Устойчивость линейных систем

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Автономные и неавтономные системы дифференциальных уравнений. Положение равновесия, точка покоя. Устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость. Устойчивость линейных систем второго порядка. Теоремы об устойчивости линейных систем n-го порядка.

Анимация понятий устойчивости и фазовых портретов линейных систем второго порядка.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Использование системы *Mathematica* для исследования систем дифференциальных уравнений на устойчивость.

27 сентября 2014 г.

Получив опыт в описании различных технических объектов с помощью дифференциальных уравнений и их систем и научившись решать последние, мы можем теперь заняться очень интересными и важными вопросами, связанными с устойчивостью протекания динамических процессов.

Каждый может вспомнить, как уверенно и плавно ведет автомашину профессионал, и, как даже у профессионала она может выйти из-под контроля, рыская по скользкому льду. Не раз вы, наверное, слышали, как микрофон, нормально воспроизводивший чью-то речь, если его слишком близко подносили к губам, вдруг начинал издавать неистовые вибрирующие звуки. Даже вода в кране, спокойно вытекающая из него при небольшом напоре, может заставить кран сотрясаться и громко «бормотать». Все это — примеры устойчивого и неустойчивого поведения.

Проектируя техническое устройство, инженер должен обеспечить в том числе и устойчивость его работы. Для этого ему и необходимо овладеть теоретическими знаниями и методами решения задач в этой области. Как показывает, можно сказать, драматическая история с регулятором Уатта, такими знаниями инженер был вооружен не всегда[1)].

1 Определения устойчивости

Напомню, что автономной[†] называется система дифференциальных уравнений, правая часть которой не зависит от t:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{1}$$

$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$. Любую неавтономную систему

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

можно превратить в автономную, добавив к вектору $\mathbf{x}$ еще одну компоненту $x_{n+1} = t$:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, x_{n+1}), \\ x'_{n+1} = 1, \end{cases}$$

поэтому далее будут рассматриваться только автономные системы.

Точка $\mathbf{a}$ называется ***положением равновесия*** автономной системы (1), если

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

Положение равновесия называют также ***точкой покоя*** системы (1), так как оно является решением системы ($\mathbf{a}' = \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$), порождающим фазовую траекторию в виде точки.

Решение $\mathbf{y}(t)$ системы (1) называется ***устойчивым по Ляпунову***, если для любого другого решения $\mathbf{x}(t)$ этой системы выполняется условие

$$\forall (t \geq t_0) \forall (\varepsilon > 0) \exists (\delta > 0) \ |\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{y}(t_0)| < \delta \Longrightarrow |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Решение $\mathbf{y}(t)$ называется ***неустойчивым***, если оно не является устойчивым. Решение $\mathbf{y}(t)$ будем называть ***заданным*** движением, а решение $\mathbf{x}(t)$ — ***возмущенным***.

Первый клип анимационного рис. 1 демонстрирует утверждение (2): при небольшом отклонении (не больше, чем на δ) возмущенного движения от заданного в начальный момент времени t_0, и в последующие моменты времени возмущенное движение будет оставаться вблизи заданной траектории (внутри ε-трубки).

Если решение $\mathbf{y}(t)$ устойчиво по Ляпунову и, кроме того, для любого другого решения $\mathbf{x}(t)$

$$\exists (\delta > 0) \ |\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{y}(t_0)| < \delta \Longrightarrow \lim_{t \to \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t),$$

то решение $\mathbf{y}(t)$ называется ***асимптотически устойчивым***.

[†]Лекция «Нормальные системы дифференциальных уравнений».

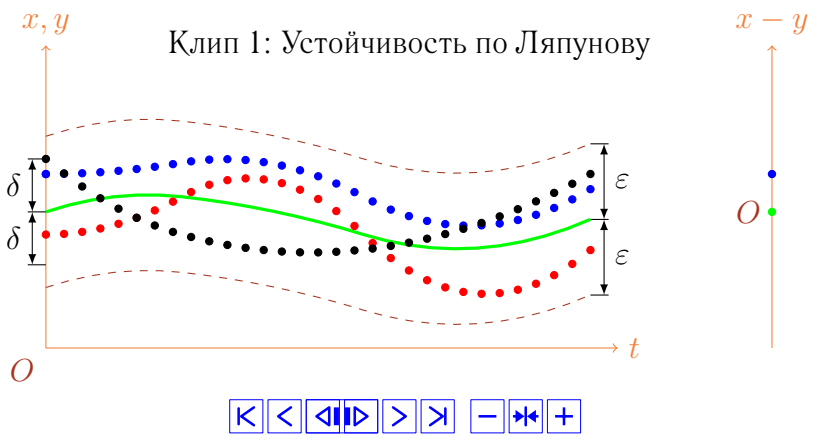


Рис. 1. К определению устойчивости: ● — заданное движение; ●, ●, ● — возмущенные движения.

Асимптотическую устойчивость иллюстрирует второй клип рис. 1: при отклонении возмущенного движения от заданного в начальный момент времени t_0, возмущенное движение, оставаясь в ε-трубке, стремится вернуться на заданную траекторию (хотя бы и за бесконечное время).

Можно заметить, что в определениях устойчивости и асимптотической устойчивости рассматривается *разность* решений, то есть отклонение возмущенного движения от заданного. Очевидно, вместо этого можно рассматривать отличие этого отклонения от нуля, надо только подходящим образом преобразовать систему (1).

Действительно, сделаем в ней замену $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)$, тогда

$$\mathbf{z}' = \mathbf{x}' - \mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{z} + \mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}).$$

Система

$$\mathbf{z}' = \mathbf{f}(\mathbf{z} + \mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})$$

называется ***приведенной*** и $\mathbf{z}(t) \equiv \mathbf{0}$ является ее точкой покоя. Но, с другой стороны, $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)$ — отклонение возмущенного движения от заданного, следовательно, исследование на устойчивость заданного движения равносильно исследованию на устойчивость точки покоя приведенной системы. Поэтому дальше будет изучаться только устойчивость точки покоя системы (1).

Определения устойчивости для точки покоя упрощаются и принимают следующий вид. Точка покоя называется ***устойчивой по Ляпунову***, если

$$\forall (t \geq t_0)\, \forall (\varepsilon > 0)\, \exists (\delta > 0)\ |\mathbf{x}(t_0)| < \delta \Longrightarrow |\mathbf{x}(t)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Это означает, что при отклонении движущейся точки от состояния равновесия в начальный момент времени, она будет продолжать оставаться вблизи точки покоя.

Если точка покоя устойчива по Ляпунову и, кроме того, для любого другого решения $\mathbf{x}(t)$

$$\exists\,(\delta > 0)\ |\mathbf{x}(t_0)| < \delta \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0},$$

то точка покоя ***асимптотически устойчива***.

Это означает, что при отклонении движущейся точки в начальный момент времени от положения равновесия, она будет стремиться с течением времени вернуться в начало координат.

2 Линейные системы

Линейные системы дифференциальных уравнений достаточно часто встречаются в практических приложениях и поэтому есть смысл изучать их устойчивость отдельно. Но важность линейных систем этим не исчерпывается, так как устойчивость нелинейной системы можно исследовать, заменяя ее некоторой линейной системой, приближенно представляющей поведение нелинейной системы.

Исследование на устойчивость неоднородной линейной системы

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varphi}(t), \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ — некоторая вектор-функция, можно свести к исследованию устойчивости однородной, так как разность решений неоднородной системы является решением однородной системы. Действительно, пусть $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ — решения неоднородной системы (4) и пусть $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$, тогда

$$\mathbf{x}' = \mathbf{y}' - \mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \boldsymbol{\varphi}(t) - \mathbf{A}\mathbf{z} - \boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{y} - \mathbf{z}) = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Таким образом, достаточно изучить устойчивость точки покоя $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ однородной линейной системы

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{5}$$

к чему мы и переходим.

2.1 Устойчивость линейных систем второго порядка

Изучение вопросов устойчивости линейных систем начнем с простейшей системы второго порядка, для которой примем

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Пусть p_1, p_2 — собственные значения матрицы $\mathbf{A}$; $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ — соответствующие им собственные векторы. Для простоты будем считать. что $t_0 = 0$.

2.1.1 Собственные значения $p_1 \neq 0$, $p_2 \neq 0$ действительны и различны

Решение в этом случае, как известно, имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = C_1\boldsymbol{\alpha}_1 e^{p_1 t} + C_2\boldsymbol{\alpha}_2 e^{p_2 t}. \tag{6}$$

1) $\boldsymbol{p_1 < 0}$, $\boldsymbol{p_2 < 0}$. В Приложении доказывается[2)], что точка покоя $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ системы устойчива по Ляпунову. Так как из (6) следует, что $\lim_{t\to\infty} |\mathbf{x}(t)| = 0$, то она и *асимптотически устойчива*.

