Двойной интеграл II

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Двойной интеграл в криволинейных координатах. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах. Геометрические и физические приложения двойного интеграла.

Возможности системы *Mathematica* для манипуляций с двойными интегралами в криволинейных координатах. Вычисление геометрических и физических характеристик плоских областей.

26 января 2015 г.

1 Криволинейные координаты

Пусть требуется вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D f\left(P\right)\, dS \tag{1}$$

по замкнутой области $D \subset xOy$ с кусочно гладкой границей. Как и в случае с определенным интегралом, вычисление двойного интеграла часто можно упростить, сделав в нем замену переменных. Пусть переменные x, y заменяются переменными u, v по формулам

$$x = x\left(u, v\right),\ y = y\left(u, v\right) \tag{2}$$

в предположении, что эта пара функций непрерывно дифференцируема, а переменные u, v определены в области D' с кусочно гладкой границей. Предположим, что функции (2) осуществляют взаимно однозначное отображение:

$$(u, v) \in D' \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} (x, y) \in D.$$

Это позволяет считать упорядоченные пары чисел (u, v) координатами точек области D, так как для любой пары $(u_0, v_0) \in D'$ мы можем вычислить единственную пару значений $(x_0, y_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) \in D$, т. е. получить

единственную точку области D, и, наоборот, для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ можем найти ее координаты $(u_0, v_0) = (x^{-1}(x_0, y_0), y^{-1}(x_0, y_0))$ в D'.

Координаты (u, v) точек D в отличие от координат (x, y) называют ***криволинейными***. Название связано с тем, что *прямоугольной* координатной сетке $u = u_0$, $v = v_0$, где u_0, v_0 — константы, в декартовой системе координат на плоскости uOv соответствует *криволинейная* координатная сетка на плоскости xOy с ***координатными линиями*** вида $x = x(u, v_0)$, $y = y(u, v_0)$ и $x = x(u_0, v)$, $y = y(u_0, v)$. Наглядное представление о криволинейных координатах дает рис. 1.

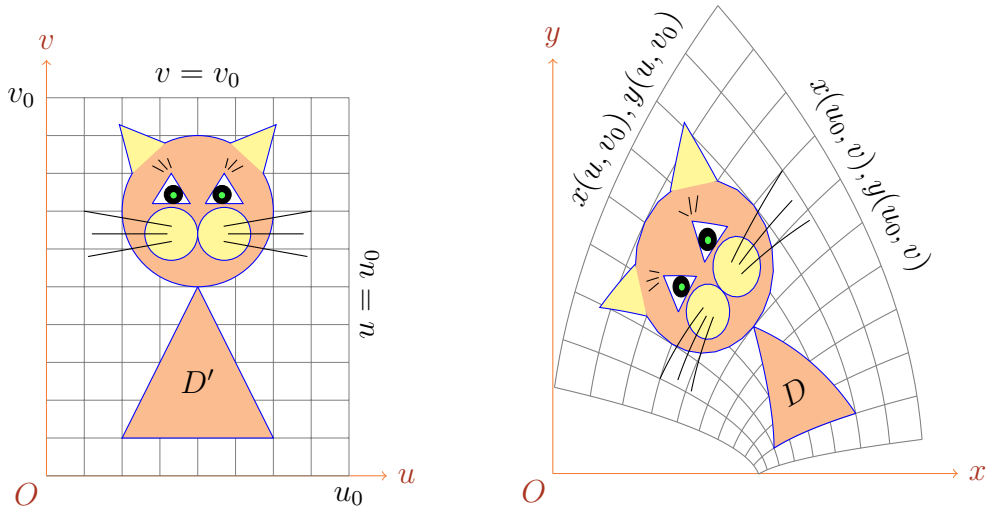
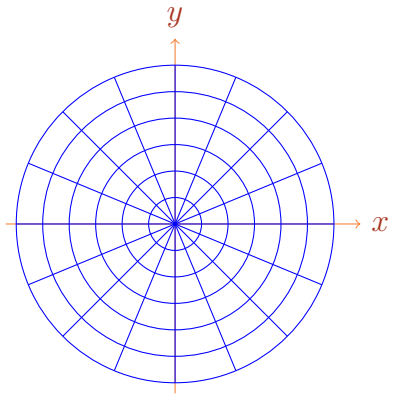


Рис. 1. Переход к криволинейным координатам.



Пример 1. *Построить криволинейные координаты для замены переменных*

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

$\rho \geq 0$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, *осуществляющей переход от декартовых координат к полярным.*

Решение. При фиксированном $\rho = \text{const}$ получаем окружности с центром в начале координат, а при фиксированном $\varphi = \text{const}$ — лучи, выходящие из начала координат. □

Как же изменится двойной интеграл после замены переменных (2)? Чтобы разобраться в этом, разобьем область $D' \subset uOv$ на прямоугольные ячейки $\Delta S'_i$, так, как это делалось при формировании интегральной суммы для двойного интеграла, и рассмотрим образы этих ячеек, образующие разбиение области $D \subset xOy$ (рис. 2). В общем случае преобразование (2) превращает прямоугольник $P'_1P'_2P'_3P'_4$ в криволинейный четырехугольник $P_1P_2P_3P_4$. Найдем

площади обеих фигур.

