Двойной интеграл I

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Общая схема определения новых типов интегралов. Общие свойства различных видов интегралов. Задача об объеме цилиндроида. Понятие двойного интеграла. Его вычисление с помощью повторного интеграла в случае областей, правильных в направлении одной из координатных осей.
Анимация понятия двойного интеграла.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Вычисление двойных интегралов в системе *Mathematica*.

23 января 2015 г.

Для более глубокого проникновения в суть электромагнитных явлений вам предстоит изучить несколько новых типов интегралов: двойных, тройных, криволинейных, поверхностных и т. д. Для их вычисления по-прежнему будет использоваться неопределенный интеграл. А смысл новых интегралов более всего будет отвечать смыслу определенного интеграла, т. е. возникнет ряд расширений этого понятия. Помните, как мы вводили определенный интеграл? Брали отрезок, разбивали его на части, заменяли кусочек криволинейной трапеции прямоугольником, находили его площадь, складывали площади всех прямоугольников и находили приближенное значение площади криволинейной трапеции. Затем переходили к специальному пределу и получали точное значение этой площади, которое, если отвлечься от геометрии, и было определенным интегралом. Оказывается, эта схема используется и для введения других видов интегралов, например, отрезок интегрирования можно изогнуть и получить криволинейный интеграл. Или вместо отрезка взять для разбиения на ячейки плоскую фигуру и получить двойной интеграл. Или изогнуть эту фигуру и придти к поверхностному интегралу. А взяв вместо фигуры тело (в геометрическом смысле), получить тройной интеграл. А уж если размерность тела больше трех, то ...

1 Общая схема определения интегралов

Рассмотрим нестрого, но поэтапно алгоритм конструирования понятия некоторого интеграла нового типа.

1. Задается некоторый геометрический объект Q (отрезок, кривая, поверхность, тело и т. п.).

2. Объект разбивается на n ячеек $\Delta\mu_i$ (элементов длины, площади, объема), каждой из которых сопоставляется мера (длина, площадь, объем), причем, элемент и его мера отождествляются; так что точно или приближенно
$$Q \approxeq \sum_{i=1}^{n} \Delta\mu_i. \tag{1}$$

3. На Q задается функция (скалярная или векторная) $g(P)$, $P \in Q$.

4. Рассматривается предел
$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max d(\Delta\mu_i)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} g(P_i)\,\Delta\mu_i, \tag{2}$$
$P_i \in \Delta\mu_i$, где $d(\Delta\mu_i)$ – ***диаметр*** элемента $\Delta\mu_i$, то есть максимальное расстояние между двумя его точками. (Если предел существует, конечен, не зависит от способа разбиения Q на части $\Delta\mu_i$ и выбора в них точек P_i, будем говорить о существовании ***интегрального предела***).

5. Если интегральный предел существует, его значение называют ***интегралом от функции*** g ***по объекту*** (***по области***) Q и обозначают
$$J = \int\limits_{Q} g(P)\,d\mu.$$

Аналогично конструкции определенного интеграла функция $g(P)$ называется ***подынтегральной функцией***, $g(P)\,d\mu$ – ***подынтегральным выражением***, Q – ***областью интегрирования***.

Замечание 1. *Сумма под знаком предела в* (2) *называется* ***интегральной*** *и в приложениях является приближенным значением некоторой геометрической или физической величины; причем, приближение обусловлено, во-первых, приближением* (1)*, а, во-вторых, тем, что функция* $g(P)$ *считается постоянной на множестве* $\Delta\mu_i$*, даже если это не так.*

Все вводимые в дальнейшем интегралы будут обладать общими свойствами, аналогичными свойствам определенного интеграла. Далее представлен перечень этих свойств.

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ

C, $N-$ константы, g, g_1, g_2 – некоторые функции.

1° $\int\limits_Q d\mu = Q.$

2° $\int\limits_Q Cg\,(P)\;d\mu = C\int\limits_Q g\,(P)\;d\mu.$

3° $\int\limits_Q [g_1\,(P) \pm g_2\,(P)]\;d\mu = \int\limits_Q g_1\,(P)\;d\mu \pm \int\limits_Q g_2\,(P)\;d\mu.$

4° $\int\limits_Q g\,(P)\;d\mu = \int\limits_{Q_1} g\,(P)\;d\mu + \int\limits_{Q_2} g\,(P)\;d\mu,\, Q = Q_1 \cup Q_2,\, Q_1 \cap Q_2 = \varnothing.$

5° $g_1(P) \le g_2(P) \Longrightarrow \int\limits_Q g_1(P)\,d\mu \le \int\limits_Q g_2(P)\,d\mu, \quad P \in Q.$

6° $\left|\int\limits_Q g(P)\,d\mu\right| \le \int\limits_Q |g(P)|\,d\mu.$

Действительно, так как $-|g(P)| \le g(P) \le |g(P)|$, то в силу предыдущего свойства

$$-\int\limits_Q |g(P)|\,d\mu \le \int\limits_Q g(P)\,d\mu \le \int\limits_Q |g(P)|\,d\mu,$$

откуда и получаем требуемое.