В этой же части Приложения показано, что фазовый портрет системы в базисе из собственных векторов $\boldsymbol{\alpha}_1$ и $\boldsymbol{\alpha}_2$ составляют *параболы*

$$y = \mu x^s,\ \mu = \frac{C_2}{C_1^s},\ s = \frac{p_2}{p_1} > 0. \tag{7}$$

Он показан на анимационном рис. 2, 1) и называется ***устойчивым узлом***. Направление стрелок на рис. определяет стремление $\mathbf{x}(t)$ к нулю при $t \to \infty$.

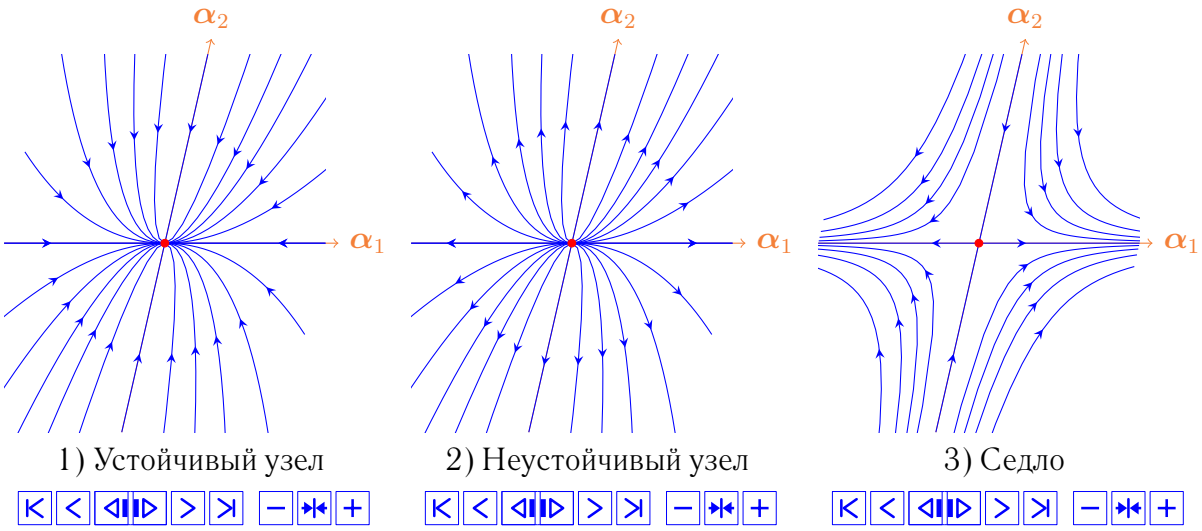


Рис. 2. Действительные и различные собственные значения.

2) $\boldsymbol{p_1 > 0}$, $\boldsymbol{p_2 > 0}$. В этом случае, как можно увидеть из (6), $\mathbf{x}(t) \to \infty$ из-за стремления к бесконечности экспонент. Система *неустойчива*, ее фазовый портрет (рис. 2, 2)) отличается от предыдущего направлением стрелок и называется *неустойчивым узлом*.

3) $\boldsymbol{p_1 > 0}$, $\boldsymbol{p_2 < 0}$. Так как $e^{p_1 t} \to \infty$, то и $\mathbf{x}(t) \to \infty$, так что система *неустойчива*. Исключение составляет *устойчивый ус* $x = 0$ (получается при $C_1 = 0$). Фазовый портрет (рис. 2, 3)) образуют гиперболы

$$y = \frac{\mu}{x^{-s}},\ -s = -\frac{p_2}{p_1} > 0,$$

он называется *седлом*.

Анимация рис. 2 показывает, как в случае асимптотически устойчивой системы точка, отклонившись от положения равновесия, возвращается в начало координат по соответствующей кривой, а в случае неустойчивой — удаляется в бесконечность.

2.1.2 Комплексно сопряженные собственные значения: $p_{1,2} = a \pm jb$, $b > 0$

В этом случае, решение (6), как мы знаем[†], может быть представлено в форме

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \left(\boldsymbol{\alpha} \cos bt - \boldsymbol{\beta} \sin bt\right) e^{at} + C_2 \left(\boldsymbol{\alpha} \sin bt + \boldsymbol{\beta} \cos bt\right) e^{at}, \qquad (8)$$

где $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ — линейно независимые векторы, a, b — действительные числа, $b > 0$.

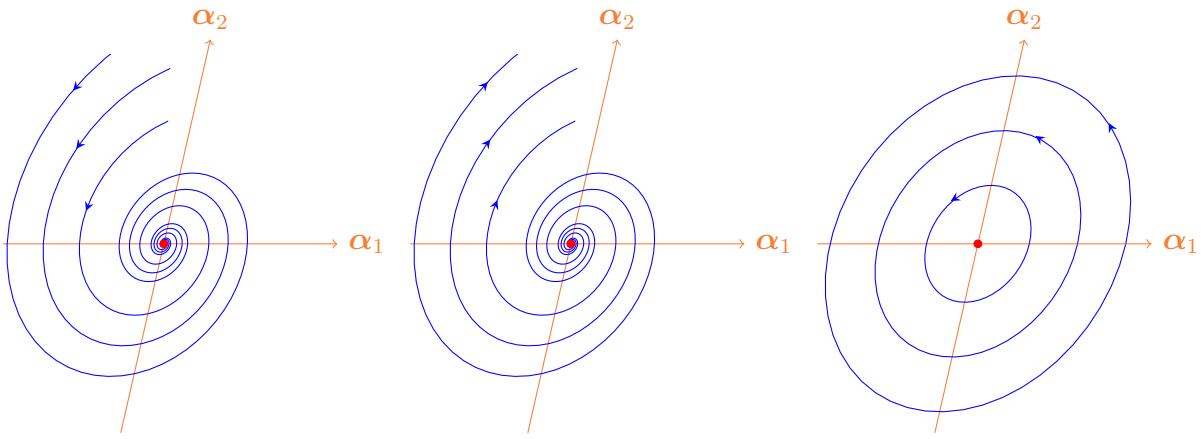
1) $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$. Точка покоя *устойчива*. Более того, она и *асимптотически устойчива*, так как $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0$ в силу ограниченности синуса и косинуса и стремления e^{at} к 0 при $t \to \infty$. Детали см. в Приложении[3)].

Там же показано, что фазовый портрет системы в полярных координатах (φ, ρ) состоит из *логарифмических спиралей* вида

$$\rho = \rho_1 e^{s\varphi},$$

где $s = -a/b$, $\rho_1 > 0$. Он называется *устойчивым фокусом* и показан на анимационном рис. 3, 1).

2) $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$. Из уравнения (8) видно, что $\mathbf{x}(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, поэтому система *неустойчива*. Фазовый портрет (рис. 3, 2)) называется *неустойчивым фокусом* и за исключением направлений движения по траекториям совпадает с предыдущим фазовым портретом.



1) Устойчивый фокус 2) Неустойчивый фокус 3) Центр

Рис. 3. Комплексно сопряженные собственные значения.

[†]Лекция «Системы ЛДУ с постоянными коэффициентами»

3) $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$. Траекториями системы являются кривые[4)]

$$x^2 + y^2 = \rho_0^2,$$

которые в общем случае представляют собой *эллипсы*, а не окружности, так как векторы $\boldsymbol{\alpha}_1$ и $\boldsymbol{\alpha}_2$ не обязательно перпендикулярны. Система *устойчива* (доказывается так же, как для $a < 0$), но *не асимптотически устойчива*. Ее фазовый портрет называется *центром*. Щелкая мышкой на рис. 3, 3), можно увидеть, как покинувшая положение равновесие точка не возвращается в него, как в случае асимптотической устойчивости, а движется по эллиптической орбите вокруг начала координат (вообще говоря, в течение бесконечного времени).

2.1.3 Одно (и только одно) из собственных значений равно нулю

1) $\boldsymbol{p_1} = \mathbf{0}, \boldsymbol{p_2} < \mathbf{0}$. Решение (6) принимает вид

$$\mathbf{x}(t) = C_1\boldsymbol{\alpha}_1 + C_2\boldsymbol{\alpha}_2 e^{p_2 t}. \tag{9}$$

Оно *устойчиво* (доказывается так же, как в п. 2.1.1), но *не асимптотически устойчиво*, потому что $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = C_1\boldsymbol{\alpha}_1$. Фазовый портрет в базисе $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$ определяется компонентами решения (9):

$$x\,(t) = C_1,\ y\,(t) = C_2 e^{p_2 t}.$$

Его вид показан на анимационном рис. 4, 1).

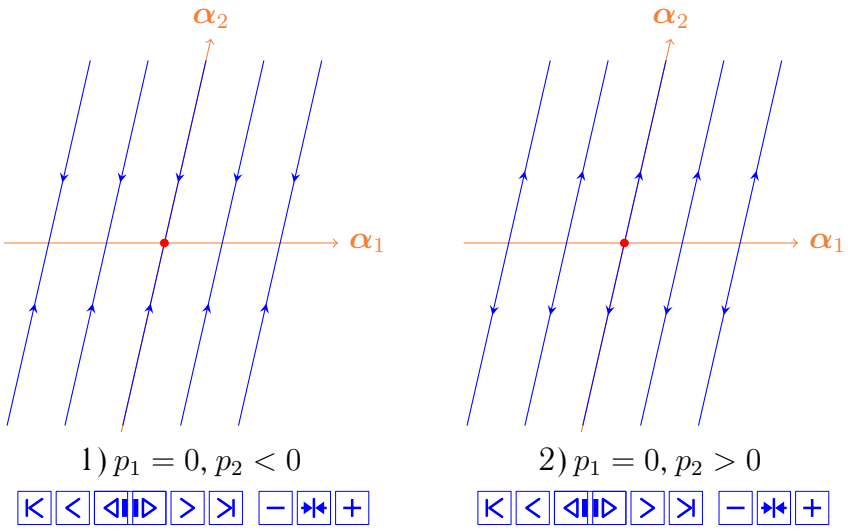


Рис. 4. Только одно нулевое собственное значение.