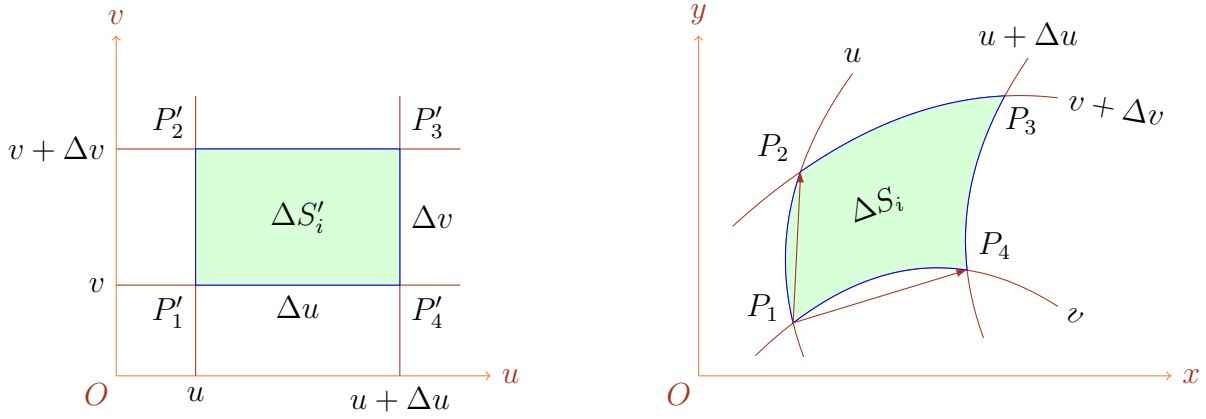


Рис. 2. Площадь криволинейной ячейки.

Из рис. 2 видно, что площадь прямоугольника $P_1'P_2'P_3'P_4'$ равна

$$\Delta S_i' = \Delta u \Delta v. \tag{3}$$

Найдем, хотя бы приближенно, площадь ΔS_i криволинейного четырехугольника $P_1P_2P_3P_4$. Для этого запишем как точные значения координат его вершин, так и приближенные, используя дифференциалы:

$$\begin{aligned}
&P_1(x_1, y_1),\ x_1 = x(u, v),\ y_1 = y(u, v);\\
&P_2(x_2, y_2),\ x_2 = x(u, v+\Delta v) \approx x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v,\\
&\qquad\qquad\ \ y_2 = y(u, v+\Delta v) \approx y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v;\\
&P_3(x_3, y_3),\ x_3 = x(u+\Delta u, v+\Delta v) \approx x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v,\\
&\qquad\qquad\ \ y_3 = y(u+\Delta u, v+\Delta v) \approx y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v;\\
&P_4(x_4, y_4),\ x_4 = x(u+\Delta u, v) \approx x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u,\\
&\qquad\qquad\ \ y_4 = y(u+\Delta u, v) \approx y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u.
\end{aligned}$$

Эти выражения приводят к заключению, что противоположные стороны рассматриваемого криволинейного четырехугольника приближенно равны:

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \approx \mathbf{P}_4\mathbf{P}_3 \approx \left(\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v, \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\right),$$

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_4 \approx \mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 \approx \left(\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u, \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\right).$$

Поэтому его площадь приближенно равна площади параллелограмма с такими же вершинами:

$$\Delta S_i \approx |\mathbf{P}_1\mathbf{P}_4 \times \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2| = \left| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \dfrac{\partial y}{\partial u}\Delta u & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}\Delta v & \dfrac{\partial y}{\partial v}\Delta v & 0 \end{vmatrix} \right| = \tag{4}$$

$$= |J|\,|\Delta u|\,|\Delta v| \overset{(3)}{=} |J|\,\Delta S_i',$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — декартовы орты, а

$$J = J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

— так называемый определитель ***Якоби***, или ***якобиан***.

Пусть в ячейке $\Delta S_i'$ произвольным образом выбрана точка $P_i'(u_i, v_i)$, а ее образом в ячейке ΔS_i является точка $P_i(x_i, y_i)$, где $x_i = x(u_i, v_i)$, $y_i = x(u_i, v_i)$. Тогда интегральные суммы, составленные для областей D' и D, оказываются связанными равенством

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} F(P_i')|J(u_i, v_i)|\Delta S_i',$$

где $F(P_i') = f[x(u_i, v_i), v(u_i, v_i)]$. Переходя к интегральному пределу, если он существует и конечен, получим равенство

$$\iint\limits_D f\,(x,y)\;dS = \iint\limits_{D'} F\,(u,v)\,|J(u,v)|\,dS',$$

или

$$\boxed{\iint\limits_D f\,(x,y)\;dS = \iint\limits_{D'} f\,[x\,(u,v)\,,y\,(u,v)]\,|J(u,v)|\,dS'.} \tag{5}$$

