Уравнения в частных производных

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Уравнение в частных производных, его решение. Классификация уравнений второго порядка. Колебания струны, волновое уравнение, начальные условия. Бесконечная струна, решение волнового уравнения методом Даламбера. Закрепленная струна, граничные условия, решение волнового уравнения методом Фурье.

Анимация решений волнового уравнения.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Решение волнового уравнения в системе *Mathematica*.

7 апреля 2016 г.

Уравнения в частных производных являются расширением и обобщением обыкновенных дифференциальных уравнений, так же, как понятие функции нескольких переменных, является обобщением и развитием понятия функции одного аргумента, а понятие частной производной — понятия обыкновенной производной. В силу сказанного уравнения в частных производных, с одной стороны, могут описывать намного более сложные процессы, чем, например, обыкновенные дифференциальные уравнения, а, с другой, — как процесс решения уравнений, так и получаемое решение становятся гораздо более сложными. Тем не менее уравнения в частных производных интенсивно исследуются современной математикой, так как позволяют получать наиболее реалистичные модели современных физических и технологических процессов.

В области электротехники и электроники рассматриваемый тип уравнений позволяет изучать процессы многомерных колебаний, в том числе электромагнитных, процессы распространения тепла, решать задачи передачи сигналов и многое другое.

Что же это за уравнения? ***Уравнением в частных производных*** относительно неизвестных функций $u_1(x_1, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $u_m(x_1, \ldots, x_n)$ называется уравнение, в которое, кроме неизвестных функций, входят их частные

производные (хотя бы одна). Такое уравнение называется ***уравнением n-го порядка***, если оно содержит хотя бы одну производную n-го порядка хотя бы одной неизвестной функции. Несколько уравнений в частных производных образуют ***систему*** таких уравнений.

Уравнение с частными производными называется ***линейным***, если оно линейно относительно неизвестной функции и всех ее производных.

Решением уравнения в частных производных называется система функций, которая, будучи подставлена в уравнение вместо неизвестных функций, обращает это уравнение в тождество.

Мы ограничимся рассмотрением уравнений в частных производных с одной неизвестной функцией $u\left(x_1, \ldots, x_n\right)$:

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_n}, \ldots\right) = 0. \qquad (1)$$

Вот пример линейного уравнения второго порядка относительно неизвестной функции $u\left(x, y\right)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a\left(x, y\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2u,$$

где $a\left(x, y\right)$ — известная функция.

Чтобы получить представление о том, чем отличается решение уравнения в частных производных от решения обыкновенного дифференциального уравнения, рассмотрим совсем простое уравнение относительно неизвестной функции $u(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \qquad (2)$$

Ясно, что его решением может быть любая функция, не зависящая от x, т. е. решение имеет вид $u\left(x, y\right) = \varphi\left(y\right)$, где $\varphi\left(y\right)$ — произвольная функция y. Таким образом, в отличие от обыкновенного дифференциального уравнения, решение которого определяется с точностью до произвольной постоянной, решение уравнения в частных производных определяется с точностью до произвольной функции! Это кажется чересчур большой свободой для выбора решения, но только на первый взгляд! Как вы помните, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения сразу превращалось во вполне конкретную функцию, как только мы задавали начальные условия. В теории уравнений в частных производных задания только начальных условий обычно недостаточно для получения конкретного решения, надо еще иметь и так называемые граничные условия. Но при наличии и первых, и вторых можно получить вполне определенное решение, описывающее тот или иной процесс. «Слишком большая» свобода предоставляет замечательную возможность с помощью уравне-

ний в частных производных описывать и исследовать гораздо более сложные процессы, чем те, которые изучались до появления этих уравнений.

1 Классификация уравнений 2-го порядка

Рассмотрим уравнение второго порядка, линейное относительно старших производных неизвестной функции $u(x, y)$:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{3}$$

где A, B, C — известные функции от x и y, имеющие непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Эти функции и определяют классификацию уравнений (3).

1) *Гиперболический тип*: $AC - B^2 < 0$. В этом случае при подходящей замене переменных $x = x(\alpha, \beta)$, $y = y(\alpha, \beta)$ и соблюдении некоторых условий уравнение (3) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Phi_1\left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}\right).$$

Уравнение напоминает уравнение гиперболы и потому называется ***уравнением гиперболического типа***. Простейшим является так называемое *волновое уравнение*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $u(x, t)$ — неизвестная функция. Оно описывает колебания струн, стержней, мембран, электромагнитные колебания.

