Анализ поведения функции

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Выпуклость функции. Необходимые и достаточные условия выпуклости. Точки перегиба. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

Анимация понятий выпуклости функции и точки перегиба.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Исследование функций в системе *Mathematica*.

29 января 2013 г.

Мы уже знаем, как с помощью дифференциального исчисления находить интервалы монотонности функции и ее экстремумы. Остается познакомиться с понятием выпуклости и научиться находить асимптоты, чтобы провести детальное исследование функции и грамотно построить ее график или хотя бы его эскиз. Впрочем, этот эскиз будет весьма содержательным; глядя на него можно будет достаточно подробно представить себе все особенности поведения данной функции при изменении ее аргумента.

1 Выпуклость функции

Дифференцируемая в интервале (a, b) функция называется ***выпуклой вниз*** (***вверх***) в этом интервале, если для любой точки $x \in (a, b)$ график функции лежит выше (ниже) касательной в этой точке, см. рис. График выпуклой вниз (вверх) функции также называется выпуклым вниз (вверх). Более общее определение выпуклости дано в Приложении[1)].

На анимационном рис. 1 функция выпукла вниз в интервалах (x_1, x_2), (x_3, b) и выпукла вверх в интервалах (a, x_1), (x_2, x_3). Обратите внимание, что при движении касательной, соответствующем первым двум интервалам, она все время находится под графиком функции (голубой цвет), а для двух других интервалов — над графиком (зеленый цвет).

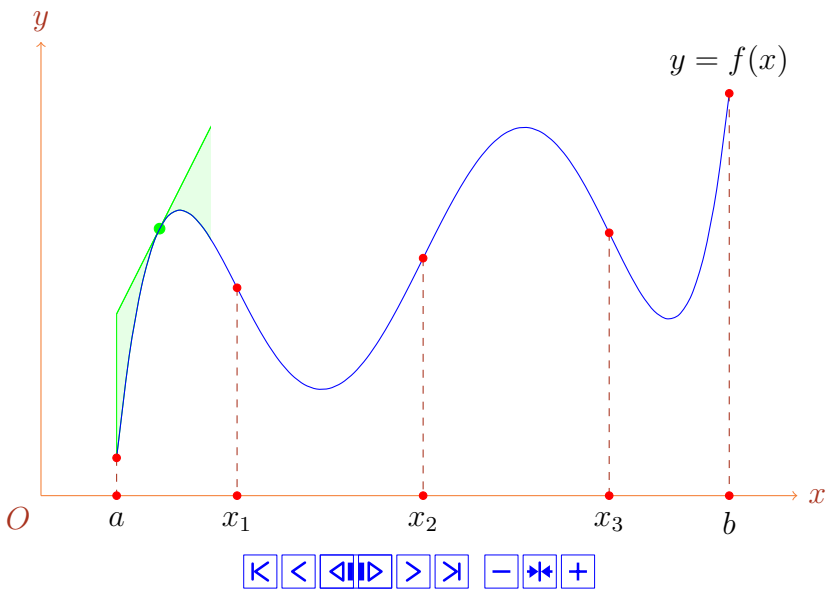


Рис. 1. Выпуклость функции.

Пусть $x_0 \in (a, b)$, тогда уравнение касательной в этой точке имеет вид $\overline{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Если функция $y = f(x)$ выпукла вниз, то $\overline{y} \leq y$, или

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x), \ x \in (a, b); \tag{1}$$

в случае выпуклости вверх справедливо противоположное неравенство.

Теорема 1. *Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в интервале (a, b), то она выпукла вниз (вверх) тогда и только тогда, когда в этом интервале*

$$f''(x) \geq 0 \quad (f''(x) \leq 0).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема и выпукла вниз в интервале (a, b). Покажем, что ее производная $f'(x)$ не убывает в этом интервале. Возьмем $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$. В силу (1) справедливы неравенства

$$f'(x_1)(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1),$$
$$f'(x_2)(x_1 - x_2) \leq f(x_1) - f(x_2).$$

Складывая их, получаем

$$[f'(x_1) - f'(x_2)](x_2 - x_1) \leq 0.$$

Так как $x_1 < x_2$, то $f'(x_1) - f'(x_2) \leq 0$, или $f'(x_1) \leq f'(x_2)$. Значит, производная $f'(x)$ не убывает на (a, b). Но тогда из необходимого условия монотонности функции[†] получаем, что $f''(x) \geq 0$.

[†]Лекция «Экстремумы функции».

Достаточность. Пусть теперь в интервале (a, b) вторая производная функции неотрицательна. Составим разность ординат функции и ее касательной в точке $x_0 \in (a, b)$:

$$y - \overline{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0),\ x \in (a, b).$$

По теореме Лагранжа для отрезка с концами x, x_0 получаем, что

$$y - \overline{y} = f'(c_1)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = [f'(c_1) - f'(x_0)](x - x_0),$$

$c \prec x, x_0$. Применим теорему Лагранжа еще раз, теперь к функции $f'(x)$ и отрезку с концами c_1 и x_0:

$$y - \overline{y} = f''(c_2)(c_1 - x_0)(x - x_0), \tag{2}$$

$c_2 \prec c_1, x_0$.

Пусть $x < x_0$, тогда $x < c_1 < c_2 < x_0$ и, значит, правая часть неравенства (2) неотрицательна, из чего следует, что $y \geq \overline{y}$. При $x > x_0$ имеем $x > c_1 > c_2 > x_0$ и снова $y \geq \overline{y}$. Это означает, что ординаты графика функции располагаются выше соответствующих ординат касательной и, следовательно, функция $f(x)$ выпукла вниз.

Аналогично доказывается теорема для случая выпуклой вверх функции. □

Точка x_0 называется ***точкой перегиба*** функции, если в этой точке функция непрерывна и при переходе x через x_0 функция изменяет тип выпуклости.

На рис. 1 точками перегиба являются точки x_1, x_2 и x_3. Касательная при прохождении аргументом этих точек приобретает красный цвет.

Теорема 2 (Необходимое условие существования точки перегиба)**.** *Пусть x_0 — точка перегиба дважды дифференцируемой в окрестности этой точки функции $y = f(x)$. Тогда $f''(x_0) = 0$.*

Доказательство. По теореме 1 при переходе x через точку x_0 слева направо вторая производная функции меняет свой знак на противоположный. В соответствии с достаточным условием экстремума первая производная $f'(x)$ имеет в точке x_0 экстремум. Тогда из необходимого условия экстремума следует, что $f''(x_0) = 0$.

Теорема 3 (Достаточное условие существования точки перегиба)**.** *Пусть функция $y = f(x)$ такова, что*

$$f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0,$$

$f^{(n+1)}(x)$ непрерывна в точке x_0, $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ и n — четно. Тогда x_0 — точка перегиба функции $y = f(x)$.

