Дифференциальные уравнения высших порядков

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Уравнения, допускающие понижение порядка.

Анимация перестройки решения дифференциального уравнения и уравнения Дуффинга.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Возможности, предоставляемые системой *Mathematica* для решения дифференциальных уравнений высших порядков.

4 ноября 2011 г.

1 Основные понятия. Теорема Коши

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

или

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Во втором случае оно называется уравнением, разрешенным относительно старшей производной.

Общим решением уравнения (1) или уравнения (2) называется функция $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$, которая при любых значениях произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$ является решением этого дифференциального уравнения и при заданных начальных условиях

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{3}$$

значения этих постоянных можно подобрать так, что начальные условия будут удовлетворены. Это означает, что постоянные $C_1 \ldots, C_n$ можно определить из системы уравнений (если она разрешима):

$$\begin{cases} y_0 = \varphi\left(x_0, C_1, \ldots, C_n\right), \\ y_0' = \varphi'\left(x_0, C_1, \ldots, C_n\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}\left(x_0, C_1, \ldots, C_n\right). \end{cases}$$

Алгебраическое уравнение

$$\Phi\left(x, y, C_1 \ldots, C_n\right) = 0,$$

определяющее решение как неявную функцию, называется ***общим интегралом*** дифференциального уравнения (1) или (2).

Частным решением (***частным интегралом***) дифференциального уравнения (1) или (2) называется его общее решение (его общий интеграл) при конкретных значениях произвольных постоянных $C_1 \ldots, C_n$.

Задачей Коши для дифференциального уравнения (2) называется задача отыскания решения $y\left(x\right)$, удовлетворяющего начальным условиям (3).

Теорема 1 (существования и единственности решения задачи Коши)**.** *Если в уравнении* (2) *функция* f *и ее частные производные по* y, y', $\ldots$, $y^{(n-1)}$ *непрерывны в некоторой области, содержащей точку*

$$\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right),$$

то найдется интервал $\left(x_0 - h, x_0 + h\right)$*, для которого существует единственное решение уравнения* (2)*, удовлетворяющее начальным условиям* (3).

2 Уравнения, допускающие понижение порядка

2.1 Уравнение вида $y^{(n)} = f\left(x\right)$.

Чтобы решить такое уравнение, проинтегрируем его n раз:

$$\begin{aligned} &y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1, \\ &y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)\,dx\right) dx + C_1 x + C_2, \\ &y^{(n-3)} = \int \left(\int \left(\int f(x)\,dx\right) dx\right) dx + C_1 x^2 + C_2 x + C_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y = \int \left(\ldots\left(\int f(x)\,dx\right)\ldots\right)\,dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n. \end{aligned}$$

Мы видим, что порядок уравнения понижался последовательно до 0 и в результате получилось общее решение рассматриваемого уравнения.

Пример 1. *Найти общее решение уравнения* $y^V = \frac{24}{x^5}$.

Решение. Проинтегрируем это уравнение пять раз:

$$y^{IV} = -\frac{6}{x^4} + C_1,$$

$$y''' = \frac{2}{x^3} + C_1 x + C_2,$$

$$y'' = -\frac{1}{x^2} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3,$$

$$y' = \frac{1}{x} + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4,$$

$$y = \ln|x| + C_1 x^4 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5.$$

Пример 2. *В некоторый момент движения поезда по горизонтальному участку пути со скоростью 25 м/с был включен тормоз. Найти время и расстояние, пройденное поездом после включения тормоза, если сопротивление движению равно 0,03 веса поезда.*

Решение. После включения тормоза на поезд действовала только сила сопротивления движению, равная $F_c = -0,03mg$, где m — масса поезда, g — ускорение силы тяжести. Знак минус взят потому, что направление силы сопротивления было противоположно направлению движения. По второму закону Ньютона произведение массы поезда на его ускорение должно равняться этой силе:

$$ms'' = -0,03mg,$$

или

$$s'' = -0,03g, \tag{4}$$

где $s(t)$ — путь, пройденный поездом после включения тормоза за время t. Эту неизвестную функцию и требуется найти из решения полученного дифференциального уравнения второго порядка.

Из условий задачи следуют начальные условия

$$s(0) = 0, \tag{5}$$

$$s'(0) = 25, \tag{6}$$

при которых необходимо найти решение этого уравнения. Другими словами, требуется решить задачу Коши (4)-(6).

Проинтегрируем дважды уравнение (4):

$$s' = -0,03gt + C_1, \tag{7}$$

$$s = -0,03\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2. \tag{8}$$

Из (7) и (6) получаем, что $C_1 = 25$, а из (8) и (5) находим, что $C_2 = 0$. Следовательно, решением задачи Коши является функция

$$s(t) = -0,03\frac{gt^2}{2} + 25t. \tag{9}$$

Так как в момент остановки поезда его скорость равна нулю, то из этого условия и равенства (7) можем найти время торможения T:

$$s'(T) = 0 = -0,03gT + 25,$$
$$T = \frac{25}{0,03g} \approx \frac{25}{0,03 \cdot 9,8} \approx 85\,(c).$$

Формула (9) дает величину тормозного пути:

$$s(T) \approx -0,03 \cdot 9,8\frac{T^2}{2} + 25T \approx 1063\,(\text{м})\,.$$

2.2 Уравнение вида $F(x, y', y'') = 0$.