2) *Параболический тип*: $AC - B^2 = 0$. Подходящим преобразованием уравнение приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = \Phi_2\left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}\right)$$

и называется ***уравнением параболического типа***. Это уравнение используют при моделировании процессов передачи тепла, диффузии и вообще всего, что откуда-то куда-то распространяется (например, информация).

3) *Эллиптический тип*: $AC - B^2 > 0$. Уравнение представимо в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Phi_3\left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}\right)$$

и носит название ***уравнения эллиптического типа***. Такое уравнение описывает стационарные состояния в гидродинамике, электромагнитных и тепловых полях.

2 Колебания струны

Струной будем считать гибкую упругую нить, движение которой происходит в плоскости xOu. Будем рассматривать только малые отклонения струны от положения ее равновесия, которое будет у нас совпадать с осью Ox. Тогда можно считать, что точка x на струне в положении равновесия будет иметь ту же абсциссу x и при движении струны, так что форма струны в этом случае вполне описывается функцией $u(x,t)$, которая представляет собой отклонение указанной точки от оси Ox в момент времени t. Будем также предполагать, что натяжение T во всех точках струны одинаково и направлено по касательной к ней. Малость колебаний означает также то, что длина малого участка струны будет приниматься равной его проекции на ось Ox.

Рассмотрим участок струны M_1M_2 (рис. 1), к концам которого приложены силы натяжения T, действующие по касательным, которые образуют с осью Ox углы φ и $\varphi+\Delta\varphi$. Тогда проекция сил, приложенных к M_1M_2, на ось Ou будет равна $T\sin(\varphi+\Delta\varphi)-T\sin\varphi$. Поскольку угол φ мал, синусы можно заменить тангенсами, и мы получим, используя теорему Лагранжа,

$$\begin{aligned} T\sin(\varphi+\Delta\varphi)-T\sin\varphi &\approx T\operatorname{tg}(\varphi+\Delta\varphi)-T\operatorname{tg}\varphi = \\ &= T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] = \\ &= T\frac{\partial^2 u(c,t)}{\partial x^2}\Delta x,\ c\prec x, x+\Delta x. \end{aligned}$$

С другой стороны, движение участка M_1M_2 подчиняется второму закону

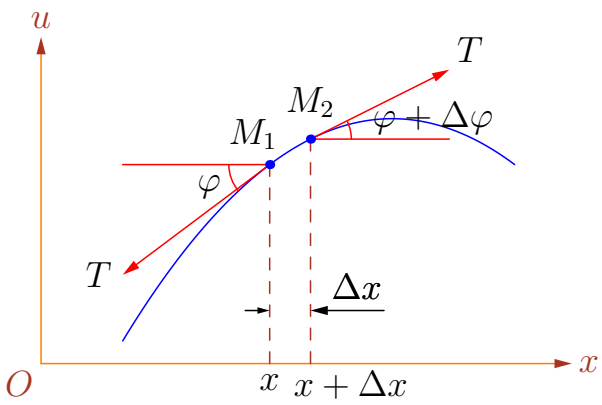


Рис. 1.

Ньютона, по которому полученную величину силы следует приравнять силе инерции, равной произведению массы участка струны M_1M_2 на его ускорение. Массу струны найдем как $\rho\Delta x$, где ρ — линейная плотность струны, а Δx —

длина проекции M_1M_2 на ось Ox, ускорение же равно $\partial^2 u/\partial t^2$. В результате придем к равенству

$$\rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\Delta x = T\,\frac{\partial^2 u\,(c,t)}{\partial x^2}\,\Delta x.$$

Разделив на Δx обе части уравнения и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u\,(x,t)}{\partial x^2},} \tag{4}$$

где $a^2 = T/\rho$. Уравнение (4) называется ***волновым уравнением***, или ***уравнением колебаний струны***. Как уже было сказано, оно относится к линейным уравнениям второго порядка гиперболического типа.