2) $\boldsymbol{p_1} = \mathbf{0}, \boldsymbol{p_2} > \mathbf{0}$. Решение, как видно из равенства (9), *неустойчиво*. От предыдущего фазового портрета фазовый портрет (рис. 4, 2)) отличается направлением стрелок.

2.1.4 Равные собственные значения

Пусть $p_1 = p_2 = p$. Кратность корня характеристического уравнения, как мы помним[†], приводит к двум различным типам решений в зависимости от некоторых особенностей матрицы системы[5)].

А) Решение имеет вид $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0)\, e^{pt}$.

1) $p < 0$. В этом случае $|\mathbf{x}(t)| < |\mathbf{x}(0)|$, так как $e^{pt} < 1$ при $t > 0$. Поэтому решение *устойчиво*. Кроме того, $\mathbf{x}(t) \to 0$ при $t \to \infty$, значит, система и *асимптотически устойчива*.

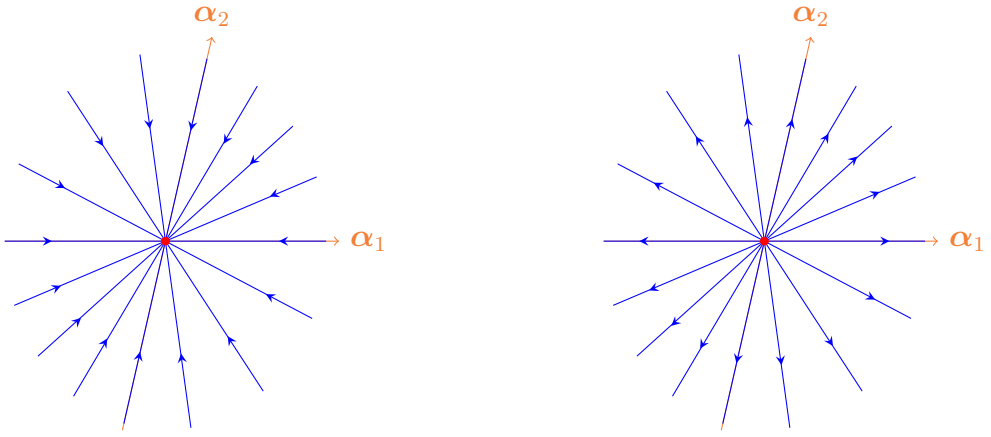
Координатные функции решения имеют вид

$$x(t) = x(0)\, e^{pt},\ y(t) = y(0)\, e^{pt},$$

в силу чего траектории системы выражаются формулой

$$y = kx,$$

где $k = y(0)/x(0)$, и представляют собой *лучи*, входящие в начало координат. Фазовый портрет называется *вырожденным устойчивым узлом* и представлен на рис. 5, 1).



1) Вырожденный устойчивый узел 2) Вырожденный неустойчивый узел

Рис. 5. Равные собственные значения, $x(t) = x(0)e^{pt}$.

2) $p > 0$. Как видно из решения системы, в данном случае ее точка покоя *неустойчива*. Фазовый портрет (рис. 5, 2)) называется *вырожденным неустойчивым узлом* и отличается от предыдущего фазового портрета только направлением стрелок.

3) $p = 0$. Решение имеет вид $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0)$ и является *устойчивым*, но *не асимптотически устойчивым*. Фазовый портрет — вся фазовая плоскость.

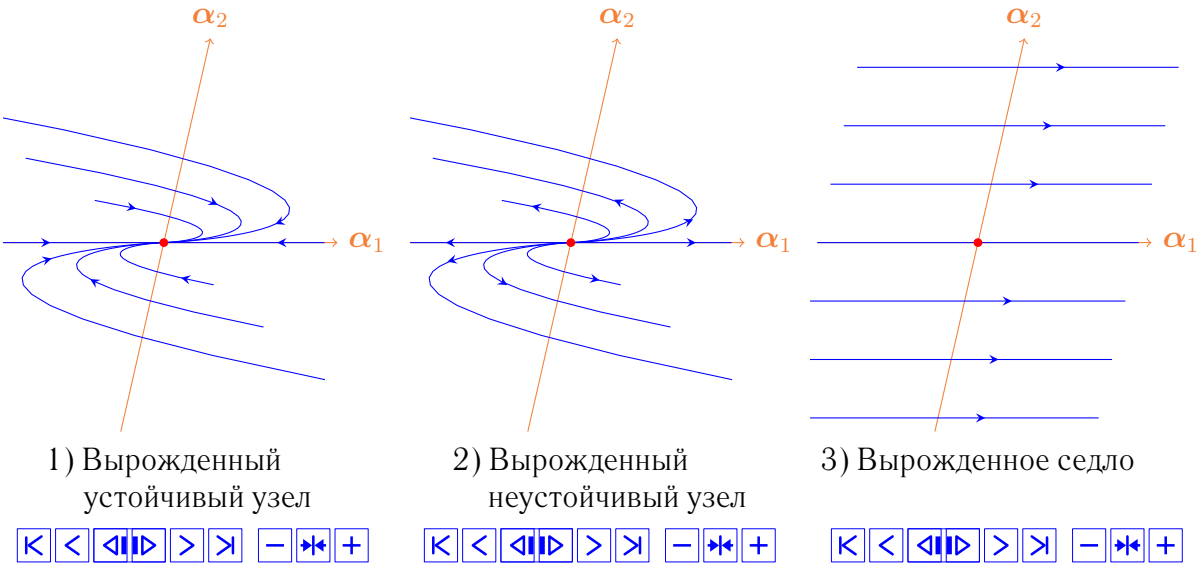
[†]Лекция «Системы ЛДУ с постоянными коэффициентами», примеры 2 и 3.

Б) Решение имеет вид $\mathbf{x}(t) = [(C_1 + C_2 t)\,\boldsymbol{\alpha}_1 + C_2\boldsymbol{\alpha}_2]\,e^{pt}$

1) $\boldsymbol{p < 0}$. Как показано в Приложении[6)], система *асимптотически устойчива*. Фазовый портрет называется *вырожденным устойчивым узлом*; его составляют кривые ($C_2 \neq 0$)

$$x = \left(C_1 + \frac{C_2}{p}\ln\frac{y}{C_2}\right)\frac{y}{C_2} \tag{10}$$

и изображенные на анимационном рис. 6, 1) лучи ($C_2 = 0$).



1) Вырожденный устойчивый узел 2) Вырожденный неустойчивый узел 3) Вырожденное седло

Рис. 6. Равные собственные значения, $\mathbf{x}(t) = [(C_1 + C_2 t)\,\boldsymbol{\alpha}_1 + C_2\boldsymbol{\alpha}_2]\,e^{pt}$.

2) $\boldsymbol{p > 0}$. Так как $\mathbf{x}(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, то система *неустойчива*. Фазовый портрет — *вырожденный неустойчивый узел* (рис. 6, 2)).

3) $\boldsymbol{p = 0}$. Из общего решения при $p = 0$ получим

$$\mathbf{x}(t) = (C_1 + C_2 t)\,\boldsymbol{\alpha}_1 + C_2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

следовательно, координатными функциями решения будут

$$x(t) = C_1 + C_2 t,\ \ y(t) = C_2.$$

Если $C_2 = 0$, то

$$x(t) = C_1,\ \ y(t) = 0,$$

и тогда система *устойчива*, но не *асимптотически устойчива*. Фазовый портрет — ось с направляющим вектором $\boldsymbol{\alpha}_1$.

Если же $C_2 \neq 0$, то $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$ и решение *неустойчиво*. Фазовый портрет называется *вырожденным седлом* (рис. 6, 3)).

На этом анализ возможного поведения двумерной системы закончен. Подытоживая его результаты с помощью рис. 7, приходим к следующему выводу:

- если хотя бы одно собственное значение $p = a + jb$ матрицы системы лежит правее мнимой оси комплексной плоскости aOb, то решение системы неустойчиво;
- если оба эти значения расположены левее мнимой оси, то решение асимптотически устойчиво;
- если оба корня характеристического уравнения равны нулю, то решение может быть как устойчивым, так и неустойчивым;
- если оба собственных значения чисто мнимые или одно из них равно нулю, а другое отрицательно, то решение системы устойчиво, но не асимптотически.