Доказательство. Условия теоремы позволяют заключить, что формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $y = f(x)$ в данном случае будет иметь вид

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},\ c \prec x, x_0,$$

или

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Так как $n+1$ нечетно, то при переходе x через x_0 правая часть равенства будет изменять знак на противоположный. Значит, и левая часть будет вести себя так же. Поэтому график функции будет располагаться то над, то под касательной к графику функции в зависимости от того, справа или слева от x_0 будет находиться x. □

Из доказанных утверждений следует, что функция может изменять тип выпуклости лишь в точке, в которой она не является дважды дифференцируемой, либо ее вторая производная в этой точке равна нулю. По аналогии с критическими точками функции такие точки называют ее ***критическими точками второго рода***. Точки перегиба, таким образом, являются подмножеством множества критических точек второго рода.

Пример 1. *Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции*

$$y = \begin{cases} x^{4/3}(x-2), & x \le 5/2; \\ 3 - (x-3)^2, & x > 5/2. \end{cases}$$

Решение. Найдем первую и вторую производные функции:

$$y' = \begin{cases} \frac{4}{3}x^{1/3}(x-2) + x^{4/3}, & x < 5/2; \\ -2(x-3), & x > 5/2; \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{3}x^{1/3}\left[4(x-2) + 3x\right], & x < 5/2; \\ -2(x-3), & x > 5/2; \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3}x^{1/3}(7x-8), & x < 5/2; \\ -2(x-3), & x > 5/2; \end{cases}$$

$$y'' = \begin{cases} \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^{-2/3}(7x-8) + 7x^{1/3}\right], & x < 5/2; \\ -2, & x > 5/2; \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{9}x^{-2/3}(7x - 8 + 21x), & x < 5/2; \\ -2, & x > 5/2; \end{cases} = \begin{cases} \frac{4(7x-2)}{9x^{2/3}}, & x < 5/2; \\ -2, & x > 5/2; \end{cases}$$

Вторая производная не существует в точках $x = 0$ и $x = 5/2$, а в точке $x = 2/7$ обращается в 0. Эти критические точки второго рода разбивают ось абсцисс на четыре интервала: $(-\infty; 0)$, $(0; 2/7)$, $(2/7; 5/2)$, $(5/2; \infty)$. Вычисляя значения y'' и определяя ее знак в каждом из них, получаем, что функция выпукла вверх в интервалах $(-\infty, 2/7)$ и $(5/2; \infty)$, а в интервале $(2/7; 5/2)$ – выпукла вниз. Этот результат оформим в виде небольшой таблички:

$$\overset{\cap}{(-\infty, 2/7)}, \quad \overset{\cup}{(2/7; 5/2)}, \quad \overset{\cap}{(5/2; \infty)}$$

В точке $x = 0$ вторая производная не существует, но при переходе x через эту точку функция, будучи непрерывной в этой точке, тип выпуклости не меняет, следовательно, точки перегиба при $x = 0$ нет.

При переходе через точку $x = 5/2$ функция меняет тип выпуклости, но в этой точке она разрывна, поэтому и эта точка не является точкой перегиба.

Единственной точкой перегиба оказывается точка $x = 2/7$, в которой и тип выпуклости меняется, и функция непрерывна.

Графики функции и ее производных см. на рис. 2.

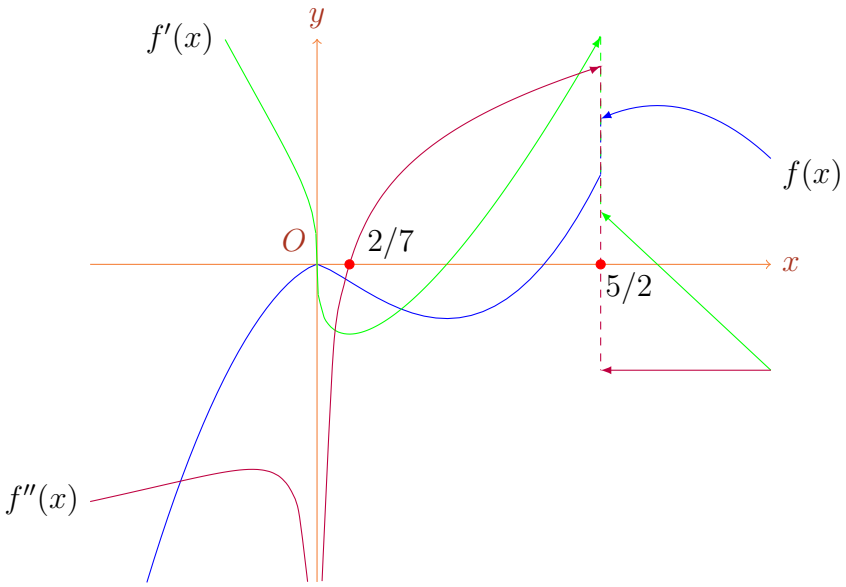


Рис. 2. К примеру 1.

2 Асимптоты графика функции

Асимптотой графика функции называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки графика до этой прямой стремится к нулю при движении точки вдоль графика к бесконечности.

Асимптоты бывают вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Асимптота называется ***вертикальной***, если она имеет уравнение $x = a$, причем, хотя бы один из пределов $\lim_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim_{x\to a+0} f(x)$ равен ∞ или $-\infty$. В этом случае расстояние $d(x)$ от прямой $x = a$ до точки $(x, f(x))$, принадлежащей графику функции, равно $|x - a| \to 0$ при $x \to a \pm 0$, так что вертикальная асимптота и график функции неограниченно сближаются, когда точка $(x, f(x))$ уходит в ∞ или $-\infty$.

Например, функция $y = \ln x$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, так как $\lim_{x\to 0+0} \ln x = -\infty$ (рис. 3, а)).