Чтобы решение такого уравнения не приняло вид неопределенной функции, как это случилось при решении уравнения (2), требуется добавить ограничения на неизвестную функцию. Чтобы струна начала двигаться, ее надо вывести из положения равновесия, например, слегка оттянув. Математически это выражается в том, что в начальный момент времени $t = 0$ задается исходная форма струны как некоторая функция $f\,(x)$:

$$u\,(x,0) = f\,(x)\,. \tag{5}$$

Можно поступить по-другому, слегка дернув струну в начальный момент времени, это будет означать, что при $t = 0$ заданы скорости движения всех точек струны в виде функции $F\,(x)$:

$$\frac{\partial u\,(x,0)}{\partial t} = F\,(x)\,. \tag{6}$$

Формулы (5) и (6) называются ***начальными условиями*** для волнового уравнения (4). В некоторых случаях начальных условий бывает недостаточно и неизвестную функцию ограничивают дополнительными условиями, о чем пойдет речь дальше.

2.1 Бесконечная струна. Метод Даламбера

Чтобы понять, как ведет себя бесконечная струна, если применить к ней начальные условия (5), (6), можно представить себе длинную веревку, лежащую на земле вдоль прямой линии, которую слегка приподнимают в ее середине и встряхивают. Если это проделать, вы увидите убегающие в обе стороны от середины веревки «волны». Это представление, видимо, и послужило причиной того, что решение волнового уравнения стали искать в виде суммы двух

функций, каждая из которых представляет собой убегающую «волну». Одна «волна» бежит влево от точки встряхивания, а вторая — вправо.

Итак, будем искать решение волнового уравнения в виде

$$u(x,t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at), \tag{7}$$

где φ, ψ — неизвестные функции, которые предстоит найти, причем, первая из них является «волной», убегающей вправо, а вторая убегает влево.

Сначала покажем, что функция (7) является решением волнового уравнения, для чего вычислим ее производные:

$$u'_x = \varphi' + \psi',\ u'_t = -a\varphi' + a\psi', u''_{xx} = \varphi'' + \psi'',\ u''_{tt} = a^2\varphi'' + a^2\psi''.$$

Мы видим, что волновое уравнение удовлетворяется: $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$.

Приступим к его решению, использовав начальные условия (5) и (6):

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x) + \psi(x) = f(x), \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= -a\varphi'(x) + a\psi'(x) = F(x). \end{aligned} \tag{8}$$

Второе уравнение перепишем в виде

$$-\varphi'(x) + \psi'(x) = \frac{1}{a} F(x)$$

и проинтегрируем:

$$-\varphi(x) + \psi(x) = \frac{1}{a}\int_0^x F(s)\ ds + C. \tag{9}$$

Сложив уравнения (8) и (9), найдем $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x F(s)\ ds + \frac{C}{2}.$$

Вычтем эти же уравнения и найдем $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x F(s)\ ds - \frac{C}{2}.$$

Подставим полученные выражения для функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в формулу (7):

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{1}{2} f(x - at) - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} F(s)\ ds - \cancel{\frac{C}{2}} + \\ + \frac{1}{2} f(x + at) + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} F(s)\ ds + \cancel{\frac{C}{2}}, \end{aligned}$$

или

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(s)\ ds.} \tag{10}$$

Рассмотренный метод решения волнового уравнения называется ***методом Даламбера*** или ***методом бегущих волн***.

Пример 1. *Для любого момента времени t найти форму бесконечной струны, решая волновое уравнение* (4) *при начальных условиях*

$$u(x,0) = e^{-0{,}03x^2}, \quad \frac{\partial u\,(x,0)}{\partial t} = \frac{1}{1+9x^2}.$$

Решение. Применим формулу (10), но сначала вычислим входящий в нее интеграл:

$$\int_{x-at}^{x+at} F\,(s)\;ds = \int_{x-at}^{x+at} \frac{1}{1+9s^2}\,ds = \frac{1}{3}\,\operatorname{arctg} 3s\Big|_{x-at}^{x+at} =$$
$$= \frac{1}{3}\left[\operatorname{arctg} 3(x+at) - \operatorname{arctg} 3(x-at)\right].$$

Следовательно, форма струны будет такой:

$$u\,(x,t) = \frac{1}{2}\left[e^{-0{,}03(x-at)^2} + e^{-0{,}03(x+at)^2}\right] + \frac{1}{6a}\left[\operatorname{arctg} 3(x+at) - \operatorname{arctg} 3(x-at)\right].$$

