пространстве, а затем используем его во всех четырех случаях, представляя функции, описывающие кривую, в виде ВФСА в пространстве.

По формуле (7) создадим оператор, вычисляющий кривизну кривой, заданной ВФСА:

```
curvature[t_][r_]:= norm[Cross[r'[t],r''[t]]] / norm[r'[t]]^3
```

Применяя его, получим кривизну винтовой линии:

```
r[t_]:={R Cos[t],R Sin[t], v t}
FullSimplify[curvature[t][r],Assumptions → R>0 && v>0]
```

$$\frac{R}{R^2+v^2}$$

Опция `Assumptions` сообщает системе *Mathematica* наши предположения относительно используемых переменных.

Чтобы вычислить кривизну параметрически заданной плоской кривой, достаточно обнулить третью компоненту векторной функции $\mathbf{r}(t)$. Вычислим, например, кривизну эллипса:

```
r[t_]:={a Cos[t],b Sin[t],0}
FullSimplify[curvature[t][r],Assumptions → a>0 && b>0]
```

$$\frac{ab}{(b^2\,\mathrm{Cos}[t]^2 + a^2\,\mathrm{Sin}[t]^2)^{3/2}}$$

Для плоской кривой, заданной в декартовой системе координат уравнением $y = f(x)$, можно записать ВФСА в виде $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$. Так, для параболы $y = x^2$ кривизна вычислится следующим образом:

```
r[x_]:={x,x^2,0}
curvature[x][r]
```

$$\frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$$

Для плоской кривой, заданной в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, ВФСА запишется как $\mathbf{r} = \rho(\varphi)\cos\varphi\mathbf{i} + \rho(\varphi)\sin\varphi\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$. Рассчитаем кривизну логарифмической спирали $\rho = e^{\varphi}$:

```
r[φ_]:={e^φ Cos[φ],e^φ Sin[φ],0}
curvature[φ][r] // FullSimplify // PowerExpand
```

$$\frac{e^{-\varphi}}{\sqrt{2}}$$

**Кручение**. Формулу (12) для кручения в системе *Mathematica* можно записать так:

$$\sigma[t_][r_] := \frac{r'[t].\mathrm{Cross}[r''[t], r'''[t]]}{\mathrm{norm}[\mathrm{Cross}[r'[t], r''[t]]]^2}$$

Найдем уже вычисленное на лекции кручение винтовой линии:

```
r[t_]:={R Cos[t],R Sin[t],v t}
FullSimplify[σ[t][r], Assumptions → R>0 && v>0]
```

$$\frac{v}{R^2 + v^2}$$

**Эволюта**. Перейдем к вычислению координат центра кривизны, которые одновременно являются координатами точек эволюты. Составим соответствующий оператор:

$$\mathrm{evol}[t_][x_,y_] := \left\{x[t] - \frac{y'[t](x'[t]^2 + y'[t]^2)}{x'[t]y''[t] - x''[t]y'[t]}, y[t] + \frac{x'[t](x'[t]^2 + y'[t]^2)}{x'[t]y''[t] - x''[t]y'[t]}\right\}$$

Убедимся в том, что найденные выражения (П16), (П17) для координат центра кривизны эллипса совпадают с ответом системы *Mathematica*:

```
x[t_]:=a Cos[t]
y[t_]:=b Sin[t]
evol[t][x,y] // Simplify
```

$$\left\{\frac{(a^2 - b^2)\,\mathrm{Cos}[t]^3}{a}, \frac{(-a^2 + b^2)\,\mathrm{Sin}[t]^3}{b}\right\}$$

Координаты эволюты параболы найдем следующим образом:

```
xC[x_]:=x
yC[x_]:=x^2
evol[x][xC,yC] // Simplify
```

$$\left\{-4x^3, \frac{1}{2} + 3x^2\right\}$$

Мы уже знаем, что эволютой эллипса является астроида, а как выглядит эволюта самой астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$?

```
x[t_]:=a Cos[t]^3
y[t_]:=a Sin[t]^3
evolAstr=evol[t][x,y] // Simplify
{-a Cos[t](-2+Cos[2 t]), a (2+Cos[2 t]) Sin[t]}
```