Асимптота называется ***горизонтальной***, если она имеет уравнение $y = b$, $b \in \mathbb{R}$, и выполняется хотя бы одно из равенств: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$

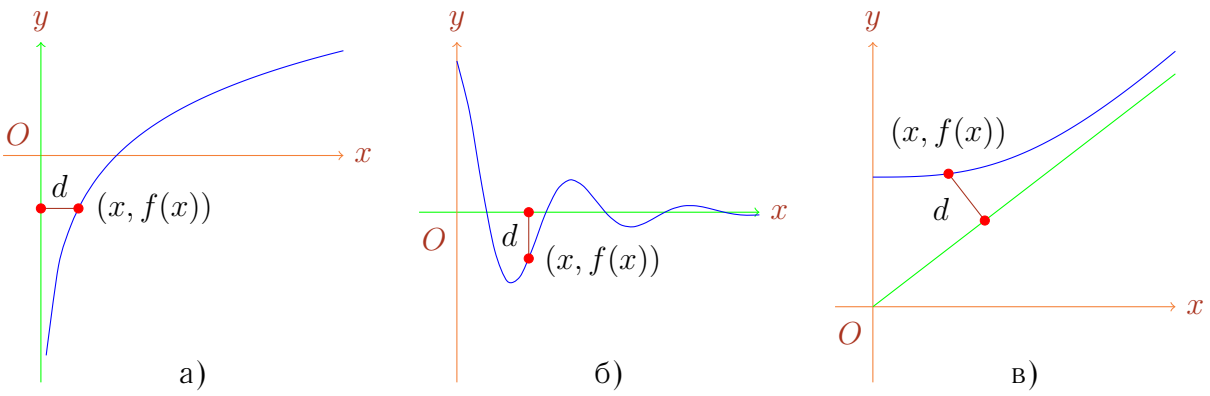


Рис. 3. Асимптоты: а) вертикальная, б) горизонтальная, в) наклонная.

или $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$. Расстояние $d(x)$ от прямой $y = b$ до точки $(x, f(x))$ равно $|f(x) - b| \to 0$ при $x \to -\infty \vee x \to \infty$, следовательно, горизонтальная асимптота и график функции при этих условиях неограниченно сближаются.

Функция $y = e^{-x}\sin x$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$, потому что $\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sin x = 0$ (рис. 3, б)).

Асимптота называется ***наклонной***, если она имеет уравнение $y = kx + b$ и справедливо хотя бы одно из равенств:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - kx - b] = 0, \text{ или } \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx - b] = 0. \tag{3}$$

Наклонная асимптота действительно является асимптотой, так как расстояние от точки $(x, f(x))$ на графике функции до прямой $kx - y + b = 0$, как известно из аналитической геометрии, выражается формулой

$$d(x) = \frac{|kx - f(x) + b|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Условие (3) равносильно тому, что $d(x) \to 0$ при $x \to -\infty \vee x \to \infty$.

Теорема 4. *График функции $y = f(x)$ тогда и только тогда имеет наклонную асимптоту, когда выполняется хотя бы одна пара равенств:*

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - kx];$$
$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx];\ k, b \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to \infty$. Тогда $\lim_{x\to\infty}[f(x) - kx - b] = 0$, и второе из равенств (4) выполнено. Кроме того, предел (3) можно представить в следующем виде: $\lim_{x\to\infty} x[f(x)/x - k - b/x] = 0$. Так как $x \to \infty$, то равенство предела нулю означает, что $\lim_{x\to\infty}[f(x)/x - k - b/x] = 0$. Поскольку $b/x \to 0$ при

$x \to \infty$, то $\lim_{x\to\infty}[f(x)/x - k] = 0$, или $k = \lim_{x\to\infty} f(x)/x$. Таким образом, оба равенства в (4) выполнены.

Достаточность. Пусть справедливы соотношения (4). Тогда второе из них означает, что $\lim_{x\to\infty}[f(x) - kx - b] = 0$. На основании определения наклонной асимптоты прямая $y = kx + b$ является таковой.

Случай $x \to -\infty$ доказывается аналогично. □

Функция $f(x) = \sqrt[3]{x^3+2}$ имеет наклонную асимптоту $y = x$ (рис. 3, в)) в силу того, что выполняются равенства

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3+2}{x^3}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{x^3+2}{x^3}} - 1}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1+2/x^3} - 1}{1/x} \overset{\text{Л.}}{=}$$

$$\overset{\text{Л.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-6/x^4}{-3\left(1+2/x^3\right)^{2/3}/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2\left(1+2/x^3\right)^{2/3}} = 0.$$

При поиске наклонной асимптоты может получиться $k = 0$, $b \in \mathbb{R}$. Это означает, что фактически найдена не наклонная, а горизонтальная асимптота.

3 Общая схема исследования функции

Применим полученные нами знания в области дифференциального исчисления к исследованию функции и построению ее графика с целью визуализации характерных ее особенностей: корней, участков знакопостоянства[†], участков монотонности, экстремумов, интервалов выпуклости, точек перегиба и асимптот.

Обычно исследование функции проводят придерживаясь следующего алгоритма.

1. Найти область определения и множество значений функции.

2. Исследовать функцию на четность.

3. Найти нули и точки разрыва функции, определить интервалы ее знакопостоянства.

4. Определить критические точки функции, интервалы ее монотонности и экстремумы.

5. Найти критические точки функции второго рода, интервалы ее выпуклости и точки перегиба.

6. Исследовать функцию на наличие асимптот.

7. Используя всю полученную информацию, построить график функции.

[†] Участок знакопостоянства — интервал, на котором функция либо только положительна, либо только отрицательна, т. е. сохраняет знак.

Рассмотрим применение этой схемы исследования функции на примерах.

Пример 2. *Исследовать функцию*

$$y = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

и построить ее график.

Решение. Функция существует на всей числовой оси, поэтому область ее определения имеет вид

$$X = (-\infty; \infty).$$

Множество значений функции найдем в ходе дальнейшего ее исследования.

Так как $f(-x) = f(x)$, то функция четна.

Нулями функции являются точки $x = -1$, $x = 1$, которые разбивают числовую ось на интервалы знакопостоянства:

$$\overset{\oplus}{(-\infty; -1)}, \quad \overset{\ominus}{(-1; 1)}, \quad \overset{\oplus}{(1, \infty)}$$

Символы в кружочках указывают знак функции в соответствующих интервалах.

Найдем производную функции:

$$y' = \frac{2x\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}(x^2 - 1)}{x^2 + 1} = \frac{x(2x^2 + 2 - x^2 + 1)}{(x^2+1)^{3/2}} = \frac{x(x^2+3)}{(x^2+1)^{3/2}}.$$

Производная обращается в 0 в точке $x = 0$, которая разбивает ось абсцисс на два интервала монотонности:

$$\overset{\searrow}{(-\infty; 0)}, \quad \overset{\nearrow}{(0; \infty)}$$

Из этой таблички видно, что $x = 0$ — точка минимума функции. Вычислим его значение: $y_{\min} = y(0) = -1$.

Найдем вторую производную функции:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(3x^2+3)(x^2+1)^{3/2} - 3x(x^2+1)^{1/2}(x^3+3x)}{(x^2+1)^3} = \\ &= \frac{(3x^2+3)(x^2+1) - 3x(x^3+3x)}{(x^2+1)^{5/2}} = \frac{\cancel{3x^4} + 3x^2 + 3x^2 + 3 - \cancel{3x^4} - 9x^2}{(x^2+1)^{5/2}} = \\ &= \frac{3(1-x^2)}{(x^2+1)^{5/2}}. \end{aligned}$$

Она имеет два нуля, $x = -1$ и $x = 1$, которые дают следующие интервалы выпуклости:

$$\overset{\cap}{(-\infty; -1)}, \quad \overset{\cup}{(-1; 1)}, \quad \overset{\cap}{(1, \infty)}$$

Мы видим, что нули второй производной являются точками перегиба функции и совпадают с нулями последней.