7° $|g(P)| \le N \Longrightarrow \left|\int\limits_Q g(P)\,d\mu\right| \le N \cdot Q, \quad P \in Q.$

Также следует из предыдущих свойств:

$$\left|\int\limits_Q g(P)\,d\mu\right| \le \int\limits_Q |g(P)|\,d\mu \le N\int\limits_Q d\mu \le N \cdot Q.$$

2 Задача об объеме цилиндроида

Цилиндроидом называется тело, ограниченное сверху поверхностью S с уравнением $z = f(x, y) \geq 0$, а с боков — цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz. Будем предполагать, что поверхность S проектируется на плоскость xOy в область D (рис. 1).

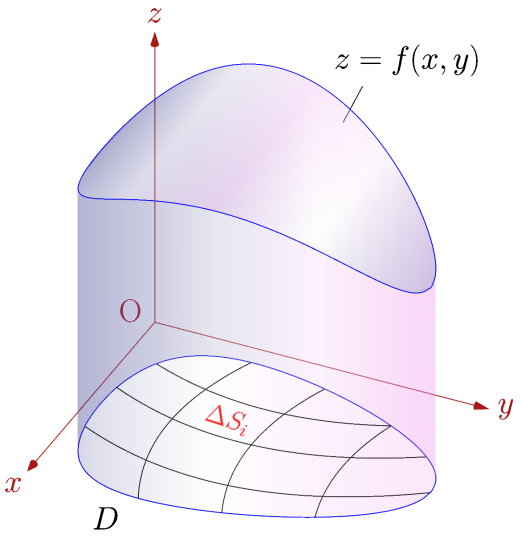


Рис. 1. Цилиндроид.

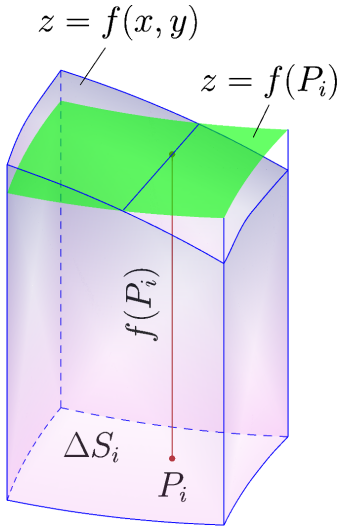


Рис. 2. «Столбик».

Следуя изложенной схеме определения интегралов, в качестве объекта интегрирования выберем область D; подынтегральной функцией — $f(P)$, $P \in D$; ячейками будут элементы площади ΔS_i, на которую мы разобьем область D произвольными кривыми. В каждой ячейке ΔS_i произвольным образом выберем точку P_i, а затем составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta S_i. \tag{3}$$

Произведение $f(P_i)\,\Delta S_i$ представляет собой объем V_i цилиндроида с плоской верхушкой («столбика») высоты $f(P_i)$, построенного на основании ΔS_i (рис. 2). Действительно, следуя методу поперечных сечений[†], можно получить, что

$$V_i = \int\limits_0^{f(P_i)} \Delta S_i\, dz = f(P_i)\Delta S_i.$$

Объединение всех таких «столбиков» называется ***столбчатым телом***. Следовательно, интегральная сумма (3) является его объемом. Щелкая мыш-

[†]Лекция «Геометрические приложения определенного интеграла».

кой на анимационном рис. 3 можно увидеть, как увеличение числа ячеек разбиения и уменьшение их размеров приводит ко все более точной аппроксимации цилиндроида столбчатыми телами.

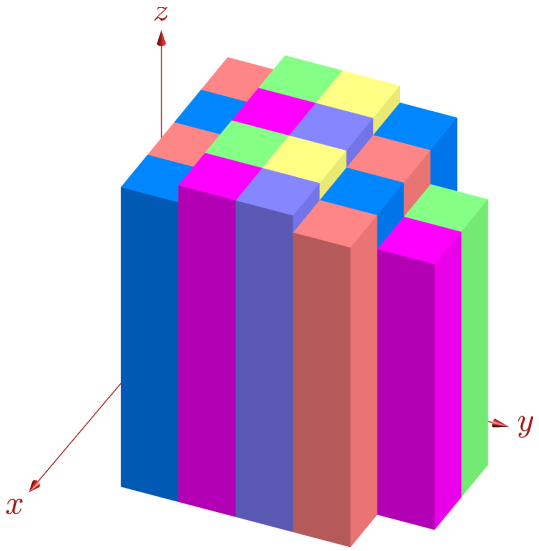


Рис. 3. Столбчатое тело.