Вышло пока неизвестно что. Преобразуем систему координат на плоскости, складывая и вычитая исходные координаты и выполняя поворот на 45°:

```
X = (%[[1]] + %[[1]])/√2 // FullSimplify
Y = (%%[[1]] - %%[[1]])/√2 // FullSimplify
```

$$\frac{a(\mathrm{Sin}[t] + \mathrm{Cos}[t])^3}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{a(\mathrm{Cos}[t] - \mathrm{Sin}[t])^3}{\sqrt{2}}$$

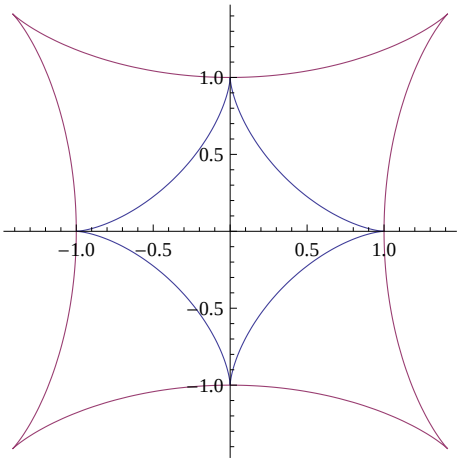
где %% — ответ, предыдущий предыдущему ответу системы, или, если хотите, ответ, предыдущий ответу %. Используя оператор `PowerExpand`, раскрывающий степени выражений, возведем полученные выражения в степень $2/3$ и сложим:

```
PowerExpand[(∛X)^2] + PowerExpand[(∛Y)^2] // FullSimplify
```

$$2^{2/3}\, a^{2/3}$$

Это означает, что уравнение эволюты имеет вид $X^{2/3} + Y^{2/3} = (2a)^{2/3}$, и поэтому эволюта астроиды — тоже астроида, но в два раза бóльшая исходной. Построим графики астроиды и ее эволюты:

```
ParametricPlot[Evaluate[{{x[t],y[t]},evolAstr} /. a → 1],{t,0,2π}]
```




**Эвольвента**. Подобным же образом *Mathematica* проводит расчеты и по получению координат эвольвенты. Зададим формулы для их расчета:

$$\mathrm{invol}[t_,t0_][x_,y_] := \left\{x[t] - \frac{x'[t]}{\sqrt{x'[t]^2 + y'[t]^2}} \int_{t0}^{t} \sqrt{x'[u]^2 + y'[u]^2}\, du,\right.$$
$$\left. y[t] - \frac{y'[t]}{\sqrt{x'[t]^2 + y'[t]^2}} \int_{t0}^{t} \sqrt{x'[u]^2 + y'[u]^2}\, du\right\}$$

Получим уравнения эвольвенты окружности, уже найденные в примере П3:

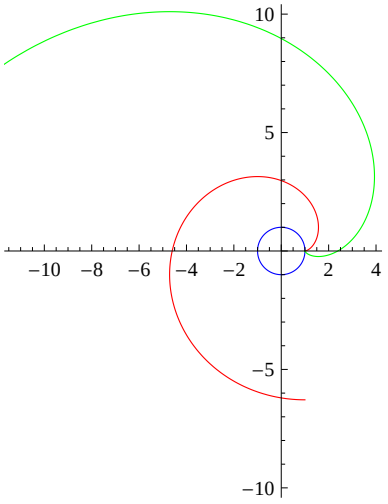
```
x[t_]:=a Cos[t]
x[t_]:=a Sin[t]
FullSimplify[involCirc=invol[t,0][x,y], Assumptions → a > 0]
{a (Cos[t] + t Sin[t]),a (-t Cos[t] + Sin[t])}
```

Поскольку формулы для вычисления координат эвольвенты содержат интеграл, придется включить в арсенал и численный метод расчета, если вдруг интеграл окажется не интегрируемым в элементарных функциях:

$$\texttt{invol[t_,t0_][x_,y_]:=}\left\{x[t]-\frac{x'[t]}{\sqrt{x'[t]^2+y'[t]^2}}\,\texttt{NIntegrate}\left[\sqrt{x'[u]^2+y'[u]^2},\{u,t0,t\}\right],\right.$$
$$\left.y[t]-\frac{y'[t]}{\sqrt{x'[t]^2+y'[t]^2}}\,\texttt{NIntegrate}\left[\sqrt{x'[u]^2+y'[u]^2},\{u,t0,t\}\right]\right\}$$