Перейдем к асимптотам. Вертикальных асимптот нет, так как нет точек разрыва функции. Вычислим параметры одной из наклонных асимптот:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - 1/x^2}{\sqrt{1 + 1/x^2}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+1}} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{1+1/x^2}} - x\right) =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-1}{x\left(\sqrt{1+1/x^2}-1\right)+x} - x\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+x} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{\frac{1}{2x}+x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x\left(x^2-1\right)}{2x^2+1} - x\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{-3x}{2x^2+1} = 0.$$

При вычислении b была использована эквивалентность б.м. $\sqrt[k]{a^k+s} - a \sim \frac{1}{k}a^{1-k}s$ при $s \to 0$[†]. Таким образом, график функции имеет наклонную асимптоту $y = x$ при $x \to \infty$. В силу четности функции имеется еще одна асимптота, симметричная первой относительно оси ординат: $y = -x$.

Поскольку функция непрерывна, в точке минимума равна -1, а при $x \to \pm\infty$ стремится к бесконечности, о чем говорит наличие асимптот, то множеством значений функции является полуинтервал

$$E = [-1; \infty).$$

Всю полученную о функции информацию сведем в таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; \infty)$
y	$\oplus$	0	$\ominus$	-1	$\ominus$	0	$\oplus$
y'	$\searrow$	$-$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-$	$\nearrow$
y''	$\cap$	0	$\cup$	$-$	$\cup$	0	$\cap$
Крит. точки	$-$	$\wr$	$-$	min	$-$	$\wr$	$-$

Значком $\wr$ здесь и далее в таблицах будет обозначаться точка перегиба.

Остается построить график функции (рис. 4).

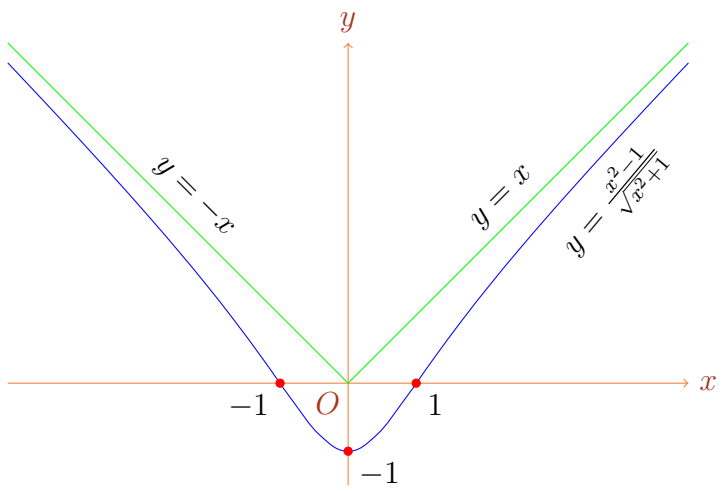


Рис. 4. К примеру 2.

[†]Лекция «Теоремы о пределах».

Пример 3. *Полуплоскость $y < 0$ заполнена землей. Тонкий проводник с током находится под землей перпендикулярно плоскости xOy, причем, $(0; y_0)$ — точка его пересечения с этой плоскостью, $y_0 < 0$. Модуль напряженности электрического поля на поверхности земли выражается формулой*

$$E = \frac{I}{\pi} \cdot \frac{|x|}{x^2 + y_0^2},\ y_0 \neq 0, \tag{5}$$

где I — ток в проводнике. Исследовать эту функцию и построить ее график.

Решение. Функция четна и существует на всей числовой оси, поэтому ее область определения: $X = (-\infty; \infty)$.

Из формулы (5) видно, что $E \geq 0$, причем, $E = 0$ при $x = 0$. Пусть $E > 0$ и $x > 0$. Решим уравнение (5) относительно x:

$$Ex^2 - \frac{I}{\pi}x + Ey_0^2 = 0,\ x_{1,2} = \frac{\frac{l}{\pi} \pm \sqrt{\frac{l^2}{\pi^2} - 4E^2y_0^2}}{2E}.$$

Мы видим, что значению E найдется соответствующее значение x только, если подкоренное выражение неотрицательно:

$$\frac{l^2}{\pi^2} - 4E^2y_0^2 \geq 0,\ E^2 \leq \frac{l^2}{4\pi^2y_0^2},\ E \leq -\frac{l}{2\pi y_0}.$$

В силу четности заданной функции такое заключение справедливо и для $x < 0$. Следовательно, множество значений функции выражается принадлежностью

$$E \in \left[0, -\frac{l}{2\pi y_0}\right].$$

Функция имеет единственный нуль: $x = 0$. Интервалы знакопостояенства:

$$\overset{\oplus}{(-\infty; 0)}, \quad \overset{\oplus}{(0, \infty)}$$

Найдем первую производную напряженности при $x > 0$:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{I}{\pi} \cdot \frac{x^2 + y_0^2 - 2x^2}{\left(x^2 + y_0^2\right)^2} = \frac{I}{\pi} \cdot \frac{y_0^2 - x^2}{\left(x^2 + y_0^2\right)^2}.$$

Производная при $x < 0$ будет от полученного выражения отличаться только знаком. Значит, при $x = 0$ правосторонняя производная будет равна $\frac{I}{\pi y_0^2}$, а левосторонняя — $-\frac{I}{\pi y_0^2}$. Следовательно, в нуле производная не существует. Эта точка, $x = 0$, и нули производной $x = \pm y_0$ разбивают ось абсцисс на следующие интервалы монотонности:

$$\overset{\nearrow}{(-\infty; y_0)}, \quad \overset{\searrow}{(y_0; 0)}, \quad \overset{\nearrow}{(0; -y_0)}, \quad \overset{\searrow}{(-y_0; \infty)}$$

Табличка показывает, что в точке $x = 0$ функция имеет минимум, причем, $y_{\min} = y(0) = 0$, а в точках $x = \pm y_0$ — максимумы, в которых функция равна $y_{\max} = y(\pm y_0) = -\frac{I}{2\pi y_0}$.