В силу сказанного, выполнив предельный переход, описанный в предыдущем п., получим точное значение объема цилиндроида при условии, что интегральный предел существует.

Если интегральная сумма (3) не связана с задачей об объеме цилиндроида и функция $f(x, y)$ не обязательно неотрицательна, то этот предел называют ***двойным интегралом*** от функции $f(P)$ по области D и обозначают

$$\iint\limits_D f(P)\, dS.$$

Теорема 1. *Если функция $f(P)$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве D с кусочно-гладкой границей, то двойной интеграл существует.*

Теорема 2. *Если функция $f(P)$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве D, за исключением конечных разрывов (скачков) на конечном числе гладких кривых, то двойной интеграл существует.*

Теорема 3 (о среднем)**.** *Если функция $f(P)$ непрерывна в ограниченной замкнутой и связной области D, то найдется точка $M \in D$ такая, что выполнится равенство*

$$\iint\limits_D f(P)\, dS = f(M)D.$$

Доказательство см. в Приложении[1)].

3 Вычисление в декартовых координатах

Область D на плоскости xOy будем называть ***правильной в направлении оси*** l, если каждая прямая, проходящая через внутреннюю точку области па-

раллельно этой оси, пересекает границу области ровно в двух точках. На рис. 4 показаны правильная и неправильная области в направлении некоторой оси l.

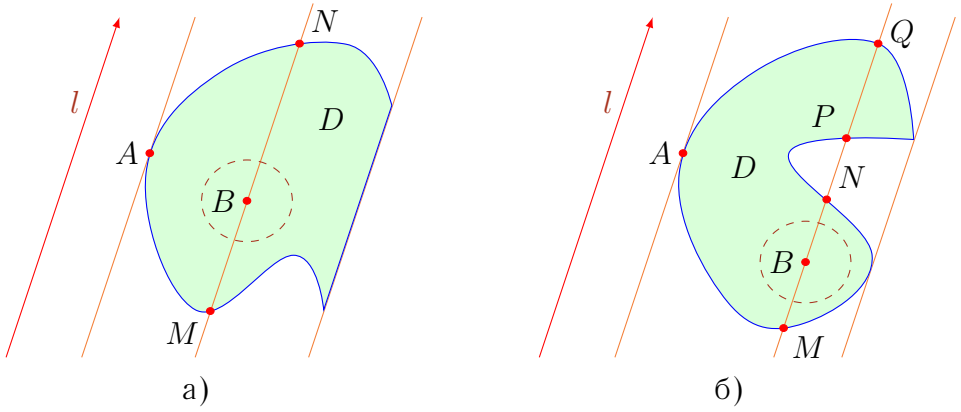


Рис. 4. Область в направлении l: а) правильная, б) неправильная.

Если область D правильна в направлении оси Oy, ее можно представить в виде, показанном на рис. 5, а): $a \le x \le b$, $\varphi(x) \le y \le \psi(x)$. Понятно, что верхняя и нижняя границы области однозначно проектируются в отрезок $[a, b]$.

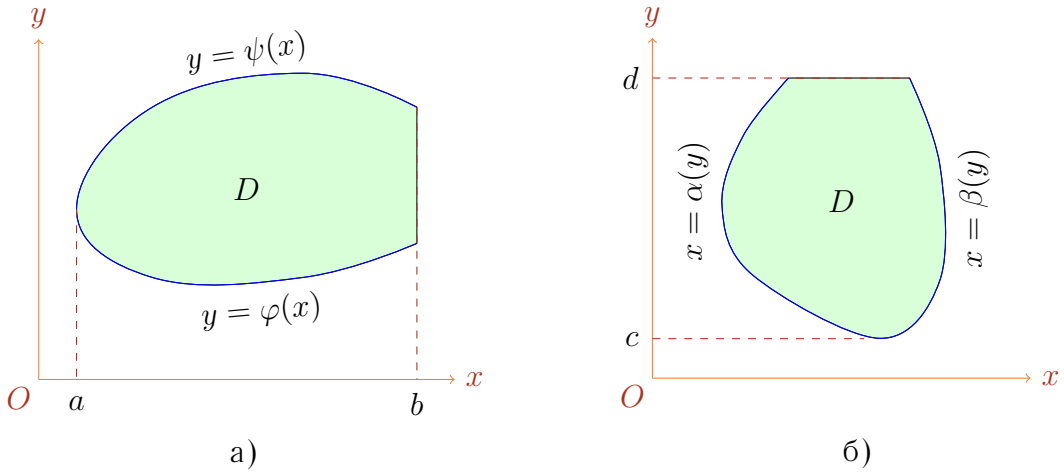


Рис. 5. Область правильная в направлении а) Oy, б) Ox.