Сделаем в этом уравнении замену $y' = p(x)$, тогда $y'' = p'(x)$ и рассматриваемое уравнение преобразуется в следующее:

$$F(x, p, p') = 0.$$

Интегрируя его методами, изученными на предыдущих лекциях, можно получить решение $p = \varphi(x, C_1)$, где C_1 — произвольная постоянная. Тогда общее решение такого уравнения выразится формулой

$$y = \int y'\,dx = \int p\,dx = \int \varphi(x, C_1)\;dx + C_2,$$

где C_2 — вторая произвольная постоянная.

Пример 3. *Найти общее решение уравнения* $y'' + 2xy'^2 = 0$.

Решение. Сделаем указанную замену: $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$, которую применим к заданному уравнению:

$$p' + 2xp^2 = 0,\ \frac{dp}{p^2} = -2x\,dx. \tag{10}$$

Решаем уравнение с разделенными переменными:

$$-\frac{1}{p} = -x^2 + C_1,\ p = \frac{1}{x^2 - C_1}.$$

Возвращаясь к переменной y, получаем еще одно дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y' = \frac{1}{x^2 - C_1}. \tag{11}$$

Продолжение решения зависит от значения произвольной постоянной C_1. При $C_1 < 0$ решение выражается арктангенсом:

$$y = \frac{1}{\sqrt{-C_1}}\ \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{-C_1}} + C_2.$$

Для $C_1 = 0$ имеем

$$y' = \frac{1}{x^2},\ y = -\frac{1}{x} + C_2,$$

а для $C_1 > 0$ получаем

$$y' = -\frac{1}{C_1 - x^2},\ y = -\frac{1}{2\sqrt{C_1}} \ln\left|\frac{\sqrt{C_1}+x}{\sqrt{C_1}-x}\right| + C_2.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{-C_1}} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{-C_1}} + C_2, & C_1 < 0. \\ -\dfrac{1}{x} + C_2, & C_1 = 0; \\ \dfrac{1}{2\sqrt{C_1}} \ln\left|\dfrac{\sqrt{C_1}-x}{\sqrt{C_1}+x}\right| + C_2, & C_1 > 0. \end{cases}$$

Данный пример показывает, как дифференциальное уравнение может в зависимости от выбранных начальных условий приводить к решениям совершенно различных типов, т.е. содержать в себе не одну, а несколько моделей поведения объекта. Кроме того, мы видим, что небольшое изменение начального условия, в данном случае константы C_1, приводит к резкой, «катастрофической» «перестройке» решения с одного типа функции на другую. Все это служит предметом специального рассмотрения в теории дифференциальных уравнений, в ее современных разделах, которые мы с вами, однако, изучать не будем.

На рис. 1 с помощью анимации показана динамика трансформации функций, составляющих решение рассматриваемого дифференциального уравнения при C_2=0. Полезно также понаблюдать эту трансформацию в пошаговом режиме.

2.3 Уравнение вида $F(y, y', y'') = 0$.

В этом случае выполняют замену $y' = p(y)$. Тогда $y'' = p'(y)\,y'$, или $y'' = p'p$. После замены уравнение становится таким:

$$F(y, p, p'p) = 0.$$

Решая его как уравнение первого порядка, найдем неизвестное p как функцию y: $p = \varphi(y, C_1)$. Это можно переписать как новое уравнение относительно y: $y' = \varphi(y, C_1)$. Преобразуем его:

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx,\ \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

Дальнейшее решение зависит от того, удастся ли взять интеграл.

Пример 4. *Решить уравнение* $yy'' - y'^2 = 0$.

Решение. Сделаем указанную замену и подставим ее в заданное уравнение. Получим и решим уравнение первого порядка:

$$yp'p - p^2 = 0,\ p(yp' - p) = 0.$$

Одно решение получаем сразу: $p = 0$, $y' = 0$, $y(x) = C \equiv \text{const}$. Продолжая решение, находим функцию $p(y)$:

$$yp' = p,\ \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y},\ \ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1|,\ p = C_1 y.$$