На анимационном рис. 2 показано изменение формы струны, изображенной синим цветом, вызванное увеличением t от 0 до 22. Видно, что это изменение действительно имеет вид двух разбегающихся волн. В начальной стадии движения форма струны представляет собой довольно высокий пик, а затем этот пик разделяется на два, так что «энергия» первоначальной волны делится между ними пополам. На рис. представлены еще два графика. Красный изображает *волны отклонения*, которые соответствуют решению волнового уравнения при $F\,(x) \equiv 0$. Зеленый график демонстрирует *волны импульса*, то есть случай, когда $f\,(x) \equiv 0$. Складывая красный и зеленый графики, получаем синюю кривую, то есть решение заданного волнового уравнения

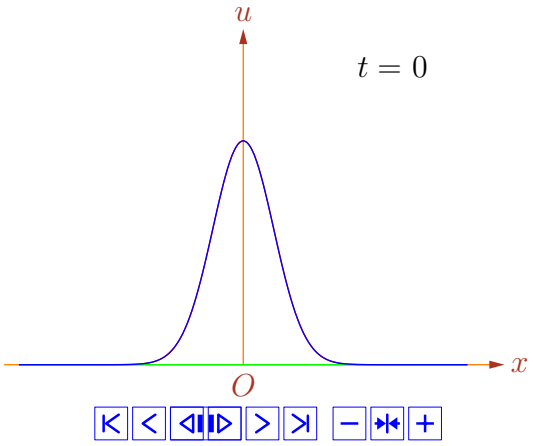


Рис. 2. Бегущие волны.

2.2 Закрепленная струна. Метод Фурье

Рассмотрим более реалистичный случай, когда концы струны закреплены на оси Ox в точках $x = 0$ и $x = l$. Это можно записать равенствами

$$u\,(0,t) = 0, \;\; u\,(l,t) = 0, \tag{11}$$

которые называют ***граничными***, или ***краевыми условиями***.

Для решения задачи о колебаниях закрепленной струны нам понадобятся и начальные условия (5), (6) и граничные (11).

Метод решения новой задачи отличается от метода Даламбера и носит название ***метода Фурье***. Заключается он в том, что аргументы неизвестной функции разделяют: ее представляют в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от x, а другая — только от t:

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)\,. \tag{12}$$

Чтобы найти $X(x)$ и $T(t)$, подставим в волновое уравнение вместо функции $u(x,t)$ ее выражение из (12):

$$X(x)\,T''(t) = a^2 X''(x)\,T(t)\,,$$

откуда

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Левая часть полученного равенства зависит лишь от t, а вторая — лишь от x. Две функции *различных* аргументов могут равняться при любых значениях своих аргументов только тогда, когда они постоянны. Обозначим эту постоянную $-\lambda$ и перепишем предыдущее равенство:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

В результате получили два обыкновенных дифференциальных уравнения вида

$$X'' + \lambda X = 0,\ T'' + a^2\lambda T = 0. \tag{13}$$

Оба относятся к классу обыкновенных линейных однородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Первому из них соответствует характеристическое уравнение $p^2 + \lambda = 0$, корни которого $p_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$. Если $\lambda = -\mu^2 < 0$, то решение будет следующим: $X(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$. Но такое решение не удовлетворяет граничным условиям, поэтому в дальнейшем будем считать, что $\lambda > 0$. Тогда общее решение запишется в виде

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

Решая второе уравнение в (13), точно так же найдем, что

$$T(t) = C\cos a\sqrt{\lambda}\,t + D\sin a\sqrt{\lambda}\,t,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

Подставим теперь полученные выражения для функций $X(x)$ и $T(t)$ в формулу (12):

$$u(x,t) = \left(A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\sin\sqrt{\lambda}\,x\right)\left(C\cos a\sqrt{\lambda}\,t + D\sin a\sqrt{\lambda}\,t\right).$$

Чтобы определить неизвестные константы A, B, C, D, воспользуемся граничными условиями (11). Для первого из них имеем

$$u(0,t) = A\left(C\cos a\sqrt{\lambda}\,t + D\sin a\sqrt{\lambda}\,t\right) = 0.$$

Выражение в скобках равно 0, только если $C = D = 0$, но тогда мы получим тождественно нулевое решение $u(x,t) \equiv 0$, которое никаких колебаний струны не отражает. Следовательно, остается положить $A = 0$. Решение становится таким:

$$u(x,t) = B\sin\sqrt{\lambda}\,x\left(C\cos a\sqrt{\lambda}\,t + D\sin a\sqrt{\lambda}\,t\right). \tag{14}$$