Если обозначить

$$\Phi(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy, \tag{4}$$

то для такой области двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(P)\, dS = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy \right] dx = \int_a^b \Phi(x)\, dx, \tag{5}$$

если все входящие в формулу интегралы существуют.

Интеграл в середине формулы называется ***повторным***. Чтобы его найти, вначале вычисляют внутренний интеграл по y, временно считая x постоянным,

а затем находят внешний интеграл по x. Заметим, что часто для простоты повторный интеграл обозначают так:

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy \right] dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy.$$

Вычисленный внутренний интеграл переносят под знак интеграла по x, ставя перед dx. Это позволяет упростить выражение на пару скобок, так что формулу (5) теперь можно переписать в виде

$$\boxed{\iint\limits_D f(P)\, dS = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy.} \tag{6}$$

Доказательство сведéния двойного интеграла к повторному приведено в Приложении[2)].

Если область не является правильной в направлении оси Oy, она может оказаться правильной в направлении оси Ox, рис. 5, б). Тогда она задается неравенствами $c \le y \le d$, $\alpha(y) \le x \le \beta(y)$, а ее левая и правая границы однозначно проектируются в отрезок $[c,d]$. В этом случае двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\boxed{\iint\limits_D f(P)\, dS = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\, dx.} \tag{7}$$

В повторном интеграле теперь вначале выполняется интегрирование по x, а затем — по y.

Пример 1. *Найти объем тела, ограниченного поверхностями* $z = 0$, $y + z = 1$, $y = x^2$.

Решение. На рис. 6 изображено тело и его проекция на плоскость xOy в область D. Видно, что последняя является правильной в направлении Oy и описывается неравенствами: $a = -1 \le x \le 1 = b$, $\varphi(x) = x^2 \le y \le 1 = \psi(x)$. Поэтому, чтобы получить искомый объем тела, воспользуемся формулой (6):

$$V = \iint\limits_D (1-y)\, dS = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (1-y)\, dy = \int_{-1}^1 \left(y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^1 dx =$$

$$= \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \right) \Big|_{-1}^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \right) = \frac{8}{15}.$$

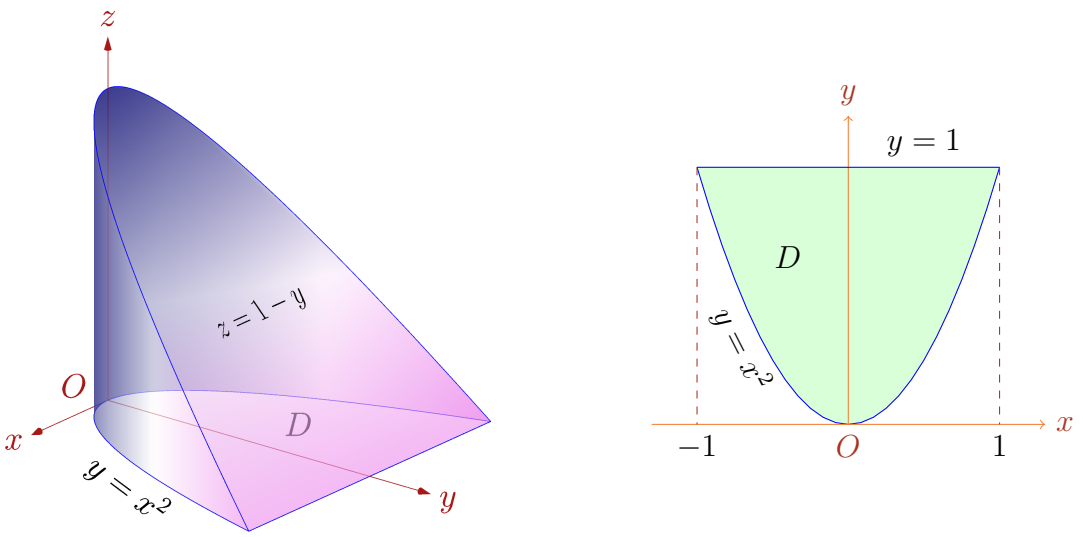
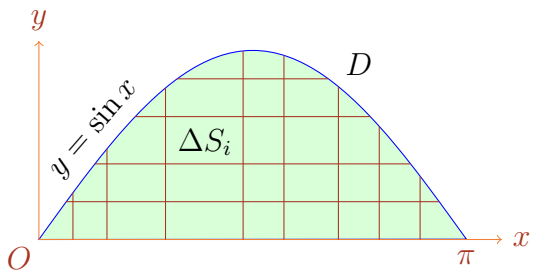


Рис. 6. К примеру 1.