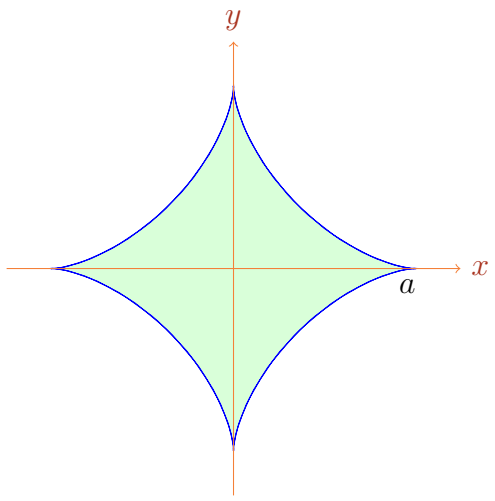
которое и дает формулу для вычисления двойного интеграла (1) в криволинейных координатах:

Пример 2. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной астроидой*

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Решение. Перейдем к обобщенным полярным координатам по формулам

$$x = \rho\cos^3\varphi,\ y = \rho\sin^3\varphi.$$



Вычислим якобиан преобразования:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \rho} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos^3\varphi & \sin^3\varphi \\ -3\rho\cos^2\varphi\sin\varphi & 3\rho\sin^2\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= 3\rho\sin^2\varphi\cos^2\varphi \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= 3\rho\sin^2\varphi\cos^2\varphi\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\rho\sin^2 2\varphi.$$

В этих координатах уравнение астроиды принимает вид $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \rho^{\frac{2}{3}}\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = a^{\frac{2}{3}}$, или $\rho = a$.

Ранее было получено, что объем цилиндроида выражается двойным интегралом

$$V = \iint\limits_D f(P)\,dS.$$

Если высота цилиндроида $f(P) \equiv 1$, то эта формула дает площадь его основания. Так что в общем случае площадь плоской фигуры D тоже выражается с помощью двойного интеграла:

$$S = \iint\limits_D dS.$$

Для астроиды угол φ изменяется от $-\pi$ до π, а ρ изменяется от 0 до a. Поэтому, применяя формулу (5) и переходя к повторному интегралу, получаем искомую площадь:

$$S = \iint\limits_D dS = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^a \frac{3}{4}\rho\sin^2 2\varphi\,d\rho = \frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^a \sin^2 2\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{3a^2}{16}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 4\varphi)\,d\varphi = \frac{3a^2}{16}\left(\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

2 Вычисление в полярных координатах

Довольно часто приходится иметь дело с двойным интегралом по области, представляющей собой круг или его часть. В этом случае использование полярной системы координат может существенно упростить вычисления. Переход от декартовых координат к полярным, как известно, выполняется по формулам

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,$$

$-\pi < \varphi \leq \pi$. Вычислим якобиан перехода:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \rho} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \rho.$$

Следовательно, двойной интеграл в полярных координатах в соответствии с формулой (5) принимает вид

$$\iint_D f(P)\,dS = \iint_{D'} f\left[x\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\right]\rho\,dS'.$$

Его вычисление сводится к вычислению повторного интеграла, если область интегрирования является ***правильной*** в направлении полярных лучей. Это означает, что любой полярный луч, проходящий через внутреннюю точку области, пересекает ее границу ровно в двух точках (левая часть рис. 3). В этом случае вычисление двойного интеграла проводят по формуле

$$\boxed{\iint\limits_D f\left(x, y\right)\,dS = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{a(\varphi)}^{b(\varphi)} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho\,d\rho.}$$

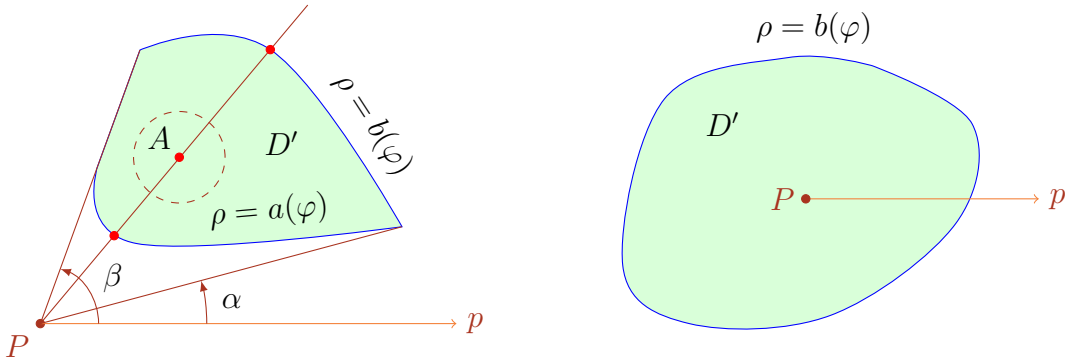


Рис. 3. К вычислению двойного интеграла в полярных координатах.