Найдем вторую производную функции:

$$\frac{d^2E}{dx^2} = \frac{I}{\pi} \cdot \frac{-2x\left(x^2 + y_0^2\right)^2 - 4x\left(y_0^2 - x^2\right)\left(x^2 + y_0^2\right)}{\left(x^2 + y_0^2\right)^4} =$$

$$= \frac{2I}{\pi} \cdot \frac{-x\left[x^2 + y_0^2 + 2\left(y_0^2 - x^2\right)\right]}{\left(x^2 + y_0^2\right)^3} = \frac{2I}{\pi} \cdot \frac{x\left(x^2 - 3y_0^2\right)}{\left(x^2 + y_0^2\right)^3}.$$

Точка $x = 0$, в которой вторая производная не существует, и ее нули $x = \pm\sqrt{3}y_0$ приводят к следующим интервалам выпуклости:

$$\overset{\cup}{\left(-\infty; \sqrt{3}y_0\right)}, \quad \overset{\cap}{\left(\sqrt{3}y_0; 0\right)}, \quad \overset{\cap}{\left(0; -\sqrt{3}y_0\right)}, \quad \overset{\cup}{\left(-\sqrt{3}y_0; \infty\right)}$$

Видно, что нули второй производной являются точками перегиба. Вычислим значения функции в этих точках: $y\left(\pm\sqrt{3}y_0\right) = -\frac{\sqrt{3}I}{4\pi y_0}$.

График функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$, так как

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{I}{\pi} \cdot \frac{|x|}{x^2 + y_0^2} = 0.$$

Четность функции позволяет ограничиться итоговой таблицей исследования функции только для $x \geq 0$:

x	0	$(0; -y_0)$	$-y_0$	$\left(-y_0; -\sqrt{3}y_0\right)$	$-\sqrt{3}y_0$	$\left(-\sqrt{3}y_0; \infty\right)$
y	0	$\oplus$	$-\frac{I}{2\pi y_0}$	$\oplus$	$-\frac{\sqrt{3}I}{4\pi y_0}$	$\oplus$
y'	$-$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-$	$\searrow$
y''	$-$	$\cap$	$-$	$\cap$	0	$\cup$
Крит. точки	min	$-$	max	$-$	$\wr$	$-$

Строим график функции (рис. 5).

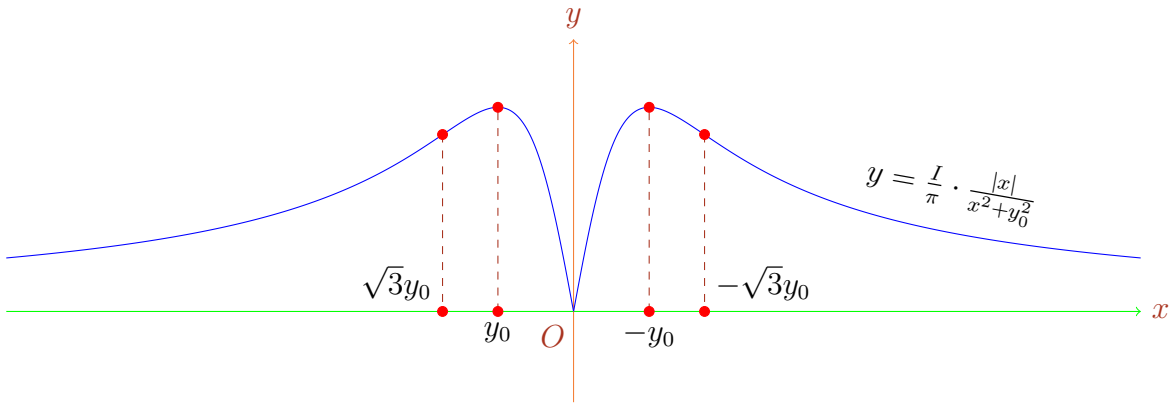


Рис. 5. К примеру 3.

Анализируя выражения для точек максимума и самих максимумов, делаем вывод, что, чем глубже под землей находится провод, тем меньше максимум напряженности E на поверхности Земли и тем дальше в стороны от провода располагаются эти максимумы. □

В Приложении[2)] можно ознакомиться с примерами использования системы *Mathematica* для анализа поведения функции и построения ее графика.

Приложение

[1)] Более общее понятие выпуклости функции не связано с ее дифференцируемостью, а, значит, и с касательной. Вместо касательной используют секущую графика функции.

Функция $y = f(x)$, определенная в интервале (a, b), называется ***выпуклой вниз*** в этом интервале, если

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \tag{П1}$$

для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Поменяв знак неравенства на противоположный, получим определение ***выпуклой вверх*** функции.

Лемма П1. *Точка x тогда и только тогда принадлежит отрезку $[x_1, x_2]$, когда*

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,\ \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $x \in [x_1, x_2]$. Обозначим $\alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$, $\alpha_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Очевидно, что $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Тогда

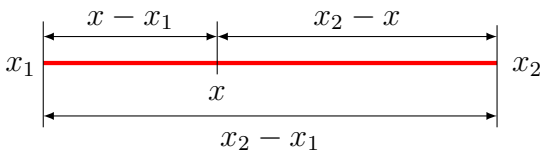
$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2 = \frac{\cancel{x_1 x_2} - x x_1 + x x_2 - \cancel{x_1 x_2}}{x_2 - x_1} = x \frac{\cancel{x_2 - x_1}}{\cancel{x_2 - x_1}} = x.$$

Достаточность. Пусть $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, $x_1 < x_2$. Тогда

$$x_1 = (\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1 \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \leq \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) x_2 = x_2.$$

Значит, точка x либо лежит между точками x_1, x_2, либо совпадает с одной из них, т. е. принадлежит отрезку $[x_1, x_2]$. □

Как следует из леммы, величины α_1 и α_2 в выражении $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ являются относительными расстояниями $\alpha_1 = (x_2 - x) / (x_2 - x_1)$ и $\alpha_2 = (x - x_1) / (x_2 - x_1)$ от точки x до точек x_2 и x_1, соответственно:



Геометрически выпуклость вниз (вверх) означает, что на любом отрезке $[x_1, x_2] \subset (a, b)$ график функции лежит ниже (выше) секущей, проходящей через точки $(x_1, f(x_1)$, $(x_2, f(x_2)$ этого графика. Действительно, неравенство (П1) означает, что в произвольной точке $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ отрезка $[x_1, x_2]$ ордината графика выпуклой вниз функции лежит ниже ординаты упомянутой секущей $\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$ (см. рис. 6), так как секущая как раз имеет уравнение

$$y = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

(проверяется подстановкой вместо x поочередно x_1 и x_2). Для выпуклой вверх функции рассуждения аналогичны.