Пример 2. *На тонкой пластинке* $D = \{(x, y) : 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \sin x\}$ *распределен электрический заряд с поверхностной плотностью* $\gamma = x + 6y$. *Найти полный заряд* q *пластинки.*

Решение. Разобьем пластинку вертикальными и горизонтальными отрезками на ячейки ΔS_i. Считая поверхностную плотность заряда приближенно постоянной в пределах каждой ячейки ΔS_i и равной $\gamma(P_i)$, где $P_i(x_i, y_i)$ — произвольная точка ΔS_i, получим, что заряд ячейки приближенно равен $\gamma(P_i)\Delta S_i$, а полный заряд пластинки выражается приближенной формулой

$$q \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(P_i)\Delta S_i,$$



где n — число ячеек разбиения. В правой части формулы стоит интегральная сумма для двойного интеграла, причем ее интегральный предел существует в силу того, что поверхностная плотность заряда является непрерывной функцией, а область D имеет кусочно гладкую границу. В результате перехода к интегральному пределу находим точное выражение для полного заряда пластинки, записанное с помощью двойного интеграла:

$$q = \iint\limits_D \gamma(P)\, dS.$$

В данном случае

$$q = \iint\limits_D (x + 6y)\, dS = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} (x + 6y)\, dy = \int_0^{\pi} (xy + 3y^2)\Big|_0^{\sin x} dx =$$

$$= \int_0^{\pi} x \sin x\, dx + 3\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx =$$

$$= \langle u = x,\ dv = \sin x\,dx,\ du = dx,\ v = -\cos x\rangle =$$
$$= -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\,dx + \frac{3}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx =$$
$$= \pi + \sin x\Big|_0^{\pi} + \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi} = \pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}.$$

Пример 3. *Вычислить двойной интеграл от функции $f(x,y) = xy^2$ по области D, показанной на рис. 7.*

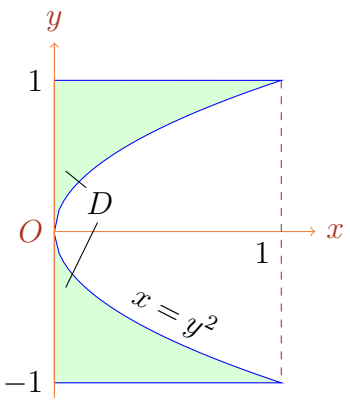


Рис. 7. К примеру 3.

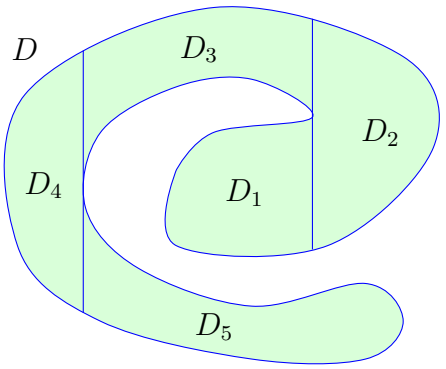


Рис. 8.

Решение. Область D является правильной в направлении Ox, поэтому интегрируем по формуле (7):

$$\iint\limits_D xy^2\,dS = \int_{-1}^{1} dy \int_0^{y^2} xy^2\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^2y^2}{2}\Big|_0^{y^2} dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} y^6 dy =$$
$$= \frac{y^7}{14}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{14} + \frac{1}{14} = \frac{1}{7}.$$

□

Если область D не является правильной ни в направлении Ox, ни в направлении Oy (рис. 8), ее стараются разбить на конечное число областей, правильных в одном из этих направлений, а затем применяют свойство 4 из общих свойств интегралов.

В Приложении показано, какие возможности предоставляет *Mathematica* для вычисления двойных интегралов[3)].