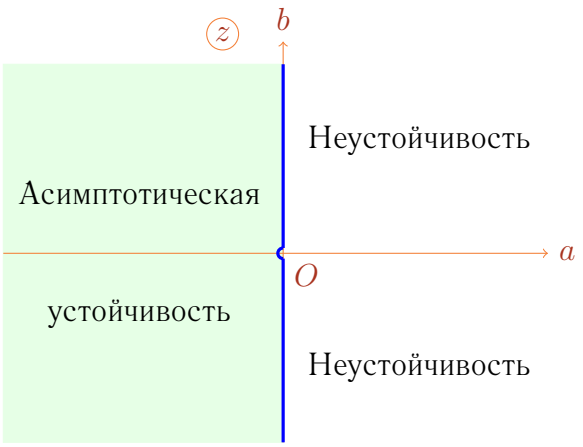


Рис. 7. Области устойчивости и неустойчивости.

3 Устойчивость линейных систем n-го порядка

Результаты проведенного исследования устойчивости линейной системы второго порядка можно обобщить на случай n-мерной линейной системы, $n \geq 2$. Например, справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы положение равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (5) *при* $n \geq 2$ *было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы системы имели отрицательные действительные части.*

Доказательство приведено в Приложении[7)].

Запишем также теорему, применимую и к неавтономным линейным однородным систем, предварив ее следующими определениями.

Нормой матрицы $\mathbf{A}$ называется число $\|\mathbf{A}\|$, обладающее следующими свойствами:

1) $\|\mathbf{A}\| \geq 0$, $\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} \equiv \mathbf{0}$,

2) $\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha|\|\mathbf{A}\|$, α – скаляр,

3) $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$,

4) $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$.

Мы примем, что нормой матрицы $\mathbf{A} = \{a_{ik}\}_m^n$ является сумма модулей всех ее элементов:

$$\|\mathbf{A}\| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|,$$

а нормой вектора $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ – сумма модулей всех его компонент:

$$\|\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Нетрудно видеть, что все свойства нормы при этом выполняются и для матриц, и для векторов[8)].

Матрица $\mathbf{A}(t) = \{a_{ij}(t)\}$ называется ***ограниченной*** на множестве T, если $\exists(M > 0)\ \|\mathbf{A}(t)\| \leq M, t \in T$. ***Пределом*** матрицы $\mathbf{A}(t)$ будем считать матрицу, состоящую из пределов своих элементов, если эти пределы существуют. Если хотя бы один элемент матрицы предела не имеет, то будем полагать, что и предел матрицы не существует.

Теорема 2. *Для устойчивости решения* $\mathbf{x}(t)$ *системы* (5) *необходимо и достаточно, чтобы матрица Коши*[†] $\mathbf{K}(t, t_0)$ *системы была ограничена при* $t \geq t_0$*, для асимптотической устойчивости – чтобы эта матрица удовлетворяла условию*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{K}(t, t_0) = \mathbf{O},$$

где $\mathbf{O}$ *– нулевая матрица, а для неустойчивости – чтобы матрица* $\mathbf{K}(t, t_0)$ *была неограниченной.*

Доказательство приведено в Приложении[9)].

В Приложении также рассмотрен пример исследования на устойчивость технического устройства[10)]и показано применение системы *Mathematica* в подобных исследованиях[11)].

[†]Лекция «Нормальные системы дифференциальных уравнений».

Приложение

[1)] Регулятор Уатта — это простейший центробежный регулятор, изображенный на анимационном рис. 8. Такой регулятор предназначен поддерживать скорость вращения, например, вала паровой машины вблизи некоторого номинального значения. Это достигается тем, что при превышении этого значения, шары регулятора расходятся в стороны сильнее, и это заставляет заслонку канала подачи пара опуститься и уменьшить его подачу. В результате обороты двигателя снижаются. Если же скорость вращения вала паровой машины, наоборот, становится недопустимо малой, шары опускаются, подача пара и число оборотов двигателя увеличиваются.

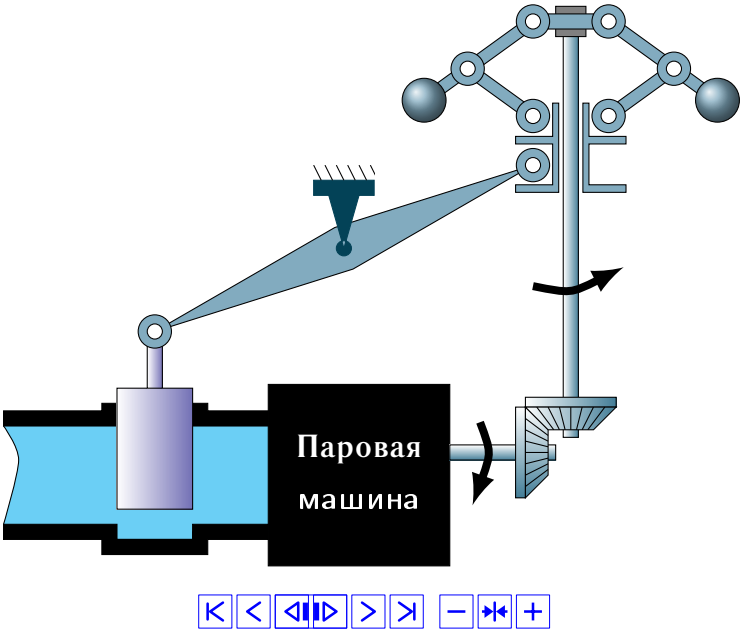


Рис. 8. Регулятор Уатта.

Скорость вращения вала практически никогда не бывает постоянной. Флуктуации давления пара в котле, колебания нагрузки и другие отклонения приводят к тому, что скорость вращения вала неизбежно отклоняется от номинала. Если возникающие отклонения непременно гасятся, и скорость вращения вала вновь приближается к номиналу, то можно говорить об устойчивой работе паровой машины. Такую работу и демонстрирует анимационный рис. 8: сильные отклонения от номинала в начале и середине демонстрации постепенно уменьшаются и становятся незначительными.

Возникает вопрос: каким должны быть характеристики регулятора, чтобы работа паровой машины была устойчивой? Первые паровые машины были маломощными, масса шаров регулятора небольшой, обработка деталей довольно грубой, так что трение отдельных частей регулятора никак нельзя было считать малым. Тем не менее регулятор вполне справлялся со своей задачей. На эту странность тогда никто не обратил внимание, а в ней-то и заключалась главная «тайна» автоматического регулирования!

Развитие промышленности требовало увеличения мощности паровых машин, для чего инженеры увеличивали расход пара, что приводило к росту размеров и массы регулирующей заслонки и других механизмов. Чтобы управлять более массивным устройством, приходилось увеличивать массы шаров в центробежных регуляторах. В то же время повышалась точность изготовления и качество обработки движущихся частей машины и регулятора. Тщательная обработка стенок цилиндра и многочисленных подшипников снижала трение.

Однако, когда все эти «полезные» начинания были воплощены в жизнь, паровые машины «взбунтовались»! Чтобы поддерживать число оборотов двигателя на должном уровне, приходилось непрестанно вручную манипулировать заслонкой (несмотря на наличие регулятора), и никакие усилия инженеров не могли заставить машины работать так же послушно, как во времена инженера Д. Уатта.

Тут-то и возникла теория регулирования, основанная английским ученым Максвеллом, русским ученым Вышнеградским и словацким ученым Стодолой. Первым практически важные принципы конструирования регуляторов сформулировал Вышнеградский: увеличение массы шаров и уменьшение трения вредно влияют на устойчивость. Им были найдены области изменения параметров регулятора, гарантирующие устойчивость работы паровой машины. Эти выводы противоречили «здравому смыслу» инженеров, но с их внедрением в практику «бунт» паровых машин закончился.

2) Так как векторы $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ линейно независимы, то алгебраическая система уравнений

$$\mathbf{x}(0) = C_1\boldsymbol{\alpha}_1 + C_2\boldsymbol{\alpha}_2 \tag{П1}$$

всегда разрешима относительно C_1 и C_2 в силу того, что ее определитель $|\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2| \neq 0$. Решая ее, придем к выражениям вида

$$C_1 = Ax(0) + By(0)\,,\ C_2 = Cx(0) + Dy(0)\,. \tag{П2}$$

Подставив эти выражения для произвольных постоянных в решение (6) и учитывая тот факт, что $e^{p_i t} \leq 1$ при $t \geq 0$, получим следующую оценку модуля фазового вектора системы:

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}(t)| &\leq |Ax(0) + By(0)|\,|\boldsymbol{\alpha}_1|\,e^{p_1 t} + |Cx(0) + Dy(0)|\,|\boldsymbol{\alpha}_2|\,e^{p_2 t} \leq \\ &\leq |Ax(0) + By(0)|\,|\boldsymbol{\alpha}_1| + |Cx(0) + Dy(0)|\,|\boldsymbol{\alpha}_2| \leq \\ &\leq M\,|x(0)| + N\,|y(0)|\,, \end{aligned} \tag{П3}$$

где $M = |A|\,|\boldsymbol{\alpha}_1| + |C|\,|\boldsymbol{\alpha}_2|$, $N = |B|\,|\boldsymbol{\alpha}_1| + |D|\,|\boldsymbol{\alpha}_2|$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \varepsilon/(M+N)$. Заметим, что при $|\mathbf{x}(0)| < \delta$ выполняется $|x(0)| \leq \sqrt{x^2(0) + y^2(0)} = |\mathbf{x}(0)| < \delta$ и $|y(0)| < \delta$. Но тогда из оценки (П3) следует, что

$$|\mathbf{x}(t)| \leq M\delta + N\delta = (M+N)\,\delta = (M+N)\,\frac{\varepsilon}{M+N} = \varepsilon. \tag{П4}$$

Это и означает устойчивость системы.