Построим графики окружности, ее эвольвенты и эвольвенты ее эвольвенты:

```
x[t_]:=Cos[t] + t Sin[t]
y[t_]:=Sin[t] - t Cos[t]
plot1=ParametricPlot[{Cos[t],Sin[t]},{t,0,2π}, PlotStyle → Blue];
plot2=ParametricPlot[{x[t],y[t]},{t,0,2π}, PlotStyle → Red];
plot3=ParametricPlot[involN[t,0][x,y],{t,0.01,2π}, PlotStyle → Green];
Show[plot1,plot2,plot3,PlotRange → {-10,10}]
```




В системе *Mathematica* есть множество возможностей анимировать рисунки. Воспользуемся одной из них, именно оператором `Animate`, чтобы наглядно изобразить образование эвольвенты окружности в результате «разматывания нити», как о том уже говорилось. В оператор `Animate` можно вставлять все, что мы собираемся анимировать, лишь бы это все зависело от так называемых параметров анимации, в простейшем случае — от одного параметра. Поскольку мы собираемся показывать процесс «разматывания нити», то в оператор `Animate` мы поместим оператор `ParametricPlot`, который нам нарисует этот процесс, а параметром анимации возьмем параметр `t`, определяющий координаты точки окружности и соответствующей ей точки эвольвенты. Этот параметр у нас будет изменяться от 1 до $4\pi$.

В качестве эволюты выберем единичную окружность:

```
x[t_] :=Cos[t]
```

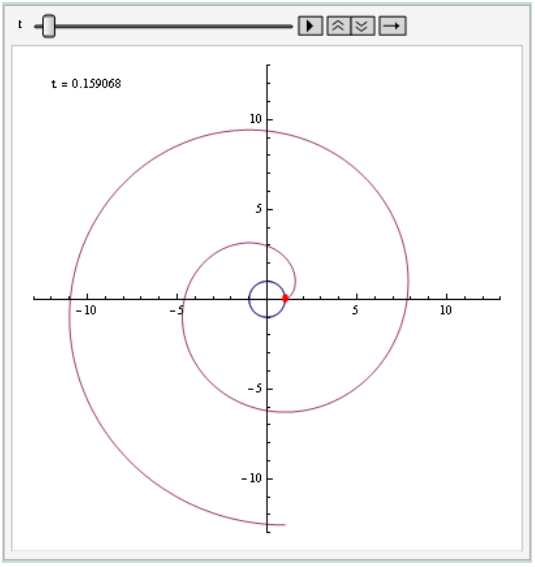
```
y[t_] := Sin[t]
```

тогда уравнения ее эвольвенты, как было показано в примере П3, будут такими:

```
x1[t_] := Cos[t] + t Sin[t]
y1[t_] := Sin[t] - t Cos[t]
```

Создадим анимацию:

```
Animate[ParametricPlot[{{x[u],y[u]},{x1[u],y1[u]}},{u,0,4π},
    Epilog → {Text[″t = ″ <> ToString[t],{-10,12}],Green,
    Line[{{x[t],y[t]},{x1[t],y1[t]}}],Red,PointSize[Medium],
    Point[{x[t], y[t]}],Point[{x1[t],y1[t]}]},PlotRange → 13],{t,0,4π},
    AnimationRunning → False]
```




Сама по себе анимация включаться не будет, так как опция `AnimationRunning` → `False`, использованная нами, означает, что для запуска анимации следует щелкнуть мышкой по кнопке `Play`. В данном документе для запуска анимации достаточно щелкнуть в любом месте рис.

Внутри оператора `Text` был использован оператор `ToString`, который переводит число в формат строки, и операция конкатенации строк <>, соединяющая строки друг с другом.

## Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.* – М.: Наука, 1984, – с. 265-277.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 1. – с. 242-245.