Если область D' содержит полюс (правая часть рис. 3), то предыдущая формула становится такой:

$$\boxed{\iint\limits_D f\left(x, y\right)\,dS = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{b(\varphi)} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho\,d\rho.} \qquad (6)$$

Это нетрудно понять, если представить себе, что при изменении угла φ от $-\pi$ до π, область D' сначала полностью охватывает полюс P, а затем кривая $\rho = a\left(\varphi\right)$ стягивается в эту точку.

Пример 3. *Найти объем тела, ограниченного поверхностями* $z = 1 - x^2 - y^2$, $z = 0$, *рис. 4.*

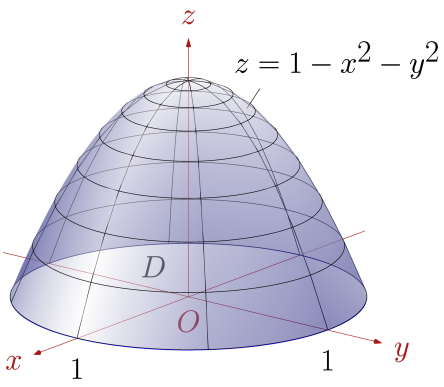


Рис. 4.

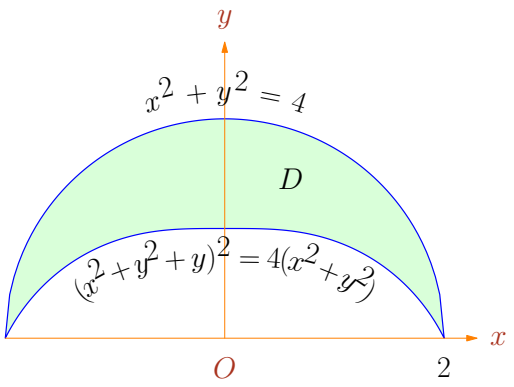


Рис. 5.

Решение. Основанием данного цилиндроида является круг, поэтому есть смысл применить формулу (6). Поскольку $-\pi \le \varphi \le \pi$, $0 \le \rho \le 1$, а уравнение эллиптического параболоида в полярных координатах принимает вид $z = 1 - \rho^2$, то вычисление объема сводится к следующим выкладкам:

$$V = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^1 \left(1 - \rho^2\right) \rho \, d\rho = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 d\varphi = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 4. *Пластина D ограничена кривыми*

$$x^2 + y^2 = 4, \quad \left(x^2 + y^2 + y\right)^2 = 4\left(x^2 + y^2\right)$$

(рис. 5) и имеет поверхностную плотность $\gamma(x, y) = 6x$ *электрического заряда. Найти полный заряд пластины.*

Решение. Ранее† было показано, что заряд плоской пластины D является двойным интегралом от плотности заряда:

$$q = \iint_D \gamma(x, y) \, dS.$$

Так как область D является частью круга, удобно перейти к полярным координатам, в которых уравнение окружности, ограничивающей пластину сверху, принимает вид $\rho = 2$, а второе уравнение становится таким: $\left(\rho^2 + \rho \sin\varphi\right)^2 = 4\rho^2$, $\left(\rho + \sin\varphi\right)^2 = 4$, $\rho = 2 - \sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$. Перейдем к вычислению заряда в полярных координатах:

$$q = \iint_D 6x \, dS = 12 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{2-\sin\varphi}^{2} \rho^2 \cos\varphi \, d\rho = 4 \int_0^{\pi/2} \rho^3 \Big|_{2-\sin\varphi}^{2} \cos\varphi \, d\varphi =$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \left[8 - \left(8 - 12\sin\varphi + 6\sin^2\varphi - \sin^3\varphi\right)\right] \cos\varphi \, d\varphi =$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \left(12 \sin\varphi \cos\varphi - 6\sin^2\varphi \cos\varphi + \sin^3\varphi \cos\varphi\right) \, d\varphi =$$

†Лекция «Двойной интеграл I».

$$= \langle t = \sin\varphi,\ dt = \cos\varphi\, d\varphi \rangle = 4\left(6\int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi\, d\varphi - 6\int_0^1 t^2\, dt + \int_0^1 t^3\, dt\right) =$$

$$= 4\left(-3\cos 2\varphi\Big|_0^{\pi/2} - 2t^3\Big|_0^1 + \frac{t^4}{4}\Big|_0^1\right) = 4\left(6 - 2 + \frac{1}{4}\right) = 17.$$

3 Применение двойного интеграла

3.1 Геометрические приложения

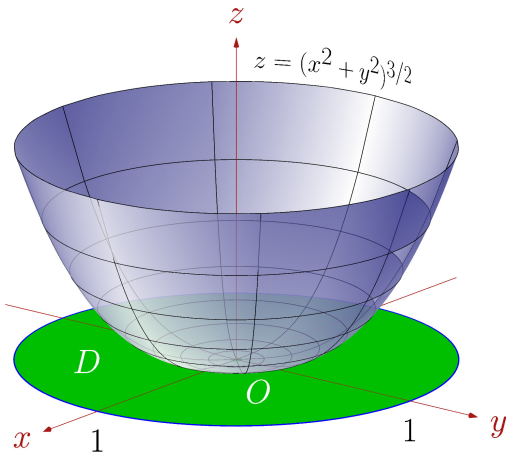
Ранее было получено, что с помощью двойного интеграла можно найти площадь S плоской фигуры D и вычислить объем V цилиндроида:

$$S = \iint\limits_D dS, \quad V = \iint\limits_D f(P)\, dS.$$

Площадь кусочно гладкой поверхности $S : z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, где область D имеет кусочно гладкую границу, а f'_x, f'_y непрерывны в D, выражается формулой

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}\, dS. \tag{7}$$

Чтобы узнать, что понимается под площадью криволинейной поверхности и как выводится формула (7), следует обратиться к Приложению[1)].