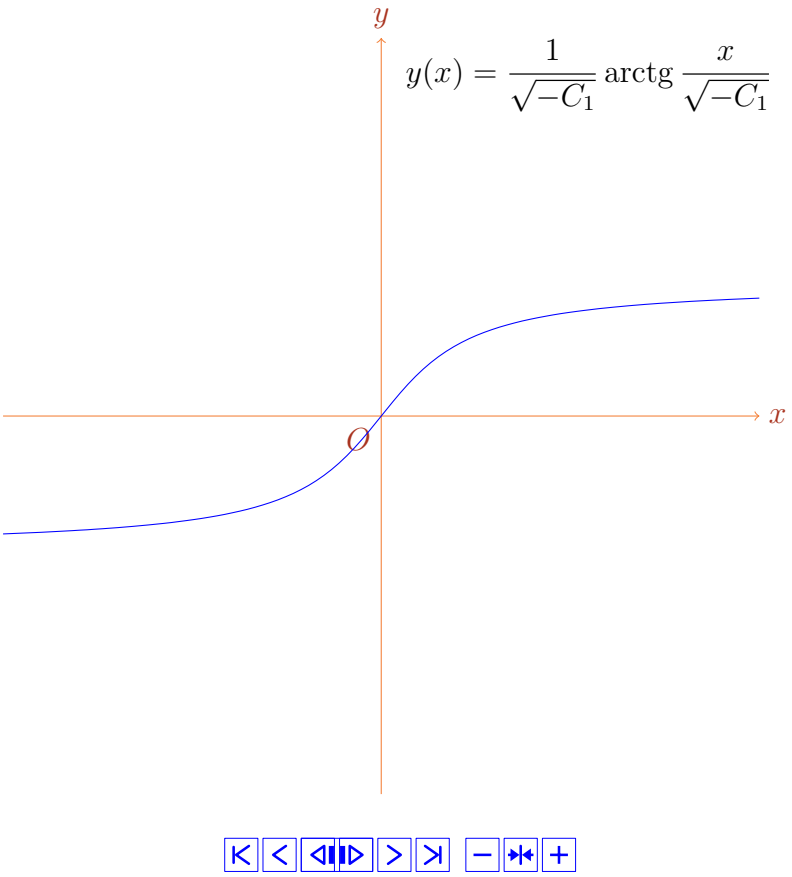

Рис. 1. Перестройка решения

Вернемся к переменной y и решим еще одно уравнение первого порядка:

$$y' = C_1 y,\ \frac{dy}{y} = C_1\, dx,\ \ln|y| = C_1 x + \ln|C_2|\,,\ y = C_2 e^{C_1 x}.$$

Последняя формула и есть общее решение заданного уравнения. Отметим, что решение $y(x) = C$, полученное ранее, входит в общее решение, так как получается из него при $C_1 = 0$.

Пример 5. *На расстоянии l от начала кабеля проходящий по нему ток равен $i(l)$. Пусть R — сопротивление кабеля на единицу длины, ρ — проводимость токов утечки на единицу длины. При таких условиях изменение величины тока подчиняется дифференциальному уравнению*

$$\frac{d^2 i}{dl^2} = R\rho i.$$

Найти величину тока в кабеле, если на его начале ($l = 0$)

$$i\,(0) = i_0,\ \frac{di\,(0)}{dl} = -\rho E_0. \tag{12}$$

Решение. Произведем замену неизвестной функции: $\frac{di}{dl} = p\,(i)$, $\frac{d^2 i}{dl^2} = p\,\frac{dp}{di}$. Подставим это в уравнение изменения величины тока и найдем функцию p:

$$p\,\frac{dp}{di} = R\rho i,\ p\,dp = R\rho i\,di,\ p^2 = R\rho i^2 + \alpha_1,\ p = \pm\sqrt{R\rho i^2 + \alpha_1},$$

где α_1 — произвольная постоянная. Теперь отыщем функцию тока $i\,(l)$:

$$\frac{di}{dl} = \pm\sqrt{R\rho i^2 + \alpha_1},\ \frac{di}{dl} = \pm\sqrt{R\rho}\sqrt{i^2+\beta_1},\ \frac{di}{\sqrt{i^2+\beta_1}} = \pm\sqrt{R\rho}\,dl,$$
$$\ln\left|i + \sqrt{i^2+\beta_1}\right| = \pm l\sqrt{R\rho} + \ln|\beta_2|\,,\ i + \sqrt{i^2+\beta_1} = \beta_2 e^{\pm l\sqrt{R\rho}},$$
$$\sqrt{i^2+\beta_1} = \beta_2 e^{\pm l\sqrt{R\rho}} - i,$$

где $\beta_1 = \alpha_1/(R\rho)$, β_2 — произвольные постоянные. Возведем обе части полученного равенства в квадрат:

$$i^2 + \beta_1 = \beta_2^2 e^{\pm 2l\sqrt{R\rho}} - 2\beta_2 i e^{\pm l\sqrt{R\rho}} + i^2,\ 2\beta_2 i e^{\pm l\sqrt{R\rho}} = \beta_2^2 e^{\pm 2l\sqrt{R\rho}} - \beta_1,$$
$$i = \frac{\beta_2}{2}\,e^{\pm l\sqrt{R\rho}} - \frac{\beta_1}{2\beta_2}\,e^{\mp l\sqrt{R\rho}}.$$

Введем новые произвольные постоянные $C_1 = \frac{\beta_2}{2}$, $C_2 = -\frac{\beta_1}{2\beta_2}$ и получим общее решение заданного уравнения в виде:

$$i = C_1 e^{l\sqrt{R\rho}} + C_2 e^{-l\sqrt{R\rho}}. \tag{13}$$

Далее найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям (12). Из первого условия получаем, что

$$i\,(0) = i_0 = C_1 + C_2. \tag{14}$$

Продифференцируем общее решение (13):

$$\frac{di}{dl} = C_1\sqrt{R\rho}e^{l\sqrt{R\rho}} - C_2\sqrt{R\rho}e^{-l\sqrt{R\rho}}.$$

Используем второе начальное условие:

$$\frac{di\,(0)}{dl} = -\rho E_0 = C_1\sqrt{R\rho} - C_2\sqrt{R\rho}. \tag{15}$$

Решим совместно уравнения (14) и (15) относительно произвольных постоянных:

$$C_2 = i_0 - C_1,\ -\rho E_0 = C_1\sqrt{R\rho} + C_1\sqrt{R\rho} - i_0\sqrt{R\rho},$$
$$C_1 = \frac{i_0\sqrt{R\rho} - \rho E_0}{2\sqrt{R\rho}} = \frac{1}{2}\left(i_0 - E_0\sqrt{\frac{\rho}{R}}\right),\ C_2 = \frac{1}{2}\left(i_0 + E_0\sqrt{\frac{\rho}{R}}\right).$$