Приложение

1) В силу непрерывности функции $f(P)$ на ограниченном замкнутом множестве D в этом множестве найдутся точки P_1 и P_2, в которых функция $f(P)$ достигает своего наименьшего и наибольшего значения†:

$$f(P_1) \le f(x) \le f(P_2), \quad x \in D.$$

Тогда из общих свойств интегралов следует, что

$$\iint\limits_D f(P_1)\,d\mu \le \iint\limits_D f(P)\,d\mu \le \iint\limits_D f(P_2)\,d\mu,$$

или

$$f(P_1)D \le \iint\limits_D f(P)\,d\mu \le f(P_2)D.$$

Следовательно, число

$$C = \frac{1}{D}\iint\limits_D f(P)\,d\mu, \quad D \ne 0,$$

находится между наименьшим и наибольшим значениями функции $f(P)$на множестве D. Поскольку непрерывная функция на связном ограниченном и замкнутом множестве принимает все свои промежуточные значения, то в D найдется такая точка M, что выполнится равенство $f(M) = C$, т. е.

$$f(M) = \frac{1}{D}\iint\limits_D f(P)\,d\mu.$$

Тем самым теорема доказана.

2)Чтобы обосновать формулу (6) для функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$, и функции $f(P)$, непрерывной на D, докажем сначала три утверждения.

Лемма П1. *При $a < c < b$ справедливо равенство*

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\ dy = \int_a^c dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\ dy + \int_c^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\ dy.$$

Доказательство. Справедливость утверждения вытекает из соответствующего свойства определенного интеграла для функции (4).

Лемма П2. *Пусть при сделанных предположениях функция $\chi(x)$ также непрерывна на отрезке $[a, b]$ и, кроме того, $\varphi(x) \le \chi(x) \le \psi(x)$. Тогда*

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\ dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\chi(x)} f(x,y)\ dy + \int_a^b dx \int_{\chi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\ dy. \qquad (\text{П1})$$

Доказательство. Обозначим $\Psi(x, y)$ какую-нибудь первообразную функции $f(x, y)$ по переменной y при фиксированном x. Применяя формулу Ньютона-Лейбница к левой и правой частям равенства (П1), убедимся в том, что эти части приводятся к одному и тому же выражению и, следовательно, равны. Левая часть:

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\ dy = \int_a^b \left[\Psi(x, \psi(x)) - \Psi(x, \varphi(x))\right] dx.$$

†Лекция «Частные производные».

Правая часть:

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\chi(x)} f(x,y)\ dy + \int_a^b dx \int_{\chi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\ dy =$$

$$= \int_a^b [\Psi(x,\chi(x)) - \Psi(x,\varphi(x))]\, dx + \int_a^b [\Psi(x,\psi(x)) - \Psi(x,\chi(x))]\, dx =$$

$$= \int_a^b [\Psi(x,\psi(x)) - \Psi(x,\varphi(x))]\, dx.$$

Теорема П1 (о среднем для повторного интеграла)**.** *Найдется точка $M \in D$ такая, что*

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\ dy = f(M)\, D.$$

Доказательство. Теорема доказывается точно так же, как теорема о среднем для двойного интеграла. □

Перейдем теперь непосредственно к доказательству формулы (6).

Разобьем область D, правильную в направлении оси Oy, на ячейки, используя произвольные вертикальные прямые $x = c_0 = a$, $x = c_1, \ldots, x = c_m = b$, $c_{i-1} < c_i$, $i = \overline{1,m}$, и произвольные кривые $y = \varphi_0(x)$, $y = \varphi_1(x), \ldots, y = \varphi_k(x) = \psi(x)$, $\varphi_{j-1}(x) < \varphi_j(x)$, $j = \overline{1,k}$, так, чтобы каждая ячейка ΔS_{ij} описывалась неравенствами $c_{i-1} < c_i$, $\varphi_{j-1}(x) < \varphi_j(x)$. Всего у нас получится $n = mk$ ячеек (рис. 9).

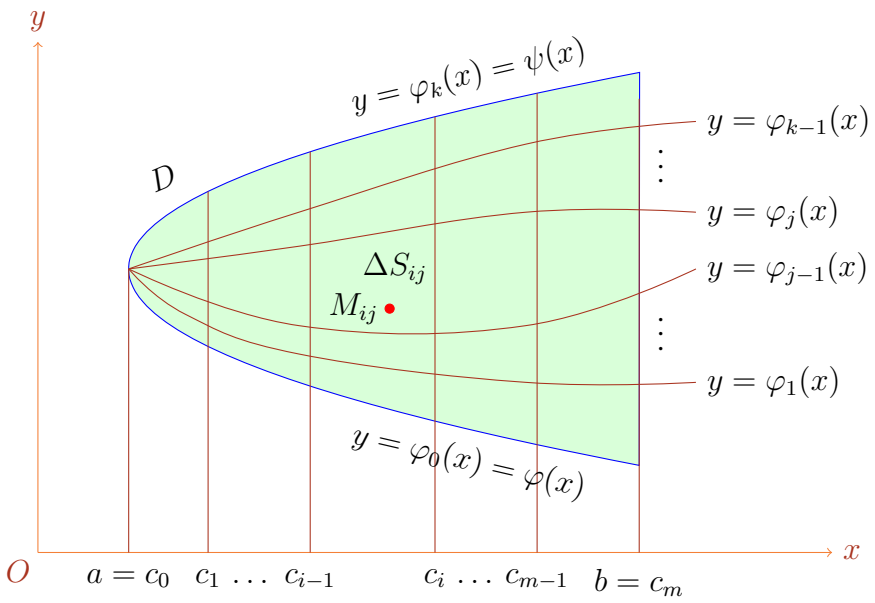


Рис. 9.