Пример 5. *Найти площадь поверхности* $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{3/2}$.

Решение. Применим формулу (7) и переход к полярным координатам, учитывая, что $f'_x = 3x\sqrt{x^2 + y^2}$, $f'_x = 3y\sqrt{x^2 + y^2}$, а областью D на плоскости xOy является единичный круг с центром в начале координат:

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + 9\left(x^2 + y^2\right)^2}\, dS =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 + 9\rho^4}\rho\, d\rho = \langle t = \rho^2,\ dt = 2\rho\, d\rho \rangle = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 + 9t^2}\, dt.$$

Внутренний интеграл вычислим отдельно:

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 + 9t^2}\, dt = \left\langle u = \sqrt{1 + 9t^2},\ dv = dt,\ du = \frac{9t}{\sqrt{1 + 9t^2}},\ v = t \right\rangle =$$

$$= t\sqrt{1+9t^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{9t^2}{\sqrt{1+9t^2}}\,dt = \sqrt{10} - \int_0^1 \frac{(1+9t^2)-1}{\sqrt{1+9t^2}}\,dt =$$
$$= \sqrt{10} - \int_0^1 \sqrt{1+9t^2}\,dt + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+9t^2}}\,dt = \sqrt{10} - I + \frac{1}{3}\ln\left(3t+\sqrt{1+9t^2}\right)\Big|_0^1 =$$
$$= \sqrt{10} - I + \frac{1}{3}\ln\left(3+\sqrt{10}\right),$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\sqrt{10} + \frac{1}{3}\ln\left(3+\sqrt{10}\right)\right].$$

Площадь поверхности равна

$$S = \frac{1}{4}\left[\sqrt{10} + \frac{1}{3}\ln\left(3+\sqrt{10}\right)\right]\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi = \frac{\pi}{6}\left[3\sqrt{10} + \ln\left(3+\sqrt{10}\right)\right].$$

3.2 Физические приложения

Как мы уже видели, если задана поверхностная плотность $\gamma(x,y)$ заряда плоской пластинки, то весь заряд q пластинки вычисляется по формуле

$$q = \iint\limits_D \gamma(x,y)\ dS.$$

Совершенно аналогично можно показать, что масса m пластинки является двойным интегралом такого же вида:

$$m = \iint\limits_D \gamma(x,y)\ dS,$$

где $\gamma(x,y)$ — поверхностная плотность вещества пластинки.

На лекции «Физические приложения определенного интеграла» были введены понятия статических моментов, моментов инерции и центра тяжести плоской фигуры определенного типа. С помощью двойного интеграла эти понятия расширяются на фигуры более общего вида.

Все определения можно дать по единообразной схеме. Пусть, например, требуется определить статический момент плоской фигуры D относительно оси Ox. Расположим фигуру в плоскости xOy и выполним ее разбиение на n ячеек произвольными кривыми. Далее, как мы уже не раз делали, выберем произвольную точку $P_i(x_i,y_i)$ в ячейке ΔS_i и отождествим последнюю с этой точкой, считая массой P_i произведение $\gamma(P_i)\Delta S_i$, а ее статическим моментом — произведение $y_i\gamma(P_i)\Delta S_i$. Суммируя все такие статические моменты, найдем приближенное значение статического момента фигуры D:

$$M_x \approx \sum_{i=1}^{n} y_i\gamma(x_i,y_i)\ \Delta S_i.$$

Затем перейдем к интегральному пределу и получим точное значение этого момента с помощью двойного интеграла:

$$M_x = \iint\limits_D y\gamma\left(x,y\right)\,dS.$$

Статический момент относительно оси Oy определяется аналогично:

$$M_y = \iint\limits_D x\gamma\left(x,y\right)\,dS.$$

Запишем также определения моментов инерции пластинки D относительно координатных осей

$$I_x = \iint\limits_D y^2\gamma\left(x,y\right)\,dS,\ I_y = \iint\limits_D x^2\gamma\left(x,y\right)\,dS,$$

и относительно начала координат:

$$I_O = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\gamma\left(x,y\right)\,dS.$$

Координаты центра тяжести плоской фигуры массы m выражаются формулами

$$c_x = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m}\iint\limits_D x\gamma\left(x,y\right)\,dS,\ c_y = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m}\iint\limits_D y\gamma\left(x,y\right)\,dS. \qquad (8)$$