Остается записать искомое частное решение:

$$i\,(l) = \frac{1}{2}\left[\left(i_0 - E_0\sqrt{\frac{\rho}{R}}\right)e^{l\sqrt{R\rho}} + \left(i_0 + E_0\sqrt{\frac{\rho}{R}}\right)e^{-l\sqrt{R\rho}}\right].$$

Нетрудно видеть, что найденное решение можно записать и по-другому:

$$i\,(l) = \frac{1}{2}\,i_0\left(e^{l\sqrt{R\rho}} + e^{-l\sqrt{R\rho}}\right) - \frac{1}{2}\,E_0\sqrt{\frac{\rho}{R}}\left(e^{l\sqrt{R\rho}} - e^{-l\sqrt{R\rho}}\right),$$

или

$$i\,(l) = i_0\,\mathrm{ch}\left(l\sqrt{R\rho}\right) - E_0\sqrt{\frac{\rho}{R}}\,\mathrm{sh}\left(l\sqrt{R\rho}\right).$$

□

В Приложении[1)] показаны особенности применения системы *Mathematica* к решению дифференциальных уравнений высших порядков.

Приложение

[1] *Mathematica* решает дифференциальные уравнения высших порядков практически так же легко, как и уравнения первого порядка. Надо только помнить, как записываются в этой системе производные высших порядков. Например, производную пятого порядка $y^{(5)}(x)$ можно записать с помощью оператора дифференцирования `D` как `D[y[x],{x,5}]`.

Поэтому решение первого примера лекции выглядит так:

```
DSolve[D[y[x],{x,5}]==24/x^5,y[x],x]
{{y[x] → C[1] + xC[2] + x^2C[3] + x^3C[4] + x^4C[5] + Log[x]}}
```

По лекции «Неопределенный интеграл» мы помним, что аргумент натурального логарифма надо взять в знаки модуля, если мы хотим иметь ответ в действительной форме.

Решим второй пример:

```
DSolve[{s''[t]==-0.03g,s[0]==0,s'[0]==25},s[t],t]
{{s[t] → 25t - 0.015gt^2}}
```

Решение третьего примера вызывает некоторое удивление:

```
DSolve[y''[x] + 2x(y'[x])^2==0,y[x],x]
```

$$\left\{\left\{\mathtt{y[x]} \to -\frac{\mathtt{ArcTanh}\left[\frac{x}{\sqrt{\mathtt{C[1]}}}\right]}{\sqrt{\mathtt{C[1]}}} + \mathtt{C[2]}\right\}\right\}$$

потому что у нас решение записывалось в три строки в зависимости от знака и значения константы `C[1]`. Снова придется напомнить о Приложении к лекции «Неопределенный интеграл», в котором разъяснялось, что *Mathematica* при интегрировании выдает ответ не в действительной, а в комплексной форме. Так как при решении дифференциальных уравнений также используется интегрирование, то не удивительно, что этот принцип распространяется и на них.

Чтобы убедится в том, что ответ, полученный на лекции, совпадает с ответом, выданным системой *Mathematica*, перепишем последний в привычной для нас математической форме:

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt{C_1}}\operatorname{arth}\frac{x}{\sqrt{C_1}} + C_2, \tag{П1}$$

а затем рассмотрим при различных значениях произвольной постоянной C_1. Если $C_1 < 0$, то, используя формулу комплексного анализа

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z}, \tag{П2}$$

и то, что на действительной оси $z = x$, получим

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{1}{\sqrt{C_1}}\operatorname{arth}\frac{x}{\sqrt{C_1}} + C_2 = -\frac{1}{j\sqrt{-C_1}}\operatorname{arth}\frac{x}{j\sqrt{-C_1}} + C_2 = \\ &= \frac{j}{\sqrt{-C_1}}\operatorname{arth}\left(-\frac{jx}{\sqrt{-C_1}}\right) + C_2 = \frac{j}{2\sqrt{-C_1}}\ln\frac{1-jx/\sqrt{-C_1}}{1+jx/\sqrt{-C_1}} + C_2 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{-C_1}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{-C_1}} + C_2, \end{aligned}$$

так как по еще одной формуле комплексного анализа

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{j}{2}\operatorname{Ln}\frac{1-jz}{1+jz}.$$

Если же $C_1 > 0$, то из той же формулы (П2) сразу находим

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arth} \frac{x}{\sqrt{C_1}} + C_2 = -\frac{1}{2\sqrt{C_1}} \ln \left| \frac{1 + x/\sqrt{C_1}}{1 - x/\sqrt{C_1}} \right| + C_2 =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{C_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{C_1} - x}{\sqrt{C_1} + x} \right| + C_2,$$

подробности см. в Приложении к лекции «Неопределенный интеграл».

Как видим, ответы совпали. Случай же $C_1 = 0$ в формуле (П1) не содержится, так как *Mathematica* при интегрировании выдает результат в наиболее общем виде, оставляя рассмотрение частных случаев на усмотрение пользователя. Интересно, что и частное решение, соответствующее начальным условиям

$$y(0) = -1,\ y'(0) = 1, \tag{П3}$$

которые в свою очередь соответствуют случаю $C_1 = 0$, *Mathematica* найти не может:

```
DSolve[{y''[x] + 2x(y'[x])^2 == 0,y'[1] == 1,y[1] == -1},y[x], x]
```

ссылаясь на то, что не в состоянии определить заданное частное решение из полученного ею общего решения. Как мы убедились, это действительно невозможно.