Используем теперь второе из граничных условий (11):

$$u(x,l) = B\sin\sqrt{\lambda}\,l\left(C\cos a\sqrt{\lambda}\,t + D\sin a\sqrt{\lambda}\,t\right) = 0.$$

Решения $B = 0$, $C = D = 0$ и $\lambda = 0$ снова ведут к тождественно нулевому решению, поэтому остается единственная возможность: $\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$, причем из решений этого уравнения следует исключить решение $\lambda = 0$. Получим

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l},\ n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Таким образом, функция (14) трансформируется в бесконечное множество функций

$$u_n(x,t) = \sin\frac{\pi n x}{l}\left(C_n\cos\frac{\pi a n t}{l} + D_n\sin\frac{\pi a n t}{l}\right),\ n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Можно показать, что общим решением волнового уравнения будет бесконечная сумма таких решений:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{\pi a n t}{l} + D_n\sin\frac{\pi a n t}{l}\right)\sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{15}$$

Чтобы найти константы C_n и D_n, обратимся к начальным условиям (5) и (6). Первое из них дает

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin\frac{\pi n x}{l} = f(x).$$

Эта формула фактически представляет собой разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам, и поэтому константы C_n можно определить как коэффициенты Фурье такого ряда:

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx. \tag{16}$$

Найдем производную по t функции (15):

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-C_n\frac{\pi a n}{l}\sin\frac{\pi a n t}{l} + D_n\frac{\pi a n}{l}\cos\frac{\pi a n t}{l}\right)\sin\frac{\pi n x}{l},$$

а затем используем второе начальное условие:

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\frac{\pi a n}{l}\sin\frac{\pi n x}{l} = F(x).$$

Вновь имеем разложение по синусам, но уже функции $F(x)$, следовательно, коэффициенты Фурье будут такими:

$$D_n\frac{\pi a n}{l} = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx,$$

$$D_n = \frac{2}{\pi a n}\int_0^l F(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx. \tag{17}$$

Таким образом, решением волнового уравнения для случая закрепленной струны является ряд (15) с коэффициентами (16) и (17).

На анимационном рис. 3 можно наблюдать колебания струны с закрепленными концами для случая, когда $f(x) = 0{,}5\left[9-(x-l/2)^2\right]$, $F(x)\equiv 0$.

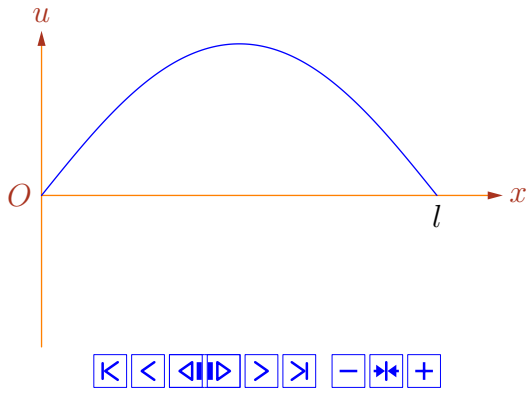


Рис. 3. Колебания закрепленной струны.

В Приложении[1)] представлены примеры решения волнового уравнения средствами системы *Mathematica*.

Приложение

[1] *Mathematica* версии 7.0 численно решает уравнения в частных производных с помощью уже известного вам оператора `NDSolve`. Но в более поздних версиях наряду с `NDSolve` имеется очень похожий на него оператор `NDSolveValue`, который позволяет более удобным способом использовать полученное оператором решение. Оператор `NDSolveValue` имеет вид

$$\texttt{NDSolveValue[eqns,expr,\{x,x}_{\texttt{min}}\texttt{,x}_{\texttt{max}}\texttt{\},\{y,y}_{\texttt{min}}\texttt{,y}_{\texttt{max}}\texttt{\}]}$$

где `eqns` — уравнение или система уравнений в частных производных; `expr` — неизвестная функция; `x`, `y` — аргументы неизвестной функции, изменяющиеся, соответственно, от $\texttt{x}_{\texttt{min}}$ до $\texttt{x}_{\texttt{max}}$ и от $\texttt{y}_{\texttt{min}}$ до $\texttt{y}_{\texttt{max}}$. Как будет показано далее, этот оператор решает и уравнения с неизвестной функцией, зависящей от трех аргументов.