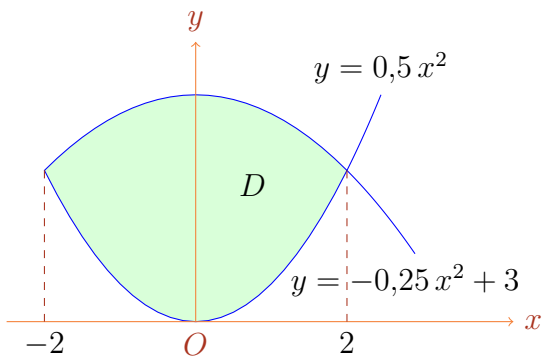
Пример 6. *Найти момент инерции круга $x^2+y^2=R^2$ относительно его диаметра, если его поверхностная плотность равна $\gamma\left(x,y\right)=x^2$.*

Решение. Воспользуемся формулой момента инерции относительно Ox:

$$I_x = \iint\limits_D y^2\gamma\left(x,y\right)\,dS = \iint\limits_D y^2x^2\,dS.$$

Перейдем к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, в которых уравнение границы круга имеет вид $\rho=R$, а якобиан преобразования $J=\rho$:

$$I_x = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\int_0^R \rho^2\sin^2\varphi\rho^2\cos^2\varphi\,\rho\,d\rho = \int_{-\pi}^{\pi}\left.\frac{\rho^6}{6}\right|_0^R\cdot\frac{1}{4}\cdot 4\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi =$$
$$= \frac{R^6}{24}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 2\varphi\,d\varphi = \frac{R^6}{48}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\cos 4\varphi\right)\,d\varphi = \frac{R^6}{48}\left.\left(\varphi-\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi R^6}{24}.$$



Пример 7. *Найти центр тяжести плоской фигуры D, ограниченной кривыми $y = 0{,}5x^2$ и $y = -0{,}25x^2 + 3$.*

Решение. Сформулированное условие задачи предполагает, что $\gamma(x, y) \equiv 1$, и, следовательно, масса фигуры численно равна ее площади. Вот и найдем эту массу-площадь:

$$m = \iint\limits_D dS = \int_{-2}^{2} dx \int_{0{,}5x^2}^{-0{,}25x^2+3} dy = \int_{-2}^{2} y\Big|_{0{,}5x^2}^{-0{,}25x^2+3} dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(-0{,}75x^2 + 3\right) dx = \left(-0{,}25x^3 + 3x\right)\Big|_{-2}^{2} = -4 + 12 = 8.$$

Далее вычислим статический момент относительно оси абсцисс:

$$M_x = \iint\limits_D y\, dS = \int_{-2}^{2} dx \int_{0{,}5x^2}^{-0{,}25x^2+3} y\, dy = \int_{-2}^{2} \frac{y^2}{2}\Big|_{0{,}5x^2}^{-0{,}25x^2+3} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \left[\left(-0{,}25x^2 + 3\right)^2 - 0{,}25x^4\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \left(-0{,}1875x^4 - 1{,}5x^2 + 9\right) dx = \left(-0{,}0375x^5 - 0{,}5x^3 + 9x\right)\Big|_{0}^{2} =$$

$$= -1{,}2 - 4 + 18 = 12{,}8.$$

В силу симметричности фигуры статический момент относительно оси ординат равен нулю. По формулам (8) находим координаты центра тяжести:

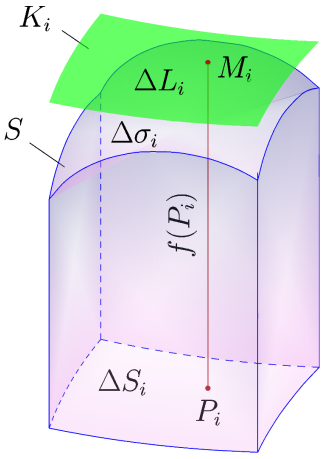
$$c_x = 0,\ c_y = \frac{12{,}8}{8} = 1{,}6.$$

□

Применение системы *Mathematica* для вычисления двойных интегралов в криволинейных координатах, для вычисления геометрических и физических характеристик плоских областей см. в Приложении[2)].

Приложение

1)



Разобьем область D на n частей с помощью произвольных кусочно гладких кривых и обозначим ячейки разбиения ΔS_i. В каждой такой ячейке произвольным образом выберем точку $P_i(x_i, y_i)$. Этой точке на поверхности S найдется соответствующая точка $M_i(x_i, y_i, z_i)$, где $z_i = f(x_i, y_i)$. В точке M_i проведем к поверхности S касательную плоскость K_i. Обозначим $\Delta\sigma_i$ проекцию ячейки ΔS_i на поверхность S в направлении оси Oz, и ΔL_i — проекцию этой же ячейки и в том же направлении на плоскость K_i.