Поэтому для решения нашего дифференциального уравнения при начальных условиях (П3) следует с помощью системы *Mathematica* сначала решить уравнение (10), а затем перейти к решению уравнения (11):

```
DSolve[{p'[x] + 2xp[x]^2 == 0,p[1] == 1},p[x],x]
```

$$\left\{\left\{p[x] \to \frac{1}{x^2}\right\}\right\}$$

```
DSolve[{y'[x] == 1/x^2,y[1] == -1},p[x],x]
```

$$\left\{\left\{y[x] \to -\frac{1}{x}\right\}\right\}$$

Для следующего примера из лекции никаких неожиданностей не возникает:

```
DSolve[y[x] y''[x] - y'[x]^2 == 0,y[x],x]
```

$$\left\{\left\{y[x] \to e^{x\,C[1]}\,C[2]\right\}\right\}$$

Решим пример о токе в кабеле:

```
DSolve[{i''[l] == Rρi[l],i[0] == i0,i'[0] == −ρE0},i[l],l]
```

$$\left\{\left\{i[l] \to \frac{e^{-l\sqrt{R}\sqrt{\rho}}\left(i0\sqrt{R} + e^{2l\sqrt{R}\sqrt{\rho}}\,i0\sqrt{R} + E0\sqrt{\rho} - e^{2l\sqrt{R}\sqrt{\rho}}\,E0\sqrt{\rho}\right)}{2\sqrt{R}}\right\}\right\}$$

Упростим ответ:

```
FullSimplify[%]
```

$$\left\{\left\{i[l] \to i0\,\mathrm{Cosh}[l\sqrt{R}\sqrt{\rho}] - \frac{E0\sqrt{\rho}\,\mathrm{Sinh}[l\sqrt{R}\sqrt{\rho}]}{\sqrt{R}}\right\}\right\}$$

Это решение практически совпадает со вторым вариантом решения, найденного на лекции.

Чтобы изучить возможности системы *Mathematica* в решении дифференциальных уравнений высших порядков численными методами, рассмотрим электрический контур, изображенный на рис. 2†.

†Kyprianidis I. *Dynamics of a nonlinear electrical oscillator described by Duffing's equation.* — Aristotle University of Thessaloniki (Greece), Physics Department Report, apparently unpublished.

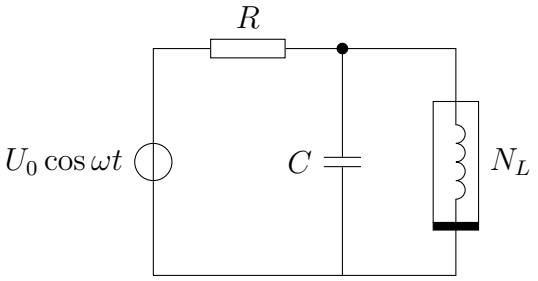

Рис. 2. Нелинейный осциллятор.

Этот контур, называемый ***осциллятором Дуффинга***, генерирует колебания некоторых величин во времени. Главной его частью является индуктивность с сердечником, обозначенная на рис. N_L. В отличие от обычной индуктивности, у которой ток i линейно зависит от магнитного потока φ, индуктивность N_L создает нелинейную зависимость $i_{N_L} = a_1\varphi + a_3\varphi^3$, где a_1, a_2 — некоторые константы. Далее токи будем обозначать буквой i, а напряжения — буквой u, помечая их символами элементов схемы.

В соответствии со вторым законом Кирхгофа можно записать, что сумма падений напряжений на резисторе и в контуре с емкостью и индуктивностью (на них падения напряжений одинаковы) равна входному напряжению:

$$u_R + u_{L,C} = i_R R + u_{L,C} = U_0 \cos \omega t.$$

По первому же закону Кирхгофа токи, сходящиеся в узле, отмеченном на рис. 2 жирной точкой, удовлетворяют уравнению

$$i_R = i_C + i_{N_L}.$$

Вместе с предыдущим равенством это дает

$$(i_C + i_{N_L})R + u_{L,C} = U_0 \cos \omega t. \qquad (\text{П}4)$$

Поскольку падение напряжения на конденсаторе равно $u_C = \frac{q}{C}$, где q — заряд конденсатора, то дифференцируя это равенство, получаем

$$i_C = C\,\frac{du_C}{dt},$$

так как $i_C = \frac{dq}{dt}$. С другой стороны, по одному из законов Фарадея напряжение на индуктивности равно скорости изменения магнитного потока через катушку: $u_L = \frac{d\varphi}{dt}$, и, поскольку $u_C = u_l$, находим, что

$$i_C = C\,\frac{du_L}{dt} = C\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Следовательно, уравнение (П4) принимает вид

$$\left(C\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} + a_1\varphi + a_3\varphi^3\right)R + \frac{d\varphi}{dt} = U_0 \cos \omega t,$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{1}{RC}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + \frac{a_1\varphi + a_3\varphi^3}{C} = \frac{U_0}{RC}\cos \omega t.$$

Это и есть уравнение рассматриваемого нелинейного осциллятора.