Построим ее фазовый портрет в базисе из собственных векторов $\boldsymbol{\alpha}_1$ и $\boldsymbol{\alpha}_2$, в котором координатные функции решения имеют вид

$$x(t) = C_1 e^{p_1 t},\ y(t) = C_2 e^{p_2 t}.$$

Тогда

$$\ln x = \ln C_1 + p_1 t,\ \ln\frac{x}{C_1} = p_1 t,\ t = \frac{1}{p_1}\ln\frac{x}{C_1},$$
$$y = C_2 \exp\left(\frac{p_2}{p_1}\ln\frac{x}{C_1}\right) = C_2 \exp\ln\left(\frac{x}{C_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}} = C_2\left(\frac{x}{C_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}},$$

откуда и следует формула (7).

3) Из равенства (8) при $t = 0$ получим уравнение вида (П1):

$$\mathbf{x}(0) = C_1\boldsymbol{\alpha} + C_2\boldsymbol{\beta},$$

решая которое относительно C_1 и C_2, вновь придем к равенствам (П2). Используя эти зависимости в равенстве (8) и учитывая ограничения $e^{at} \leq 1$, $|\cos bt| \leq 1$, $|\sin bt| \leq 1$, оценим модуль фазового вектора системы:

$$\mathbf{x}(t) \leq |C_1|\,|\boldsymbol{\alpha}| + |C_1|\,|\boldsymbol{\beta}| + |C_2|\,|\boldsymbol{\alpha}| + |C_2|\,|\boldsymbol{\beta}| \leq (|C_1| + |C_2|)\,(|\boldsymbol{\alpha}| + |\boldsymbol{\beta}|) \leq$$
$$\leq (|A|\,|x\,(0)| + |B|\,|y\,(0)| + |C|\,|x\,(0)| + |D|\,|y\,(0)|)\,(|\boldsymbol{\alpha}| + |\boldsymbol{\beta}|) \leq M\,|x\,(0)| + N\,|y\,(0)|\,,$$

где $M = (|A| + |C|)\,(|\boldsymbol{\alpha}| + |\boldsymbol{\beta}|)$, $N = (|B| + |D|)\,(|\boldsymbol{\alpha}| + |\boldsymbol{\beta}|)$.

Поскольку оценка получилась такой же, как в случае действительных корней, то и вывод будет таким же: точка покоя *устойчива*.

Построим фазовый портрет системы в базисе $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\}$, в котором компоненты фазового вектора имеют вид

$$x\,(t) = (C_1 \cos bt + C_2 \sin bt)\,e^{at}, \tag{П5}$$
$$y\,(t) = (-C_1 \sin bt + C_2 \cos bt)\,e^{at}. \tag{П6}$$

Из равенства (П5) получаем

$$x\,(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\cos bt + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\sin bt\right)e^{at} =$$
$$= \rho_0\,(\cos\psi\cos bt + \sin\psi\sin bt)\,e^{at} = \rho_0\cos(bt - \psi)\,e^{at}, \tag{П7}$$

где $\rho_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\cos\psi = C_1/\rho_0$, $\sin\psi = C_2/\rho_0$. Аналогично из равенства (П6) находим

$$y\,(t) = -\rho_0 \sin(bt - \psi)\,e^{at}. \tag{П8}$$

Перейдем от декартовых координат (x, y) к полярным (ρ, φ): $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Складывая квадраты левых и правых частей равенств (П7) и (П8), получим, что $\rho^2 = \rho_0^2 e^{2at}$, или

$$\rho = \rho_0 e^{at}. \tag{П9}$$

С другой стороны, разделив (П7) на (П8), будем иметь

$$\frac{x}{y} = \frac{\rho\cos\varphi}{\rho\sin\varphi} = \operatorname{ctg}\varphi = -\operatorname{ctg}(bt - \psi) = \operatorname{ctg}(\psi - bt)\,,$$

откуда $\varphi = \psi - bt$, а тогда $t = (\psi - \varphi)\,/b$. Подставляя это выражение вместо t в формулу (П9), придем к равенству

$$\rho = \rho_0 e^{a(\psi-\varphi)/b} = \rho_0 e^{a\psi/b} e^{-a\varphi/b},$$

или

$$\rho = \rho_1 e^{s\varphi},$$

где $\rho_1 = \rho_0 e^{a\psi/b}$, $s = -a/b$. которое показывает, что фазовый портрет состоит из *логарифмических спиралей*. Направление стрелок на фазовом портрете определяется тем, что $\rho\,(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $a < 0$.

4) Достаточно возвести в квадрат обе части уравнений (П5) и (П6) и сложить полученные равенства.

5) Пусть $\mathcal{A}$ — преобразование, определяемое матрицей $\mathbf{A}$ системы (5) в ее фазовом двумерном пространстве, и пусть матрица $\mathbf{A}$ имеет лишь одно собственное значение p, которому соответствует собственный вектор $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = p\boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}. \tag{П10}$$

Выберем произвольный вектор $\boldsymbol{\alpha}_2$, неколлинеарный $\boldsymbol{\alpha}$. Раскладывая вектор $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2$ по векторам $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\alpha}_2$, получим

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = a\boldsymbol{\alpha} + b\boldsymbol{\alpha}_2, \tag{П11}$$

где a, b — коэффициенты разложения. Равенства (П10) и (П11) означают, что в базисе $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ преобразование $\mathbf{A}$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} p & a \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

собственные значения которой равны p и b. Но, поскольку в любом базисе линейное преобразование имеет одни и те же собственные значения, то $b = p$ и равенство (П11) приобретает вид

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = a\boldsymbol{\alpha} + p\boldsymbol{\alpha}_2. \tag{П12}$$

Далее рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть в соотношении (П12) $a = 0$. Тогда, учитывая и соотношение (П10), имеем два равенства

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = p\boldsymbol{\alpha}, \qquad \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = p\boldsymbol{\alpha}_2. \tag{П13}$$

Покажем, что в этом случае функция

$$\mathbf{x}(t) = (C_1\boldsymbol{\alpha} + C_2\boldsymbol{\alpha}_2)e^{pt} \tag{П14}$$

будет общим решением системы (5). Эта функция будет ее решением, так как на основании (П13)

$$\mathbf{x}'(t) = p(C_1\boldsymbol{\alpha} + C_2\boldsymbol{\alpha}_2)e^{pt} = (C_1p\boldsymbol{\alpha} + C_2p\boldsymbol{\alpha}_2)e^{pt} = (C_1\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} + C_2\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2)e^{pt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t).$$

Кроме того, для любого заданного начального условия $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ можно подобрать произвольные постоянные C_1 и C_2 такие, что будет выполняться

$$\mathbf{x}_0 = C_1\boldsymbol{\alpha} + C_2\boldsymbol{\alpha}_2, \tag{П15}$$

так как определитель этой системы составляют неколлинеарные векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\alpha}_2$. В силу теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши любое решение системы (5), удовлетворяющее такому же начальному условию, совпадет с функцией (П14) (при тех же значениях произвольных постоянных).

Отметим, что в силу (П15) решение (П14) можно записать в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0)e^{pt}.$$

Случай 2. Пусть $a \neq 0$. Обозначив в соотношении (П12) $\boldsymbol{\alpha}_1 = a\boldsymbol{\alpha}$ теперь имеем два других равенства:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = p\boldsymbol{\alpha}, \qquad \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + p\boldsymbol{\alpha}_2.$$

Покажем, что в этом случае общим решением системы (5) является функция

$$\mathbf{x}(t) = [(C_1 + C_2t)\boldsymbol{\alpha}_1 + C_2\boldsymbol{\alpha}_2]e^{pt}.$$

Она является решением, так как

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= C_2\boldsymbol{\alpha}_1e^{pt} + p[(C_1 + C_2t)\boldsymbol{\alpha}_1 + C_2\boldsymbol{\alpha}_2]e^{pt} = [(C_1 + C_2t)ap\boldsymbol{\alpha} + C_2(a\boldsymbol{\alpha} + p\boldsymbol{\alpha}_2)]e^{pt} = \\ &= [(C_1 + C_2t)a\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} + C_2\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2)]e^{pt} = \mathbf{A}[(C_1 + C_2t)\boldsymbol{\alpha}_1 + C_2\boldsymbol{\alpha}_2)]e^{pt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t).\end{aligned}$$

Заключительный ход рассуждений проводится так же, как и в случае 1.