Площадью поверхности S называют интегральный предел вида

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max d(\Delta S_i)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i. \qquad (\text{П}1)$$

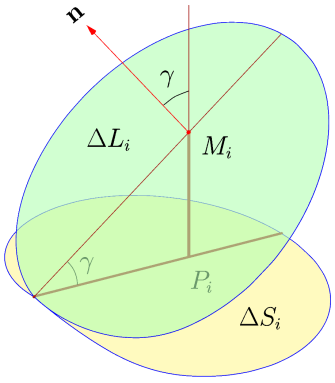
Вектор $\mathbf{N} = (f'_x(P_i), f'_y(P_i), -1)^T$ является нормалью† к поверхности S в точке M_i, а единичный вектор нормали записывается в виде

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)^T,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали, причем, $\cos\gamma$ — косинус угла между вектором нормали и осью Oz — выражается формулой

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(P_i) + f'^2_y(P_i)}}.$$

Покажем, что площади ячеек и ΔS_i и ΔL_i связаны равенством $\Delta S_i = \cos\gamma \cdot \Delta L_i$. Прежде всего заметим, что угол γ между нормалью и осью Oz по свойству углов со взаимно перпендикулярными сторонами является одновременно и углом между ячейками ΔS_i и ΔL_i.



Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма П1. *Площадь S треугольника и площадь S' его проекции на плоскость P связаны равенством*

$$S' = S\cos\gamma,$$

где γ — угол между плоскостью треугольника и плоскостью P.

Решение. Рассмотрим два случая. Пусть вначале у треугольника ABC одна сторона, скажем, AC параллельна плоскости P. Тогда без потери общности можно считать, что AC принадлежит этой плоскости (рис. 6).

Пусть h — высота треугольника ABC, а h' — высота его проекции $AB'C$. Тогда $S = \frac{1}{2}AC \cdot h$, а $S' = \frac{1}{2}AC \cdot h'$. Но $h' = h\cos\gamma$, поэтому

$$S' = \frac{1}{2}AC \cdot h' = \frac{1}{2}AC \cdot h\cos\gamma = S\cos\gamma.$$

†Лекция «Полный дифференциал».

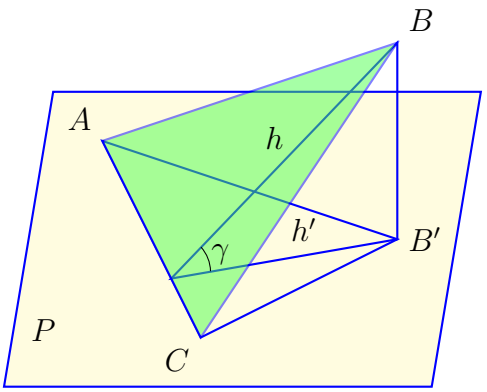


Рис. 6.

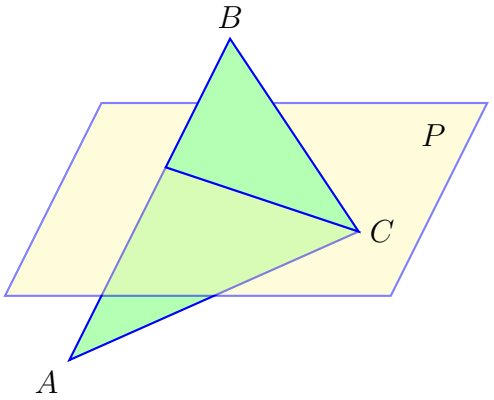


Рис. 7.

Если ни одна из сторон треугольника не параллельна плоскости P, его можно параллельным переносом перенести так, чтобы плоскость P разделила его на два треугольника, в каждом из которых найдется по стороне, параллельной плоскости P (рис. 7). Так как для каждой части треугольника по уже доказанному лемма будет справедлива, то она будет справедлива и для всего треугольника. □

Аналогичное утверждение остается верным и для произвольного многоугольника, так как его можно разбить на треугольники, для каждого из которых лемма верна.

Лемма верна и для плоской фигуры, ограниченной кривой, так как по определению площадь такой фигуры есть интегральный предел площади вписанного в нее многоугольника, если считать ячейками его стороны (это можно усмотреть хотя бы из определения определенного интеграла).

Возвращаясь к выражению (П1), получаем, что

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max d(\Delta S_i)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max d(\Delta S_i)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta S_i}{\cos\gamma} =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max d(\Delta S_i)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f_x'^2(P_i) + f_y'^2(P_i)}\,\Delta S_i,$$

откуда и следует формула (7).