Проверим его работоспособность на решении лекционного примера с колебаниями бесконечной струны (метод Даламбера):

```
a = 1;
usol = NDSolveValue[{∂t,t u[t,x] == a^2 ∂x,x u[t,x], u[0,x] == e^(-0.03 x^2),
  (∂t u[t,x] /. t → 0) == 1/(1 + 9 x^2)}, u, {t, 0, 22}, {x, -100, 100}, AccuracyGoal → 10,
  PrecisionGoal → 10];
Plot[usol[22,x],{x,-30,30}, PlotTheme → "Classic"]
```

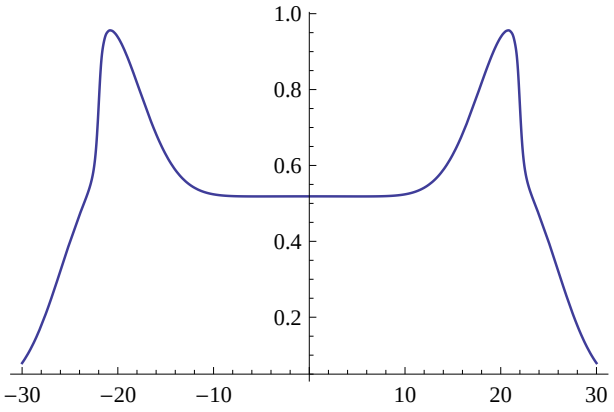


График соответствует тому, что было продемонстрировано на лекции.

Представленный вариант применения `NDSolve` включает в себя две опции: `AccuracyGoal` и `PrecisionGoal`. Первая нам уже встречалась и было отмечено, что она влияет на точность промежуточных вычислений. Вторая тоже влияет, а их совместное влияние заключается в том, что *Mathematica* старается сделать ошибку в численных расчетах величины x меньше, чем $10^{-a} + |x|10^{-p}$.

В операторе `Plot` была задана опция `PlotTheme`. Это связано с тем, что в 10-й версии системы *Mathematica* имеется несколько стилей изображения графиков: математический, упрощенный, для бизнеса и т. д. Чтобы стиль графиков был похож на стиль, использованный в остальных лекциях, пришлось установить опцию в `"Classic"`.

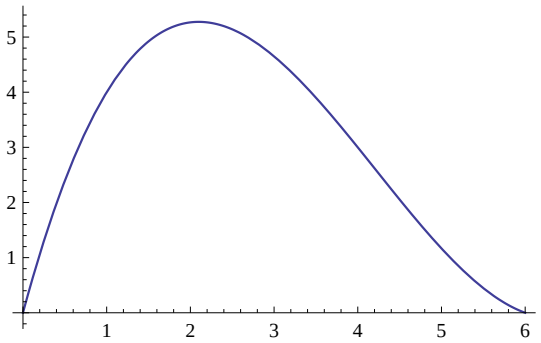
Точно так же можно решить и лекционный пример с закрепленной струной. Но более интересно задать начальное положение струны не такой симметричной формы, как на лекции, и посмотреть, будет ли струна хоть в какой-то мере сохранять подобие исходной формы.

Для этого возьмем начальные условия в виде

$$f(x) = \frac{17}{120}\,x^3 - \frac{43}{24}\,x^2 + \frac{113}{20}\,x, \quad F(x) = 0$$

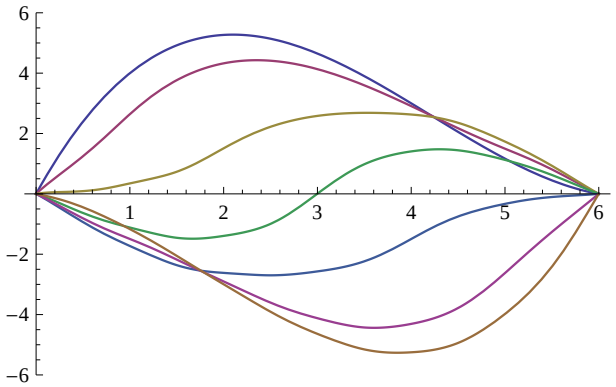
и изобразим график $f(x)$:

$$\texttt{Plot}\left[\frac{17}{120}x^3-\frac{43}{24}x^2+\frac{113}{20}x,\{x,0,6\},\ \texttt{PlotTheme}\to\ \texttt{"Classic"}\right]$$