Обозначим повторный интеграл

$$I = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\ dy$$

и заметим, что в соответствии с доказанными леммами

$$I = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\ dy = \sum_{i=1}^{m} \int_{c_{i-1}}^{c_i} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\ dy = \qquad (П2)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \int_{c_{i-1}}^{c_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_i(x)} f(x,y)\ dy.$$

В силу теоремы о среднем значении для повторного интеграла в каждой ячейке ΔS_{ij} найдется такая точка M_{ij}, что будет справедливо равенство

$$\int_{c_{i-1}}^{c_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_i(x)} f(x,y)\ dy = f(M_{ij})\,\Delta S_{ij}.$$

Следовательно, формулу (П2) можно переписать в виде:

$$I = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} f(M_{ij})\,\Delta S_{ij}.$$

Перейдем к интегральному пределу, учитывая, что в левой части стоит постоянная величина, а правая часть представляет собой интегральную сумму для двойного интеграла:

$$I = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max d(\Delta S_{ij})\to 0}} I = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max d(\Delta S_{ij})\to 0}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} f(M_{ij})\,\Delta S_{ij} = \iint\limits_{D} f(M)\,dS.$$

[3)] Рассмотрим применение системы *Mathematica* для вычисления двойных интегралов на примерах, решенных на лекции.

Во-первых, можно использовать известный вам оператор `Integrate`, в котором подынтегральная функция будет уже иметь два аргумента, а пределы интегрирования для одной из переменных также станут переменными. Вот как это будет выглядеть:

```
Integrate[1 - y,{x,-1,1},{y,x^2,1}]
```

$$\frac{8}{15}$$

Второй способ заключается в том, что мы записываем повторный интеграл с помощью символа интегрирования, выщелкиваемого из палитры инструментов:

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{1}(1-y)\,dy\right)dx$$

$$\frac{8}{15}$$

Mathematica 10.0 включила в свой инструментарий поддержку геометрических областей, которая заключается, в частности, в том, что при вычислении двойного интеграла не надо переходить к повторному интегралу, явно выписывая пределы интегрирования. Достаточно с помощью системы неравенств просто указать область интегрирования. Таким образом, имеем третий способ вычисления двойного интеграла:

```
ℛ = ImplicitRegion[-1≤ x ≤ 1 && x^2 ≤ y ≤ 1,{x,y}];
Integrate[1 - y,{x,y} ∈ ℛ]
```

$$\frac{8}{15}$$

Оператор `ImplicitRegion` задает область с помощью формул. Записи можно придать более традиционный вид, если использовать знак интеграла, набрав `Esc int Esc`, а затем создав поле ввода с помощью `Ctrl + $`. В это поле следует ввести выражение $(x,y) \in \mathcal{R}$, причем,

знак принадлежности множеству следует либо выщелкнуть из палитры инструментов, либо набрать `Esc el Esc`. Получится следующее:

$$\int_{\{x,y\}\in\mathcal{R}} (1-y)$$

$$\frac{8}{15}$$

Приведем еще один пример, демонстрируя вычисление двойного интеграла как в предыдущих версиях системы *Mathematica*, так и в ее 10-й версии:

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{y^2} xy^2 dy\right) dx$$

$$\frac{1}{7}$$

```
reg = ImplicitRegion[0 ≤ x ≤ y^2 && -1 ≤ y ≤ 1,{x,y}];
```

$$\int_{\{x,y\}\in reg} xy^2$$

$$\frac{1}{7}$$

Далее рассмотрим, как с помощью системы *Mathematica* можно изобразить цилиндроид. Это бывает необходимо для того, чтобы визуально представить себе подынтегральную функцию и область интегрирования для двойного интеграла. Заодно познакомимся с приближенным способом вычисления двойных интегралов.