После введения обозначений

$$x = \varphi,\ \varepsilon = \frac{1}{RC},\ a = \frac{a_1}{C},\ b = \frac{a_3}{C},\ B = \frac{U_0}{RC}$$

оно упрощается следующим образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon\frac{dx}{dt} + ax + bx^3 = B\cos\omega t.$$

Такое уравнение носит название ***уравнения Дуффинга***. Это уравнение (а, значит, и электрический контур) позволяет получать разнообразные негармонические периодические сигналы с различными периодами. Но самым удивительным представляется генерация хаотических сигналов, поведение которых настолько же непредсказуемо, насколько непредсказуемо поведение случайных процессов.

Сначала рассмотрим поведение осциллятора при отсутствии внешнего воздействия, положив $B = 0$ (рис. 3):

```
ε = 0; a = −1; b = 1; ω = 0.75; B = 0;
duffing = NDSolve[{x″[t] + εx′[t] + a x[t] + b x[t]^3 == B Cos[ω t],
    x[0] == 1, x′[0] == 1}, x, {t,0,50}];
Plot[Evaluate[x[t] /. duffing],{t,0,50},AxesLabel → {″t″,″x″}]
```

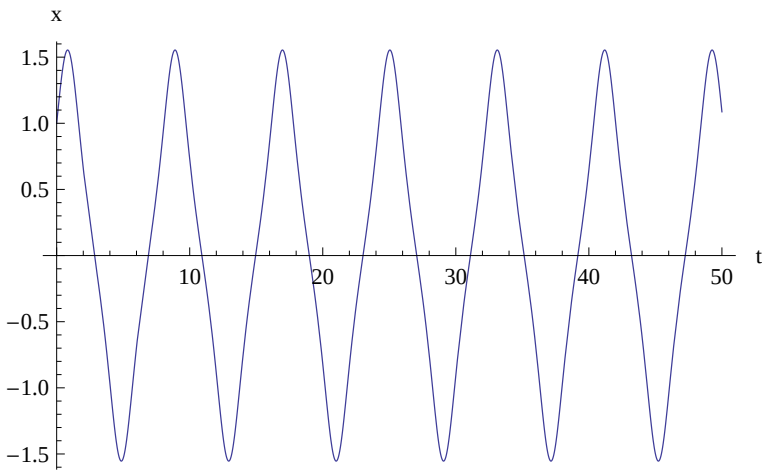

Рис. 3. Колебания с периодом 2 при отсутствии входного сигнала, $B = 0$.

Мы видим, что на выходе осциллятора наблюдается простой периодический сигнал с периодом 2 (график идет вниз, затем вверх, а затем все повторяется).

Далее подключим внешнее воздействие, полагая $B \neq 0$. Остальные параметры зафиксируем и введем для удобства пару собственных операторов. Один оператор будет численно решать дифференциальное уравнение:

```
sol[B_,tmax_] := NDSolve[{x″[t] + 0.1 x′[t] − x[t] + x[t]^3 == B Cos[1.4 t],x[0] == 0,
    x′[0] == 0},x,{t,0,tmax},MaxSteps → 100 tmax]
```

Здесь `tmax` — правый конец отрезка `[0;tmax]`, для которого требуется решить дифференциальное уравнение; `MaxSteps` — количество шагов численного метода для получения приемлемой точности решения.

Второй оператор будет строить графики решений на отрезке `[tmin,tmax]`:

```
draw[tmin_,tmax_] := Plot[Evaluate[x[t] /. duffing],{t,tmin,tmax},
    AxesLabel → {"t","x"}]
```

Изучим, как влияет на характер колебаний системы параметр B, для чего будем его последовательно увеличивать. При $B = 0{,}1$ снова наблюдаем простую периодичность с периодом 2, которая, правда, наступает не сразу, а, начиная с момента времени $t = 150$ (рис. 4).

```
duffing = sol[0.1,200];
draw[0,200]
```

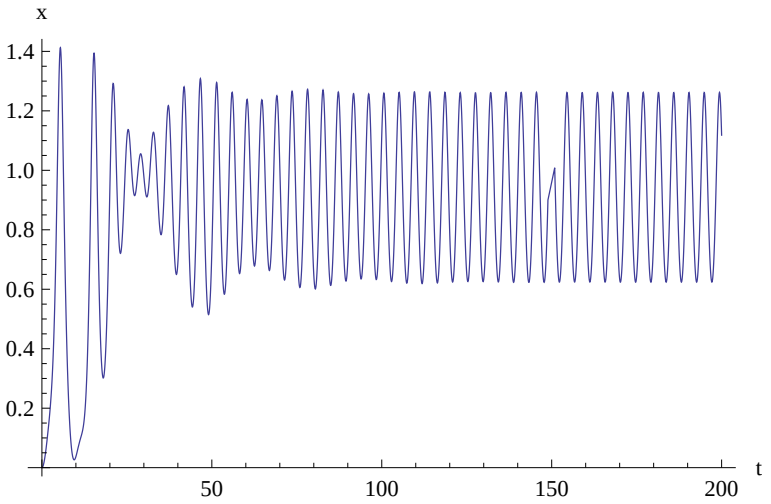

Рис. 4. Колебания с периодом 2 при наличии входного сигнала, $B = 0{,}1$.