Учитывая приведенные при доказательстве леммы выражения для α_1 и α_2, неравенство (П1) можно переписать в виде

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2),\ x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$

или после домножения на $x_2 - x_1$ — в виде

$$(x_2 - x)\ f(x_1) + (x_1 - x_2) f(x) + (x - x_1) f(x_2) \geq 0.$$

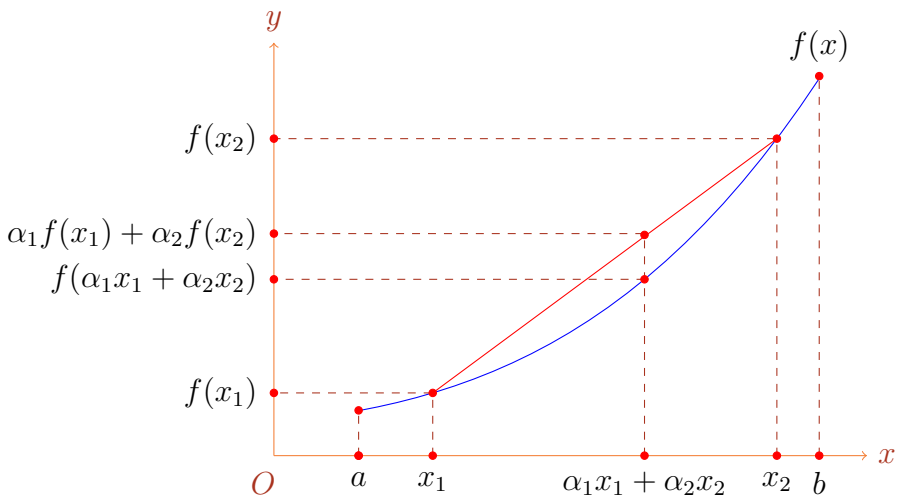


Рис. 6. Выпуклость вниз.

Так как $x_2 - x_1 = (x_2 - x) + (x - x_1)$, то из последнего неравенства получаем

$$(x_2 - x)\ f(x_1) - [(x_2 - x) + (x - x_1)]\, f(x) + (x - x_1)\, f(x_2) =$$
$$= (x - x_1)\,[f(x_2) - f(x)] - (x_2 - x)\,[f(x) - f(x_1)] \geq 0,$$

или

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},\ x \in [x_1, x_2] \subset (a, b)\,. \qquad (\text{П}2)$$

Это неравенство равносильно определению выпуклости вниз (П1).

Теорема П1. *Для того чтобы дифференцируемая в интервале (a, b) функция $y = f(x)$ была выпукла вниз (вверх) на нем, необходимо и достаточно, чтобы ее производная не убывала (не возрастала) на нем.*

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема и выпукла вниз в интервале (a, b). Тогда, устремляя в (П2) x последовательно к x_1 и x_2, придем к неравенству

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)\,,$$

которое свидетельствует о неубывании $f'(x)$.

Достаточность. Пусть производная функции $y = f(x)$ не убывает в (a, b). Тогда для $a < x_1 < x < x_2 < b$ по теореме Лагранжа

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1)\,,\ \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2)\,,$$

$x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2$. Поскольку производная не убывает, то $f'(c_1) \leq f'(c_2)$, и, значит, выполнено условие выпуклости вниз (П2). Случай выпуклости вверх доказывается аналогично.

Теорема П2. *Дифференцируемая в интервале (a, b) функция $y = f(x)$ выпукла вниз (вверх) на нем тогда и только тогда, когда для любой точки внутри интервала график функции лежит выше (ниже) касательной в этой точке.*

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема и выпукла вниз в интервале (a,b) и $x_0 \in (a,b)$. Вычтем из ординат графика функции ординаты касательной $\overline{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ и применим теорему Лагранжа:

$$f(x) - \overline{y}(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \\ = [f'(c) - f'(x_0)](x - x_0), \qquad (\text{П3})$$

$c \prec x, x_0$. Так как $f(x)$ выпукла, то по теореме П1 производная $f'(x)$ не убывает и знак разности $f'(c) - f'(x_0)$ совпадает со знаком разности $c - x_0$, а последний совпадает со знаком разности $x - x_0$. Это значит, что правая часть (П3) будет положительной для любого $x \in (a,b)$, так что $f(x) \geq \overline{y}(x)$ для всех $x \in (a,b)$.

Достаточность. Пусть $f(x) \geq \overline{y}(x)$ для всех $x \in (a,b)$. Тогда

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geq 0.$$

Из этого неравенства вытекают такие соотношения:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0), \ x < x_0; \qquad (\text{П4})$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0), \ x > x_0. \qquad (\text{П5})$$

Следовательно, если $x_1 < x < x_2$, $x_1, x, x_2 \in (a,b)$, то, заменив в (П4) x на x_1, а x_0 — на x, получим

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq f'(x);$$

а, заменив в (П5) x на x_2, а x_0 — на x, получим

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \geq f'(x).$$

Таким образом, приходим к неравенству (П2), которое эквивалентно выпуклости вниз функции $f(x)$. □

Доказанная теорема свидетельствует о том, что определение выпуклости дифференцируемой функции с помощью касательной, данное в начале лекции, является частным случаем определения выпуклости с помощью секущей для функции, не обязательно обладающей свойством дифференцируемости.

2) В простейших случаях интервалы выпуклости функции находят с помощью системы *Mathematica* так же, как и интервалы монотонности. Например, для функции, рассмотренной в примере 2, получаем

$$\texttt{Reduce}\left[\frac{3(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^{5/2}} \neq 0, x, \texttt{Reals}\right]$$

```
x < -1 || -1 < x < 1 || x > 1
```

Асимптоты определяют, используя оператор `Limit`. Для того же примера вычислим параметры наклонной асимптоты. Параметр k:

$$\texttt{Limit}\left[\frac{x^2 - 1}{x\sqrt{x^2 + 1}}, \ x \to \infty\right]$$

```
1
```

Параметр b:

$$\text{Limit}\left[\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+1}}-x,\ x\to\infty\right]$$

0

Рассмотрим возможности системы *Mathematica* для полного исследования функции и построения ее графика.

Пример П1. *Средствами системы Mathematica исследовать функцию*

$$y=\frac{x}{x^2-4}$$

и построить ее график.

Решение. Сначала зададим эту функцию в системе *Mathematica*:

$$f[x_] := \frac{x}{x^2-4}$$

Найдем ее интервалы знакопостоянства:

```
Reduce[f[x] ≠ 0,x,Reals]
x < -2 || -2 < x < 0 || 0 < x < 2 || x > 2
```

Mathematica нашла интервалы, на которые ось абсцисс разбивает нуль функции, $x=0$, и точки, в которых она не существует, $x=\pm 2$. Чтобы эти интервалы стали интервалами знакопостоянства, надо определить знаки функции в этих интервалах. Выполним следующий оператор:

```
Sign[f[{-3,-1,1,3}]]
{-1,1,-1,1}
```

Функция f здесь бралась от списка точек, взятых по одной из каждого интервала, в результате чего получался список значений функции в этих интервалах. Затем от этого списка бралась функция `Sign`, которая принимает значение -1, если ее аргумент отрицателен; 0, если он равен нулю; и 1 для положительного аргумента. В результате получился список $\{-1,1,-1,1\}$, в котором -1 означает, что функция в соответствующем интервале отрицательна, а 1 — что она положительна. Таким образом, можно считать, что интервалы знакопостоянства мы нашли.