Пусть, например, требуется вычислить интеграл

$$\iint\limits_{D} (4+\sqrt{35-0{,}7(x-1)^2-y^2})\, dS,$$

где

$$D=\{(x,y):(23+3x)y^2\le 12(36-(x-1)^2)\}.$$

Для изображения подынтегральной функции выберем оператор

$$\texttt{RegionPlot3D[pred,\{x,x}_{\texttt{min}}\texttt{,x}_{\texttt{max}}\texttt{\},\{y,y}_{\texttt{min}}\texttt{,y}_{\texttt{max}}\texttt{\},\{z,z}_{\texttt{min}}\texttt{,z}_{\texttt{max}}\texttt{\}]}$$

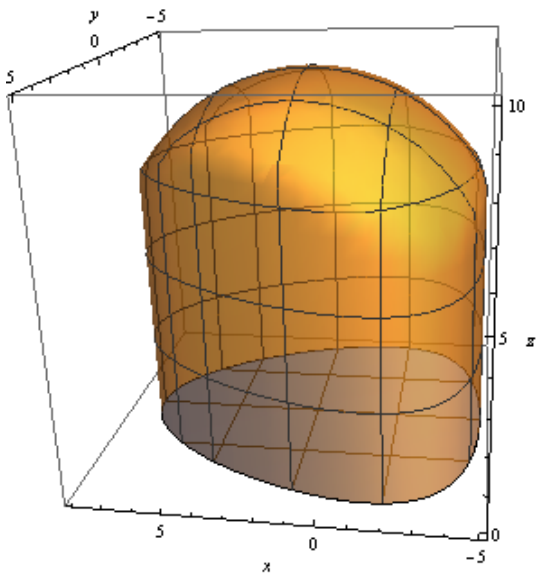
в котором `pred` является любой логической комбинацией неравенств, определяющих изображаемый объект, а все остальное — переменные и диапазоны их изменений.

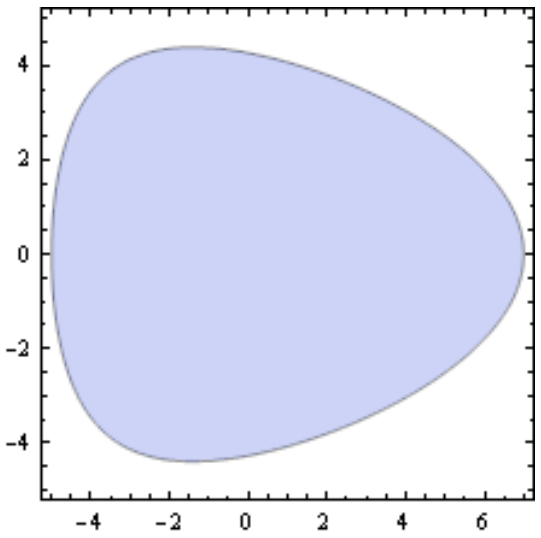
Объявим подынтегральную функцию:

$$\texttt{f[x_,y_] := } 4+\sqrt{35-0.7(x-1)^2-y^2};$$

и построим ее график с помощью упомянутого оператора, а область интегрирования — с помощью уже известного вам оператора `RegionPlot`:

```
RegionPlot3D[(23 + 3x) y^2 ≤ 12(36 - (x - 1)^2) && z ≥ 0 && z ≤ f[x,y],{x,-5,8},
    {y,-5,5},{z,0,10},AxesLabel → {x,y,z},PlotPoints → 20,Mesh → 3,
    PlotStyle → Directive[Opacity[0.6]],ViewPoint → {-1.1,2,1.1}]
RegionPlot[(23 + 3x)y^2 ≤ 12(36 - (x - 1)^2),{x,-5,7},{y,-5,5}]
```





Разрешив уравнение границы области интегрирования относительно переменной y, найдем объем этого цилиндроида с помощью численного интегрирования, применив знакомый вам оператор `NIntegrate` к функции двух аргументов:

$$\texttt{NIntegrate}\left[\texttt{f[x,y],\{x,-5,7\}},\left\{\texttt{y},-\sqrt{\frac{12(36-(\mathrm{x}-1)^2)}{23+3\mathrm{x}}},\sqrt{\frac{12(36-(\mathrm{x}-1)^2)}{23+3\mathrm{x}}}\right\}\right]$$

```
713.266
```

Mathematica 10.0 позволяет численно интегрировать по области, не обращаясь к повторному интегралу:

```
reg = ImplicitRegion[(23 + 3x) y^2 ≤ 12(36 - (x - 1)^2) && -5 ≤ x ≤ 7, {x, y}];
NIntegrate[f[x, y], {x, y} ∈ reg]
713.266
```

В случае неявно заданной области как раз и проявляется удобство вычисления двойного интеграла с помощью нового инструментария системы *Mathematica* 10.0: нам не приходится отыскивать уравнения границы области в явном виде.

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного* . — М.: Наука, 1985, — с. 135-163.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* — М.: Рольф, 2000. Ч. 2. — с. 57—63.