6) Пусть $C_2 \neq 0$. Очевидно, что справедлива формула (П2), так что, делая соответствующие подстановки в решение, получим

$$\mathbf{x}(t) = \{[(A + Ct)\boldsymbol{\alpha}_1 + C\boldsymbol{\alpha}_2]\, x(0) + [(B + Dt)\boldsymbol{\alpha}_1 + D\boldsymbol{\alpha}_2]\, y(0)\}\, e^{pt}.$$

Исходя из этой формулы, оценим модуль фазового вектора:

$$|\mathbf{x}(t)| \leq (K|\boldsymbol{\alpha}_1| + |C\boldsymbol{\alpha}_2|)\,|x(0)| + (L|\boldsymbol{\alpha}_1| + |D\boldsymbol{\alpha}_2|)\,|y(0)|\,, \tag{П16}$$

где $K = \max_{0\leq t\leq\infty} |A + Ct|\, e^{pt}$, $M = \max_{0\leq t\leq\infty} |B + Dt|\, e^{pt}$. Эти максимумы существуют и конечны. Действительно, рассмотрим функцию $f(t) = (\alpha + \beta t)\, e^{pt}$. Пусть сначала $\beta = 0$, тогда $\max_{0\leq t\leq\infty} |f(t)| = |\alpha| < \infty$. Возьмем $\beta \neq 0$. Поскольку $f'(t) = (p\alpha + \beta + p\beta t)\, e^{pt}$, то стационарной точкой функции будет $t_{\text{extr}} = -(p\alpha + \beta)/(p\beta)$. При переходе через эту точку производная меняет знак на противоположный, поэтому в этой точке функция $f(t)$ имеет единственный экстремум, а функция $|f(t)|$ — максимум. Следовательно, $\max_{0\leq t\leq\infty} |f(t)| \leq$ $\leq \max\{|f(0)|, |f(t_{\text{extr}})|\} < \infty$.

Упростим оценку (П16):

$$|\mathbf{x}(t)| \leq M\,|x(0)| + N\,|y(0)|\,,$$

где $M = K|\boldsymbol{\alpha}_1| + |C\boldsymbol{\alpha}_2|$, $N = L|\boldsymbol{\alpha}_1| + |D\boldsymbol{\alpha}_2|$. Далее, действуя, как при получении оценки (П4), убеждаемся в том, что система *устойчива*, а, так как $\lim_{t\to\infty} te^{pt} = 0$ при $p < 0$, то она и *асимптотически устойчива*.

Построим фазовый портрет системы в базисе $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$. Координатные функции решения имеют вид

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{pt},\ y(t) = C_2 e^{pt},$$

поэтому из второго равенства при $C_2 \neq 0$ следует, что $t = \frac{1}{p} \ln \frac{y}{C_2}$, и, подставляя это выражение в первое равенство, получаем формулу (10).

7) Сначала докажем вспомогательные утверждения.

Лемма П1. *Если все собственные значения матрицы* $\mathbf{A}$ *системы* (5) *имеют отрицательные действительные части, то для любого решения* $\mathbf{x}(t)$ *этой системы найдутся такие константы* $M > 0$, $a > 0$, *что при* $t \geq t_0$

$$|\mathbf{x}(t)| \leq Me^{-a(t-t_0)}.$$

Доказательство. Как было получено ранее†, любое решение системы (5) имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}_i(t) e^{p_i t}, \tag{П17}$$

где $p_i = a_i + jb_i$ — все разные собственные значения матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}_i(t)$ — вектор-функции, каждая компонента которых является многочленом.

Так как по условию леммы $a_i < 0$, то найдется такое число $a > 0$, что

$$a_i < -a < 0. \quad i = \overline{1, k}. \tag{П18}$$

Из равенства (П17) следует, что

$$|\mathbf{x}(t)| \leq \sum_{i=1}^{k} |\mathbf{P}_i(t)||e^{(a_i+jb_i)t}| = \sum_{i=1}^{k} |\mathbf{P}_i(t)| e^{a_i t} = \sum_{i=1}^{k} |\mathbf{P}_i(t)| e^{-a_i t_0} e^{a_i(t-t_0)}.$$

†Лекция «Системы ЛДУ с постоянными коэффициентами».

Умножая обе части неравенства на $e^{a(t-t_0)}$, получим

$$|\mathbf{x}(t)|e^{a(t-t_0)} \leq \sum_{i=1}^{k} |\mathbf{P}_i(t)|e^{-a_i t_0} e^{(a_i+a)(t-t_0)}. \tag{П19}$$

Неравенство (П18) означает, что коэффициенты $a_i + a$ в показателях экспонент отрицательны и, значит, в силу условия $t \geq t_0$

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{k} |\mathbf{P}_i(t)|e^{-a_i t_0} e^{(a_i+a)(t-t_0)} = 0,$$

так как все компоненты $\mathbf{P}_i(t)$ — многочлены. Из этого равенства следует, что функция под знаком предела ограничена, т. е.

$$\sum_{i=1}^{k} |\mathbf{P}_i(t)|e^{-a_i t_0} e^{(a_i+a)(t-t_0)} \leq M.$$

Тогда в силу (П19) $|\mathbf{x}(t)|e^{a(t-t_0)} \leq M$, или

$$|\mathbf{x}(t)| \leq Me^{-a(t-t_0)}.$$

□

Лемма П2. *Если все собственные значения матрицы* $\mathbf{A}$ *системы* (5) *имеют отрицательные действительные части. то для решения* $\mathbf{x}(t)$ *системы, удовлетворяющего начальному условию* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ *существуют такие константы* $R > 0$, $a > 0$, *что при* $t \geq t_0$

$$|\mathbf{x}(t)| \leq R|\mathbf{x}_0|e^{-a(t-t_0)}.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}_i(t)$ — решение системы (5), удовлетворяющее начальному условию

$$\mathbf{x}_i(t_0) = \mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0)^T. \tag{П20}$$

Тогда

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i(t) x_0^i, \tag{П21}$$

где $\mathbf{x}_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$, так как по теореме единственности правая часть при $t = t_0$ удовлетворяет тому же начальному условию, что и $\mathbf{x}(t)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i(t_0) x_0^i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i x_0^i = \mathbf{x}_0.$$

В силу леммы П1 существуют такие M_i, $i = \overline{1, n}$, и $a > 0$, что при $t \geq t_0$ выполняется

$$|\mathbf{x}_i(t)| \leq M_i e^{-a(t-t_0)}.$$

Положим $M = \max\{M_1, \ldots, M_n\}$, тогда при $t \geq t_0$

$$|\mathbf{x}_i(t)| \leq Me^{-a(t-t_0)}.$$

Используя это неравенство, из (П21) получаем, что

$$|\mathbf{x}(t)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{x}_i(t)||x_0^i| \leq \sum_{i=1}^{n} Me^{-a(t-t_0)}|\mathbf{x}_0| = nM|\mathbf{x}_0|e^{-a(t-t_0)}.$$

Если обозначить $R = nM$, придем к требуемому неравенству. □

Обратимся к доказательству теоремы.

Достаточность. Покажем, что при наличии хотя бы одного собственного значения матрицы системы, имеющего неотрицательную действительную часть, положение равновесия не может быть асимптотически устойчивым.

Пусть, например, для собственного значения $p_i = a_i + jb_i$ выполняется $a_i \geq 0$ и пусть $\boldsymbol{\alpha}_i \neq 0$ — соответствующий p_i собственный вектор. Тогда $\mathbf{x}(t) = \mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}_i e^{p_i t})$ является решением системы†. Преобразуем последнее выражение, обозначив $\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\alpha}_i' + j\boldsymbol{\alpha}_i''$:

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{Re}((\boldsymbol{\alpha}_i' + j\boldsymbol{\alpha}_i'')e^{(a_i + jb_i)t}) = (\boldsymbol{\alpha}_i' \cos b_i t - \boldsymbol{\alpha}_i'' \sin b_i t)e^{a_i t}.$$

Мы видим, что при $t \to \infty$ эта вектор-функция не стремится к нулю.

Не будет стремиться к нулю и вектор-функция $\mathbf{x}(t) = c\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}_i e^{p_i t})$, $c \neq 0$, которая также является решением системы, причем, при достаточно малом c в момент времени $t = t_0$ может быть сделана сколь угодно близкой к точке покоя $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Тем самым доказано, что точка покоя системы не будет асимптотически устойчивой.

Необходимость. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть $\mathbf{x}(t)$ — решение системы (5), удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. В силу леммы П2 найдутся такие $R > 0$, $a > 0$, что для $t \geq t_0$

$$|\mathbf{x}(t)| \leq R|\mathbf{x}_0|e^{-a(t-t_0)}. \tag{П22}$$

Положим $\delta = \varepsilon/R$, тогда при $|\mathbf{x}_0| < \delta$ для $t \geq t_0$ выполнится

$$|\mathbf{x}(t)| \leq R\,\frac{\varepsilon}{R}\,e^{-a(t-t_0)} \leq \varepsilon.$$

Это означает, что положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

Поскольку в силу (П22)

$$\lim_{t\to\infty} |\mathbf{x}(t)| \leq \lim_{t\to\infty} R|\mathbf{x}_0|e^{-a(t-t_0)} = 0,$$

то точка покоя и асимптотически устойчива.