Множество значений функции найдем, решая уравнение

```
Solve[y == f[x],x]
```

$$\left\{\left\{x\to\frac{1-\sqrt{1+16y^2}}{2y}\right\},\left\{x\to\frac{1+\sqrt{1+16y^2}}{2y}\right\}\right\}$$

Мы видим, что для любого значения y найдется соответствующее значение x. Значит, множеством значений функции является вся ось ординат.

Mathematica 10.0 на вопрос о множестве значений отвечает так:

```
FunctionRange[f[x],x,y]
True
```

что означает: множество значений — вся числовая ось Oy.

Проверим, будет ли функция нечетной:

```
Reduce[f[-x] == -f[x]]
True
```

Значит, функция нечетна.

Mathematica 10.0 может проверить, будет ли функция периодической:

```
FunctionPeriod[f[x],x]
0
```

Это означает, что период равен нулю, поэтому функция непериодична. Для периодической функции получается ненулевой период:

```
FunctionPeriod[1 + Sin[2 x − 3]^2,x]
```

$$-\frac{\pi}{2}$$

Далее берем производную заданной функции и упрощаем ее:

```
f′[x]//Simplify
```

$$-\frac{4+x^2}{(-4+x^2)^2}$$

Находим критические точки функции и интервалы, на которые эти точки разбивают ось абсцисс:

```
Reduce[f′[x] ≠ 0,x,Reals]
x < -2 || -2 < x < 2 || x > 2
```

Получаем знаки производной в интервалах монотонности:

```
Sign[f′[{-3,0,3}]]
{-1,-1,-1}
```

Так как во всех интервалах производная отрицательна, то функция убывает в каждом из них и экстремумы отсутствуют.

Возьмем вторую производную функции:

```
f″[x]//Simplify
```

$$-\frac{2x(12+x^2)}{(-4+x^2)^3}$$

Найдем критические точки второго рода и соответствующие им интервалы разбиения оси абсцисс:

```
Reduce[f″[x] ≠ 0,x,Reals]
x < -2 || -2 < x < 0 || 0 < x < 2 || x > 2
```

Вычислим знаки второй производной в интервалах выпуклости:

```
Sign[f″[{-3,-1,1,3}]]
{-1,1,-1,1}
```

В точках $x = \pm 2$ функция не существует, поэтому они не могут быть точками перегиба. В своем нуле $x = 0$ функция непрерывна и меняет при переходе через эту точку тип выпуклости. Следовательно, при $x = 0$ имеем точку перегиба.

Исследуем функцию на наличие асимптот. Найдем пределы слева и справа от точки разрыва функции $x = 2$:

```
Limit[f[x], x → 2, Direction → 1]
```

$$-\infty$$

```
Limit[f[x], x → 2, Direction → −1]
```

$$\infty$$

В силу нечетности функции такой же результат мы бы получили и для точки $x = -2$. Следовательно, функция имеет две вертикальные асимптоты: $x = -2$ и $x = 2$.

Проверим наличие горизонтальной асимптоты:

```
Limit[f[x]/x, x → ∞]
0
```

Итак, горизонтальная асимптота: $y = 0$.

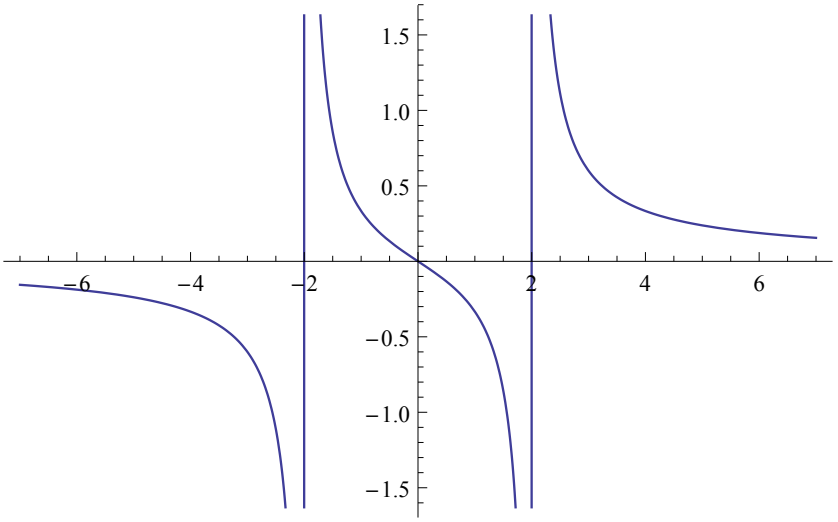
Позволим себе аккуратно оформить результаты исследования. Отойдем от нашего правила использовать в системе *Mathematica* только ячейки `Input` и `Output` и очередной ячейке назначим стиль `Text`. Затем выполним опции главного меню `Insert` → `Table/Matrix` → `New`. Появится диалоговое окно `Create Table/Matrix`, в котором в разделе `Make` (`Создать`) выберем `Table` (`Таблица`), установим `Number of rows` (`Число строк`) в 5, `Number of columns` (`Число столбцов`) в 8 и отметим галочками опции `Draw lines between rows`, (`Разлинеить между строками`), `Draw lines between columns`, (`Разлинеить между столбцами`), `Draw frame` (`Взять в рамку`). После этого нажмем `OK`.

У нас появится таблица, которую мы заполним полученной о функции информацией. Необходимые нам символы возьмем из палитры `Basic Math Assistant`:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; \infty)$
y	$\ominus$	$\mp\infty$	$\oplus$	0	$\ominus$	$\mp\infty$	$\oplus$
y'	$\searrow$	$-$	$\searrow$	$-$	$\searrow$	$-$	$\searrow$
y''	$\cap$	$-$	$\cup$	0	$\cap$	$-$	$\cup$
Крит. точки	$-$	$-$	$-$	$\wr$	$-$	$-$	$-$

Построим график функции:

```
Plot[f[x],{x,-7,7}]
```



Как видите, асимптоты *Mathematica* построила сама. □

Этот довольно простой пример был рассмотрен для того, чтобы представить примерный перечень операторов, который используется при исследовании функции, и примерный порядок проведения исследования. Однако не всегда удается получить в аналитическом виде

решения возникающих при исследовании функций уравнений. Особенно это характерно для приложений. Посмотрим, как можно использовать систему *Mathematica* в этом случае, прибегая к приближенным методам решения.