Более наглядным является фрагмент графика (рис. 5) для $t \in [150; 175]$:

```
duffing = sol[0.1,200];
draw[150,175]
```

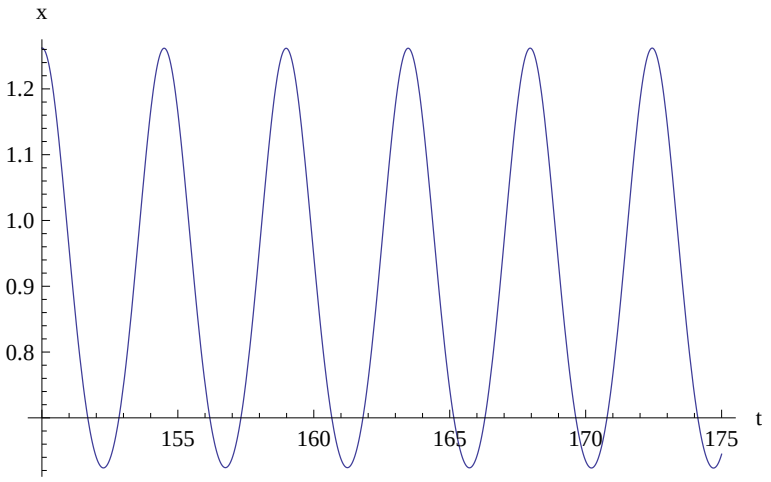

Рис. 5. Фрагмент предыдущего графика. Колебания с периодом 2.

При увеличении B до 0,32 происходит так называемое удвоение периода (рис. 6), период становится равным 4:

```
duffing=sol[0.32,200];
draw[0,200]
```

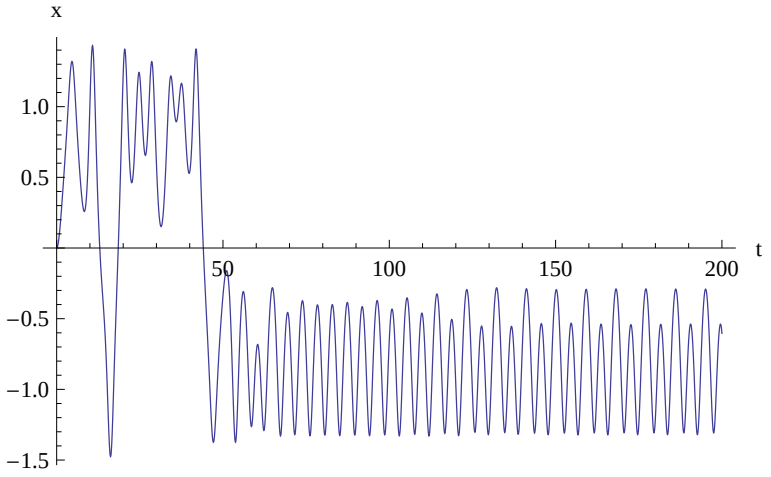

Рис. 6. Удвоение периода: колебания с периодом 4, $B = 0{,}32$.

Вот укрупненный фрагмент графика (рис. 7):

```
duffing=sol[0.32,200];
draw[150,200]
```

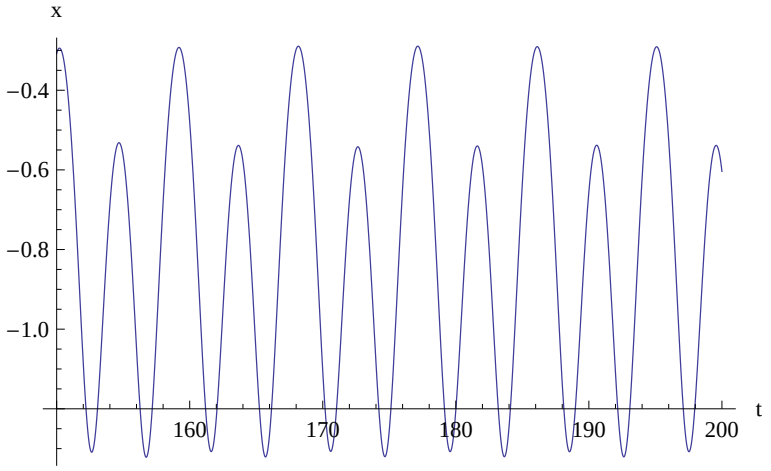

Рис. 7. Фрагмент предыдущего графика. Колебания с периодом 4.

Еще увеличив B (до 0.338), получим следующее удвоение периода, который станет равным 8 (рис. 8):

```
duffing=sol[0.32,200];
draw[0,200]
```

Более детально колебания представлены на фрагменте рис. 9:

```
duffing=sol[0.338,2000];
draw[1900,2000]
```

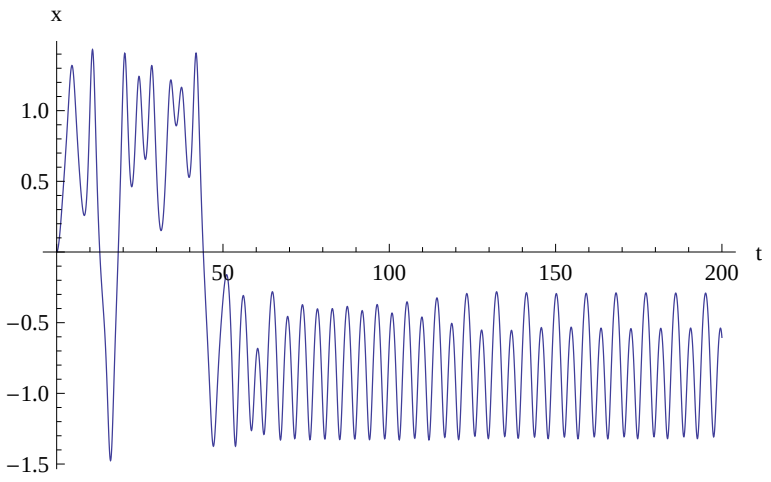

Рис. 8. Удвоение периода: колебания с периодом 8, $B = 0{,}338$.