8) Например, если $\mathbf{A} = \{a_{ik}\}_m^n$, $\mathbf{B} = \{b_{ik}\}_m^n$, $\mathbf{C} = \{b_{ik}\}_n^p$, то

$$\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} |a_{ik} + b_{ik}| \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} |b_{ik}| = \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|,$$

$$\|\mathbf{AC}\| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\sum_{s=1}^{n} |a_{is}c_{sk}| \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} |a_{is}||c_{lk}| =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} |a_{is}| \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} |c_{lk}| = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{C}\|.$$

9) Вначале запишем пару неравенств, связывающих величины модуля и нормы вектора $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, которые нам понадобятся в дальнейшем:

$$|\mathbf{x}| \leq \|\mathbf{x}\|, \tag{П23}$$

$$\|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{n}|\mathbf{x}|. \tag{П24}$$

Первое неравенство следует из неравенства

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2} = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|\mathbf{x}\|,$$

†Лекция «Системы ЛДУ с постоянными коэффициентами».

а второе — из соотношения

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 = n\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(|x_i| - |x_k|)^2 \le n\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = n|\mathbf{x}|^2.$$

Теперь приступим к доказательству теоремы, вспомнив, что любое решение $\mathbf{x}(t)$ системы может быть записано с помощью матрицы Коши $\mathbf{K}(t,t_0) = \{q_{ik}(t,t_0)\}$ в виде†

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{K}(t,t_0)\mathbf{x}(t_0). \tag{П25}$$

Достаточность. 1) Пусть матрица $\mathbf{K}(t,t_0)$ при $t \ge t_0$ ограничена, т. е. имеется такое число $M > 0$, что $\|\mathbf{K}(t,t_0)\| \le M$, $t \ge t_0$. Тогда из соотношений (П23), (П24) и (П25) следует, что

$$|\mathbf{x}(t)| \le \|\mathbf{x}(t)\| \le \|\mathbf{K}(t,t_0)\| \cdot \|\mathbf{x}(t_0)\| \le M\sqrt{n}|\mathbf{x}(t_0)|. \tag{П26}$$

Взяв теперь для произвольного $\varepsilon > 0$ число $\delta = \varepsilon/(M\sqrt{n})$, получим $|\mathbf{x}(t)| < \varepsilon$, лишь только $|\mathbf{x}(t_0)| < \delta$. Это свидетельствует об устойчивости точки покоя системы.

2) Пусть $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{K}(t,t_0) = \mathbf{O}$. В этом случае все функции $q_{ik}(t,t_0)$ стремятся к нулю при $t \to \infty$ и, следовательно, ограничены. Тогда ограничена и матрица $\mathbf{K}(t,t_0)$, что указывает на устойчивость точки покоя.

Кроме того, из неравенства (П26) видно, что

$$\lim_{t\to\infty} |\mathbf{x}(t)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0},$$

что означает асимптотическую устойчивость точки покоя.

3) Пусть $\mathbf{K}(t,t_0)$ — неограниченная при $t \ge t_0$ матрица, то есть

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{K}(t,t_0)\| = \infty.$$

Тогда среди функций q_{ik} найдется по крайней мере хотя бы одна, для которой

$$\lim_{t\to\infty} |q_{ik}(t,t_0)| = \infty.$$

Пусть $\mathbf{x}(t)$ — решение системы, удовлетворяющее начальному условию

$$\mathbf{x}(t_0) = (0,\ldots,0,x_k(t_0),0,\ldots,0)^T,$$

$x_k(t_0) \ne 0$. Для этого решения в силу (П25) $x_i(t) = q_{ik}(t,t_0)x_k(t_0)$, поэтому

$$\lim_{t\to\infty} |x_i(t)| = \infty.$$

Какой бы малой ни была величина $x_k(t_0)$, компонента решения $x_i(t)$ будет неограниченной, а, значит, неограниченной будет и величина $|\mathbf{x}(t)|$. Следовательно, точка покоя системы неустойчива.

Необходимость. 1) Пусть точка покоя системы (5) устойчива. Тогда из утверждения (3) следует, что при $t \ge 0$ для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|\mathbf{x}(t_0)| < \delta$ выполнится $|\mathbf{x}(t)| < \varepsilon$. В соответствии с (П24) и (П25) получим, что

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \|\mathbf{K}(t,t_0)\mathbf{x}(t_0)\| \le \sqrt{n}|\mathbf{x}(t)| \le \sqrt{n}\,\varepsilon. \tag{П27}$$

Возьмем $\mathbf{x}(t_0) = a\mathbf{e}_k$, где $|a| < \delta$, а $\mathbf{e}_k$ определено в (П20). Из неравенства (П27) теперь следует, что

$$\|\mathbf{K}(t,t_0)\mathbf{x}(t_0)\| = |a| \cdot \|\mathbf{K}(t,t_0)\mathbf{e}_k\| = |a| \cdot \left\|(q_{1k}(t,t_0),\ldots,q_{nk}(t,t_0))^T\right\| =$$

†Лекция «Нормальные системы дифференциальных уравнений».

$$= |a| \sum_{i=1}^{n} |q_{ik}(t, t_0)| \le \sqrt{n}|\mathbf{x}(t)| \le \sqrt{n}\,\varepsilon.$$

Разделив в двойном неравенстве на $|a|$ и выполнив в нем суммирование по k, придем к выводу, что матрица $\mathbf{K}(t, t_0)$ ограничена при $t \ge t_0$:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |q_{ik}(t, t_0)| = \|\mathbf{K}(t, t_0)\| \le \frac{n\sqrt{n}}{a}|\,\mathbf{x}(t)| \le \frac{n\sqrt{n}\,\varepsilon}{|a|}. \qquad (\text{П}28)$$

2) Пусть точка покоя системы (5) асимптотически устойчива, т. е.

$$\lim_{t\to\infty} |\mathbf{x}(t)| = 0.$$

Из неравенства (П28) тогда следует, что для всех i и k выполняется $\lim_{t\to\infty} q_{ik} = 0$, и, значит,

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{K}(t, t_0) = \mathbf{O}.$$

3) Пусть точка покоя системы (5) неустойчива. В этом случае матрица $\mathbf{K}(t, t_0)$ не ограничена при $t \ge t_0$, так как в противном случае в силу доказанной достаточности условий теоремы точка покоя была бы устойчивой.

10) Ранее† был рассмотрен пример двух взаимодействующих контуров, поведение которых описывалось системой из двух дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$\begin{cases} L_1\dfrac{d^2q_1}{dt^2} + R_1\dfrac{dq_1}{dt} + \dfrac{q_1}{C_1} + \dfrac{q_1 - q_2}{C} = 0, \\ L_2\dfrac{d^2q_2}{dt^2} + R_2\dfrac{dq_2}{dt} + \dfrac{q_2}{C_2} + \dfrac{q_2 - q_1}{C} = 0. \end{cases}$$

Эта система была приведена к нормальной линейной однородной системе четвертого порядка и были рассмотрены три случая.

Случай 1

В первом из них характеристическое уравнение имело вид

$$p^4 - 1 = 0$$

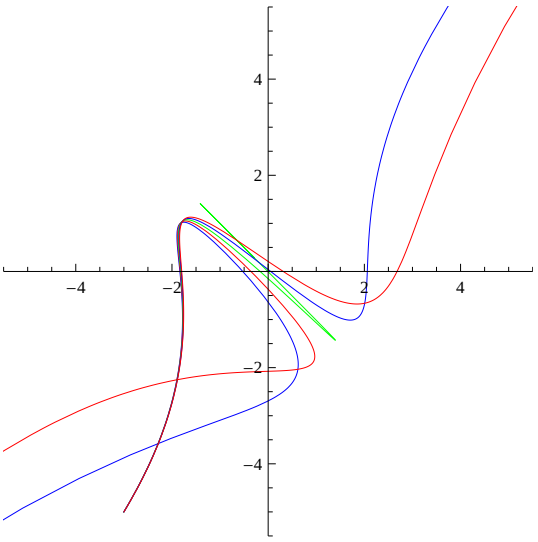
и дало четыре корня: $p_1 = -1$, $p_2 = 1$, $p_3 = j$, $p_4 = -j$, так что общим решением системы стали функции

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1e^{-t} + B_1e^{t} + P_1\cos t + Q_1\sin t, \\ x_2 &= -Ae^{-t} + B_1e^{t} + Q_1\cos t - P_1\sin t, \\ x_3 &= A_1e^{-t} + B_1e^{t} - P_1\cos t - Q_1\sin t, \\ x_4 &= -A_1e^{-t} + B_1e^{t} - Q_1\cos t + P_1\sin t. \end{aligned}$$

Нетрудно понять, что наличие экспоненты e^t делает решение неустойчивым. С помощью системы *Mathematica* построим фазовый портрет для пары функций $(q_1, q2) = (x_1, x_3)$ при следующих значениях произвольных постоянных: $A_1 = -4$, $P_1 = 1$, $Q_1 = -1$, $B_1 = -0{,}004$; $0{,}004$; $0{,}002$:

†Лекция «Системы ЛДУ с постоянными коэффициентами», Приложение.

```
ParametricPlot[Table[{a1 e^-t + b1 e^t + p1 Cos[t] + q1 Sin[t],
    a1 e^-t + b1 e^t - p1 Cos[t] - q1 Sin[t]} /. {a1 → -4, p1 → 1, q1 → -1},
    {b1, -0.004, 0.004, 0.002}] {t, 0, 10}, PlotRange → 5.5,
    PlotStyle → {Blue, Red, Green}, Evaluated → True]
```



Случай 2

Во втором случае характеристическое уравнение имело вид

$$p^4 + 404p^2 + 1600 = 0.$$

а его корнями были пары различных комплексно сопряженных чисел:

$$p_{1,2} = \pm 20j,\ p_{3,4} = \pm 2j.$$

Общее решение получилось таким:

$$\begin{aligned}
x_1 &= A_1 \cos 20t + B_1 \sin 20t + P_1 \cos 2t + Q_1 \sin 2t,\\
x_2 &= 20B_1 \cos 20t - 20A_1 \sin 20t + 2Q_1 \cos 2t - 2P_1 \sin 2t,\\
x_3 &= -\frac{26}{53} A_1 \cos 20t - \frac{26}{53} B_1 \sin 20t + 2P_1 \cos 2t + 2Q_1 \sin 2t,\\
x_4 &= -\frac{520}{53} B_1 \cos 20t + \frac{520}{53} A_1 \sin 20t + 4Q_1 \cos 2t - 4P_1 \sin 2t.
\end{aligned}$$

Не выписывая в явном виде матрицу Коши, заметим, что ее элементами будут выражения вида

$$a \cos 20t + b \sin 20t + c \cos 2t + d \sin 2t, \tag{П29}$$

модули которых ограничены:

$$|a \cos 20t + b \sin 20t + c \cos 2t + d \sin 2t| \le |a| + |b| + |c| + |d|.$$

Следовательно, и норма матрицы Коши тоже будет ограничена, а тогда по теореме 2 точка покоя устойчива. Асимптотическая устойчивость отсутствует, так как выражения (П29) при $t \to \infty$ к нулю не стремятся.

Фазовый портрет для пары функций $(q_1, q2)$ и значений произвольных постоянных $A_1 = 0$, $P_1 = -1{,}23$, $Q_1 = -1{,}04$, $B_1 = 0{,}2$; $0{,}6$; 1 показан на рис. 9. Будучи выведена из состояния равновесия, система обречена вечно блуждать в окрестности точки покоя по причудливым кривым.

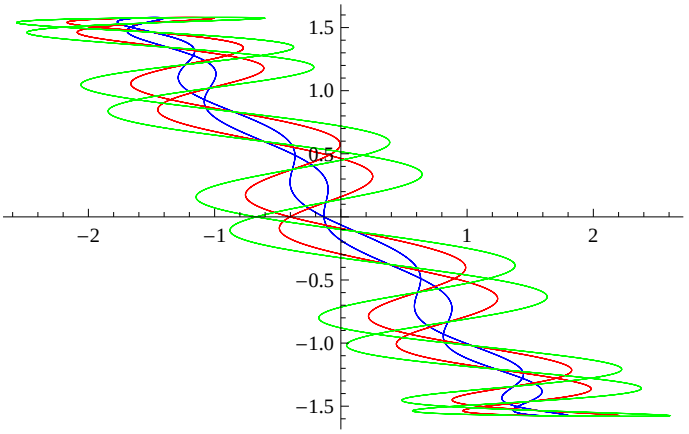


Рис. 9.

Случай 3

Характеристическое уравнение имело вид

$$32p^4 + 144p^3 + 364p^2 + 500p + 625 = 0,$$

а его корнями были комплексные числа

$$p_1 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}j,\ p_2 = -\frac{1}{4} - \frac{7}{4}j,\ p_3 = -2 + \frac{3}{2}j,\ p_4 = -2 - \frac{3}{2}j.$$

Поскольку их действительные части отрицательны, то в соответствии с теоремой 1 можно сделать вывод, что в данном случае система асимптотически устойчива.

Фазовый портрет для значений параметров $A_1 = 1{,}85$, $P_1 = 0{,}03$, $Q_1 = -2$, $B_1 = -3, -1, 3$ представлен на рис. 10.

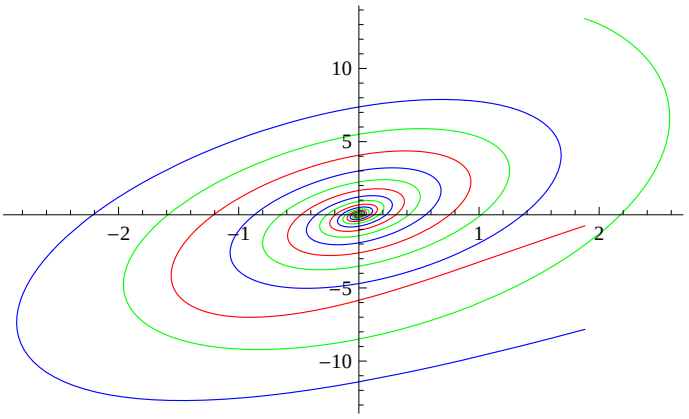


Рис. 10.

[11)] Мы видели, что в анализе на устойчивость точки покоя основную роль играют собственные значения матрицы системы и ее фундаментальная матрица. Конечно, собственные значения можно найти, решая характеристическое уравнение матрицы, но его еще надо составить. Система *Mathematica* предоставляет оператор `Eigenvalues[matr]`, сразу вычисляющий собственные значения матрицы `matr`. Возьмем, например, матрицу системы дифференциальных уравнений из случая 2 и найдем ее собственные значения:

```
                  0  1    0  0
Eigenvalues[ -322  0  159  0 ]
                  0  0    0  1 ]
                156  0  -82  0
{20 I,-20 I,2 I,-2 I}
```

Фундаментальную матрицу для этого же случая построим, напрямую используя систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -322x_1 + 159x_3, \\ x_3' = x_4, \\ x_4' = 156x_1 - 82x_3, \end{cases}$$

и единичные начальные условия вида (П20). Очевидно, векторы $\mathbf{e}_i$ образуют единичную матрицу, которую мы зададим в системе *Mathematica* оператором `IdentityMatrix`, в качестве аргумента указав размерность единичной матрицы (четыре). Решая в цикле систему дифференциальных уравнений для каждого вектора $\mathbf{e}_i$, получаемые решения будем записывать в массив `xx`, из которого затем образуем матрицу Коши:

```
ei = IdentityMatrix[4]; xx={};
Do[sol = Solve[x[0] == ei[[i]] ; xx=Append[xx,x[t] /. sol[[1]] // ComplexExpand],
    {i,1,4}];
K = Table[xx[[i]]] , {i,1,4}] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \frac{13}{66}\mathrm{Cos}[2t] + \frac{53}{66}\mathrm{Cos}[20t] & -\frac{13}{33}\mathrm{Sin}[2t] - \frac{530}{33}\mathrm{Sin}[20t] & \frac{13}{33}\mathrm{Cos}[2t] - \frac{13}{33}\mathrm{Cos}[20t] & \frac{260}{33}\mathrm{Sin}[20t] - \frac{26}{33}\mathrm{Sin}[2t] \\ \frac{13}{132}\mathrm{Sin}[2t] + \frac{53}{1320}\mathrm{Sin}[20t] & \frac{13}{66}\mathrm{Cos}[2t] + \frac{53}{66}\mathrm{Cos}[20t] & \frac{13}{66}\mathrm{Sin}[2t] - \frac{13}{660}\mathrm{Sin}[20t] & \frac{13}{33}\mathrm{Cos}[2t] - \frac{13}{33}\mathrm{Cos}[20t] \\ \frac{53}{132}\mathrm{Cos}[2t] - \frac{53}{132}\mathrm{Cos}[20t] & \frac{265}{33}\mathrm{Sin}[20t] - \frac{53}{66}\mathrm{Sin}[2t] & \frac{53}{66}\mathrm{Cos}[2t] + \frac{13}{66}\mathrm{Cos}[20t] & -\frac{53}{33}\mathrm{Sin}[2t] - \frac{130}{33}\mathrm{Sin}[20t] \\ \frac{53}{264}\mathrm{Sin}[2t] - \frac{53}{2640}\mathrm{Sin}[20t] & \frac{53}{132}\mathrm{Cos}[2t] - \frac{53}{132}\mathrm{Cos}[20t] & \frac{53}{132}\mathrm{Sin}[2t] + \frac{13}{1320}\mathrm{Sin}[20t] & \frac{53}{66}\mathrm{Cos}[2t] + \frac{13}{66}\mathrm{Cos}[20t] \end{pmatrix}$$

Вывод об ограниченности этой матрицы был уже сделан раньше.

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.* — М.: Наука, 1985, — с. 118-123, 125-134.