Пример П2. *Средствами системы Mathematica исследовать функцию*

$$y = \ln(x^2 - 1) + \frac{1}{x - 1}$$

и построить ее график.

Решение. Сначала зададим функцию:

```
f[x_] := Log[x^2 - 1] + 1/(x - 1)
```

Попытаемся найти область существования функции, применив оператор `Reduce`. Однако попытка оказывается неудачной. Придется конкретизировать, что же нам требуется:

```
Reduce[x^2 - 1 > 0 || x - 1 ≠ 0,x,Reals]
x < -1 || x > 1
```

Значит, область существования функции есть $X = (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.

Десятая версия системы *Mathematica* легко справляется с решенной нами задачей:

```
FunctionDomain[f[x],x]
x < −1 || x > 1
```

Найти корни функции аналитически тоже не удается, о чем сообщает оператор `Solve`. Довольствуемся приближенным решением:

```
NSolve[f[x] == 0,x,Reals]
{{x → -1.5732}}
```

Нуль функции обозначим $x_1 \approx -1{,}57$. Получим интервалы знакопостоянства:

```
Sign[f[{-2,-1.1,2}]]
{1,-1,1}
```

Наличие у функции лишь одного, не равного нулю, корня говорит о том, что функция не является четной либо нечетной.

Mathematica 10.0 сообщает, что множеством значений функции является вся ось ординат:

```
FunctionRange[f[x],x,y]
True
```

Возьмем первую производную:

```
f'[x]//Factor
```

$$\frac{-1 - 3x + 2x^2}{(-1 + x)^2(1 + x)}$$

С ее интервалами знакопостоянства оператор `Reduce` справляется:

```
Reduce[f'[x] ≠ 0,x,Reals]
N[%]
```

$$x < -1 \;||\; -1 < x < \frac{1}{4}(3 - \sqrt{17}) \;||\; \frac{1}{4}(3 - \sqrt{17}) < x < 1 \;||\; 1 < x < \frac{1}{4}(3 + \sqrt{17}) \;||\; x > \frac{1}{4}(3 + \sqrt{17})$$

```
x < -1. || -1. < x < -0.280776 || -0.280776 < x < 1.
    || 1. < x < 1.78078 || x > 1.78078
```

Мы получили и приближенные значения критических точек, так как это пригодится для построения графика. Найдем интервалы монотонности:

```
Sign[f'[-2,1.2,2]]
{-1,-1,1}
```

Как видим, точка $x_2 = \frac{1}{4}(3+\sqrt{17}) \approx 1{,}78$ является точкой минимума функции, причем, минимум приближенно равен

```
f[(3+√17)/4]//N
2.05604
```

Точное значение минимума тоже можно получить, но оно оказывается неудобоваримым.

Возьмем вторую производную:

```
f''[x]//Simplify
```

$$\frac{4+2x+4x^2-2x^3}{(-1+x)^3(1+x)^2}$$

Снова `Reduce` и `Solve` не могут найти нули, теперь уже второй производной. Обратимся к приближенным методам:

```
NSolve[f''[x] == 0,x,Reals]
{{x → 2.65897}}
```

Нуль второй производной обозначим $x_3 \approx 2{,}66$. Найдем интервалы выпуклости:

```
Sign[f''[{-2,2,3}]]
{-1,1,-1}
```

Видим, что x_2 является точкой перегиба. Вычислим в ней приближенное значение функции:

```
f[2.65897]
2.40616
```

Попробуем найти наклонные асимптоты:

```
Limit[f[x]/x, x → -∞]
0
Limit[f[x]/x, x → ∞]
0
```

Наклонных асимптот нет. Горизонтальных тоже:

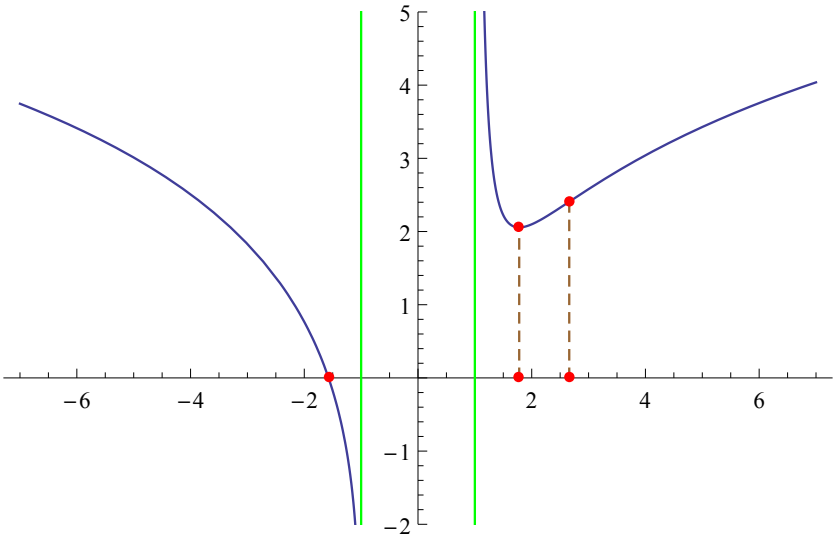
```
Limit[f[x], x → -∞]
∞
Limit[f[x], x → ∞]
∞
```

Построим итоговую таблицу:

x	$(-\infty;x_1)$	x_1	$(x_1;-1)$	$-1-0$	$1+0$	$(1;x_2)$	x_2	$(x_2;x_3)$	x_3	$(x_3;\infty)$
y	$\oplus$	0	$\ominus$	$-\infty$	∞	$\oplus$	$\approx 2{,}06$	$\oplus$	$\approx 2{,}41$	$\oplus$
y'	$\searrow$	–	$\searrow$	–	–	$\searrow$	0	$\nearrow$	–	$\nearrow$
y''	$\cap$	–	$\cap$	–	–	$\cup$	–	$\cup$	0	$\cap$
Крит. точки	–	–	–	–	–	–	min	–	≀	–

Изобразим график функции:

```
Plot[f[x],{x,-7,7},PlotRange → {-2, 5}, Epilog → {Green,
    Line[{{-1,-2},{-1,5}}],Line[{{1,-2},{1,5}}],Brown,Dashed,
    Line[{{1.78,0},{1.78,2.06}}],Line[{{2.66, 0},{2.66,2.41}}],Red,
    PointSize[Medium],Point[{{-1.57,0},{1.78,0},{1.78,2.06},{2.66,0},
    {2.66,2.41}}]}]
```



Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.* — М.: Наука, 1984, — с. 177-184, 186-190.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* — М.: Рольф, 2000. Ч. 1. — с. 176—181.