[2)] *Mathematica* может пригодиться для изображения криволинейной сетки координат, чтобы визуально убедиться в характерных особенностях применяемого преобразования плоскости. При переходе, например, к параболической системе координат используют формулы

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv.$$

Зададим шаги по осям Ou и Ov, минимальные и максимальные значения переменных u и v, а также указанные формулы:

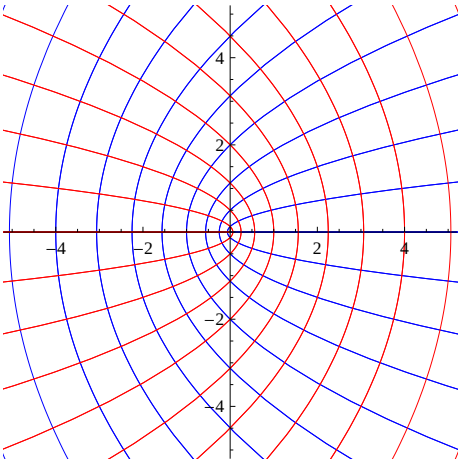
```
du = 0.25; dv = 0.25; uMin = -2; uMax = 3; vMin = -2; vMax = 3;
x[u_,v_] := u^2 - v^2;
y[u_,v_] := 2uv;
```

Затем подготовим необходимые данные, вычислим якобиан перехода и построим сетку параболических координат:

```
m = Round[(uMax - uMin)/du];
```

```
n = Round[(vMax - vMin)/dv];
uTicks = Table[uMin + (i - 1)du, {i, 1, m + 1}];
vTicks = Table[vMin + (i - 1)dv, {i, 1, n + 1}];
uLines = Table[{x[u, vTicks[[i]]], y[u, vTicks[[i]]]}, {i, 1, Length[vTicks]}];
vLines = Table[{x[uTicks[[i]], v], y[uTicks[[i]], v]}, {i, 1, Length[uTicks]}];
plot1 = ParametricPlot[uLines, {u, -5, 5}, PlotStyle → Blue, PlotRange → 5.2];
plot2 = ParametricPlot[vLines, {v, -5, 5}, PlotStyle → Red, PlotRange → 5.2];
J = Det[{{∂u x[u, v], ∂u y[u, v]}, {∂v x[u, v], ∂v y[u, v]}}];
Print["J = ", J];
Show[plot1, plot2]
```

$J = 4u^2 + 4v^2$



Изменив исходные данные и оставив прежними остальные операторы, можно получить визуализацию любой другой криволинейной системы координат. Например, для биполярной системы, для которой

$$x = \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u + \cos v}, \quad y = \frac{\sin v}{\operatorname{ch} u + \cos v},$$

результат будет следующим (рис. 8):

```
du = 0.4; dv = π/8; uMin = -3; uMax = 3; vMin = 0; vMax = 2π;
x[u_, v_] := Sinh[u]/(Cosh[u] + Cos[v]);
y[u_, v_] := Sin[v]/(Cosh[u] + Cos[v]);
```

$J = \dfrac{1}{(\mathrm{Cos}[v] + \mathrm{Cosh}[u])^2}$

Вычисление двойных интегралов в криволинейных координатах *Mathematica* выполняет так же, как и в декартовых. Например, площадь астроиды, найденная на лекции, с помощью повторного интеграла *Mathematica* отыскивает так:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^a \frac{3}{4}\,\mathrm{Sin}[t]^2\, r\, dr\right) df$$

$$\frac{3a^2\pi}{8}$$

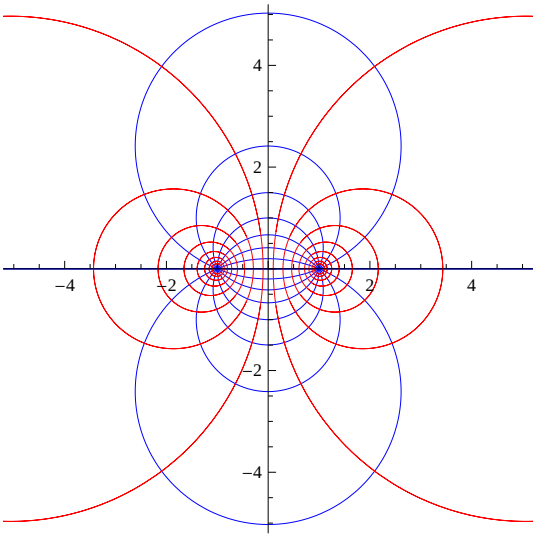


Рис. 8.

Центр тяжести, полученный в последнем примере, можно рассчитать тремя способами. Во-первых, используя повторные интегралы:

$$\int_{-2}^{2}\left(\int_{0.5x^2}^{-0.25x^2+3} dy\right)dx$$

$$\int_{-2}^{2}\left(\int_{0.5x^2}^{-0.25x^2+3} y\,dy\right)dx$$

```
% / %%
8.
12.8
1.6
```

Во-вторых, если работать в 10-й версии системы *Mathematica*, то первый интеграл можно найти как меру (площадь) области интегрирования:

```
reg = ImplicitRegion[-2 ≤ x ≤ 2 && 0.5 x^2 ≤ y ≤ -0.25 x^2 + 3, {x, y}];
RegionMeasure[reg]
8.
```

А в третьих, в упомянутой версии имеется специальный оператор `RegionCentroid`, который просто вычисляет центр тяжести однородной области, ничего не сообщая о том, как он это делает:

```
RegionCentroid[reg]
{0., 1.6}
```

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного* . — М.: Наука, 1985, — с. 163-170, 175-185.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* — М.: Рольф, 2000. Ч. 2. — с. 63-67.