Теперь построим серию графиков, демонстрирующих струну в движении:

```
a = 1;
usol = NDSolveValue[{∂t,t u[t,x] == a^2 ∂x,x u[t,x], u[0,x] == 17/120 x^3 - 43/24 x^2 + 113/20 x,
  (∂t u[t,x] /. t → 0) == 0, u[t,0] == 0, u[t,6] == 0}, u, {t,0,7}, {x,0,6},
  AccuracyGoal → 10, PrecisionGoal → 10, MaxSteps → Infinity];
Plot[{usol[0,x],usol[1,x],usol[2,x],usol[3,x],usol[4,x],usol[5,x],
  usol[6,x]},{x,0,6}, PlotRange → {-6,6}, PlotTheme → "Classic"]
```



Опция `MaxSteps` устанавливает максимальное число итераций численного метода, выполняемых для достижения результата. Если положить ее равной `Infinity`, число шагов будет неограниченным, и точность расчетов, вообще говоря, может повыситься. Из рис. видно, что первоначальная форма струны не сохраняется: некоторые промежуточные формы выглядят совсем по-другому.

Изобразить поведение струны можно и с помощью поверхности `u[t,x]`, применив оператор `Plot3D`. Так что предыдущий рис. приобретет вид, показанный на рис. 4:

```
Plot3D[usol[t,x],{t,0,7},{x,0,6}, AxesLabel → {"t","x"}, PlotRange → All,
  PlotTheme → "Classic"]
```

На лекции, ограниченной в своих возможностях, был рассмотрен простейший случай одномерных колебаний. Более сложными являются колебания дву- и трехмерные. Рассмотрим

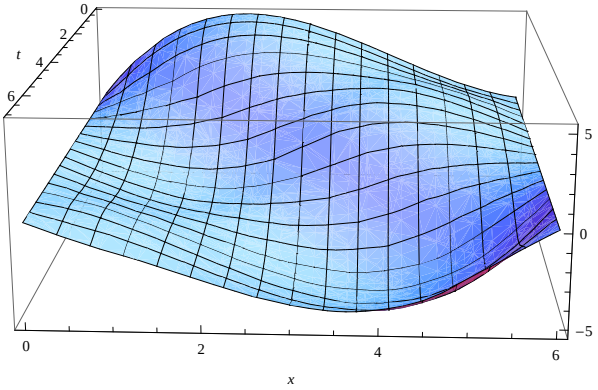


Рис. 4.

первые на примере колебаний мембраны, т. е. плоской пластинки, такой, как в некоторых телефонах. Описывают такие колебания с помощью функции уже трех аргументов $u(x, y, t)$, причем значением этой функции в момент времени t является отклонение мембраны в точке (x, y) от положения равновесия, которым считается расположение мембраны в плоскости xOy.

Начальные условия описываются функциями уже двух переменных:

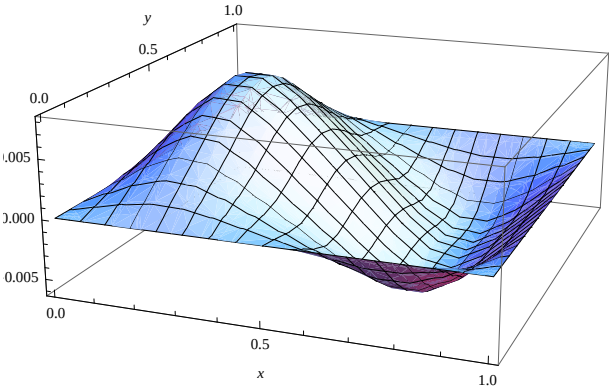
$$u(x, y, 0) = f(x, y), \qquad \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = F(x, y).$$

Вначале рассмотрим мембрану, в состоянии равновесия представляющую собой прямоугольник: $0 \le x \le c$, $0 \le y \le d$. Так как края мембраны обычно закреплены, то краевые условия принимают вид

$$u(0, y, t) = 0,\ u(c, y, t) = 0,\ u(x, 0, t) = 0,\ u(x, d, t) = 0.$$

Выберем $c = d = 1$, $f(x, y) = \sin^2(x)(x-1)y(y-1)$ и, решив волновое уравнение, изобразим нашу мембрану в момент времени $t = 0{,}35$:

```
a = 1;
usol = NDSolveValue[{∂t,t u[t,x,y] == a^2 (∂x,x u[t,x,y] + ∂y,y u[t,x,y]), u[t,0,y] == 0,
  u[t,1,y] == 0, u[t,x,0] == 0, u[t,x,1] == 0, ∂t u[t,x] /. t → 0) == 0,
  u[0,x,y] == Sin[x]^2 (x − 1) y (y − 1)}, u, {t, 0, 7}, {x, 0, 1}, {y, 0, 1}];
Plot3D[usol[0.35,x,y], {x,0,1}, {y,0,1}, AxesLabel → {"x","y"}, PlotRange → All,
  PlotTheme → "Classic"]
```



Изменяя t, можно получить изображения мембраны и в другие моменты времени.

Для того чтобы промоделировать колебания круглой мембраны, удобнее перейти к полярной системе координат $x = \rho\cos\varphi$, $x = \rho\sin\varphi$. Пусть мембрана в состоянии покоя занимает круг радиуса R с центром в начале координат (на плоскости xOy).

Рассмотрим случай, когда функции, определяющие начальные условия, не зависят от угла φ. Это значит, что начальные отклонения и скорости точек мембраны зависят только от их расстояния до ее центра. Иначе говоря, все точки окружности, концентрической с границей круга, в начальный момент имеют одни и те же скорости и отклонения. Тогда и в любой момент времени величины отклонения не будут зависеть от полярного угла φ и будет являться функциями только ρ и t, т. е. $u = u(\rho, t)$. Таким образом, в любой момент времени t форма мембраны будет поверхностью вращения.

Можно показать, что волновое уравнение в полярных координатах принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \rho}\right),$$

а начальные условия в силу нашего предположения должны быть такими:

$$u(\rho, 0) = f(\rho), \quad \frac{\partial u(\rho, 0)}{\partial t} = F(\rho).$$

Наиболее просто выглядит краевое условие (край мембраны по-прежнему должен быть закреплен):

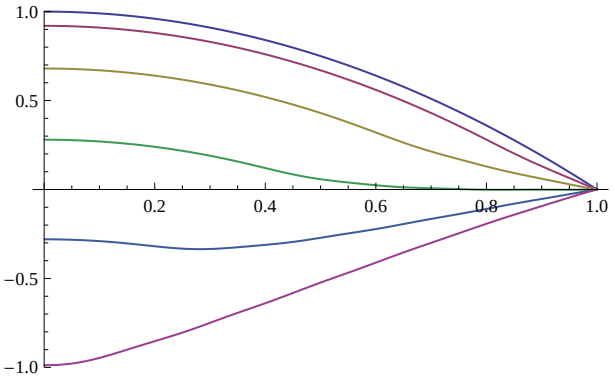
$$u(R, t) = 0.$$

Чтобы подключить к визуализации колебаний круглой мембраны систему *Mathematica*, во-первых, выберем какие-нибудь начальные условия, например, такие:

$$u(\rho, 0) = 1 - \rho^2, \quad \frac{\partial u(\rho, 0)}{\partial t} = 0,$$

далее, естественно, решим волновое уравнение, а затем построим сечения колеблющейся мембраны плоскостью, перпендикулярной плоскости xOy и проходящей через начало координат:

```
a = 1;
usol = NDSolveValue[{∂t,t u[t,r] == a^2(∂r,r u[t,r] + ∂r u[t,r]/r), u[t,1] == 0,
  u[0,r] == 1 - r^2, (∂t u[t,r] /. t → 0) == 0}, u, {t,0,2}, {r,0.001,1},
  AccuracyGoal → 10, PrecisionGoal → 10, MaxSteps → Infinity];
Plot[{usol[0,r], usol[0.2,r], usol[0.4,r], usol[0.6,r], usol[0.8,r],
  usol[1,r]}, {r,0.001,1}, PlotRange → {-1,1}, PlotTheme → "Classic"]
```



В приведенном программном скрипте ρ была заменена на r, а радиус R был принят равным 1. Минимальное значение r равнялось 0,001, а не нулю, иначе возникало деление на нуль.

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного* . — М.: Наука, 1985, — с. 341-353.

[2] Араманович И.Г., Левин В.И. *Уравнения математической физики.* — М.: Наука, 1969. — с. 9—20, 282-284, 24-70.