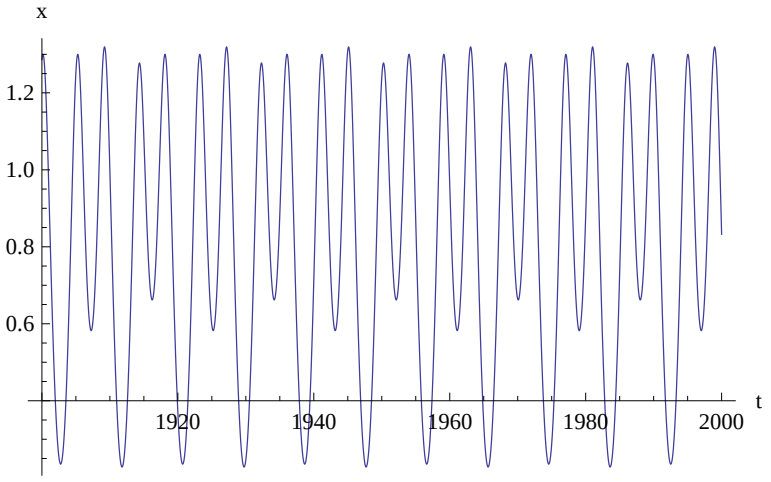

Рис. 9. Фрагмент предыдущего графика. Колебания с периодом 8.

Наконец, при $B = 0.35$ сигнал становится хаотическим (рис. 10):

```
duffing = sol[0.35,3200];
draw[2900,3200]
```

Интересно, что при дальнейшем увеличении B колебания вновь становятся периодическими с периодом 2 (рис. 11):

```
duffing = sol[1,140];
draw[100,140]
```

Не следует думать, что возникновение хаоса возможно лишь при взятых значениях параметров. Вот еще один пример его возникновения (рис. 12):

```
ε = 0.1; a = 0; b = 1; ω = 1; B = 11;
duffing = NDSolve[{x″[t] + εx′[t] + a x[t] + b x[t]^3 == B Cos[ω t],
    x[0] == 0, x′[0] == 0}, x, {t,0,130}];
Plot[Evaluate[x[t] /. duffing],{t,0,130},AxesLabel → {″t″,″x″}]
```

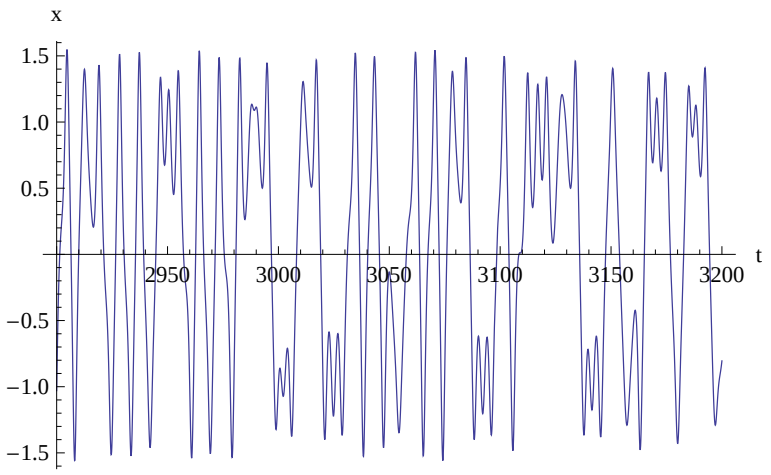

Рис. 10. Хаотические колебания, $B = 0{,}35$.

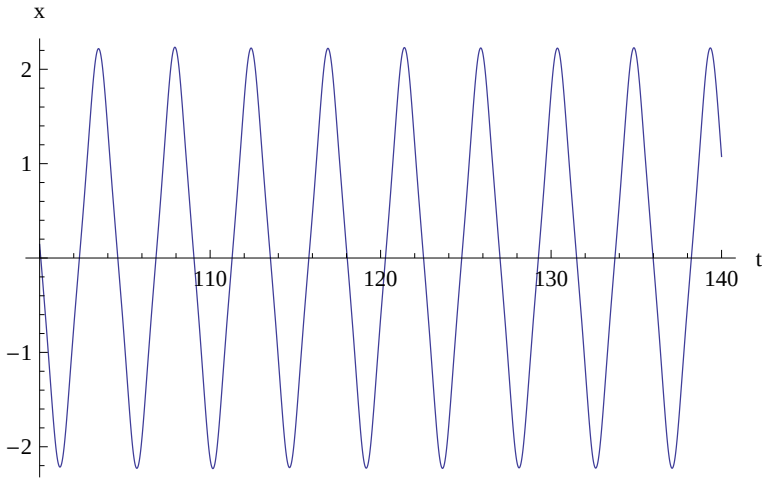

Рис. 11. Периодические колебания с периодом 2, $B = 1$.

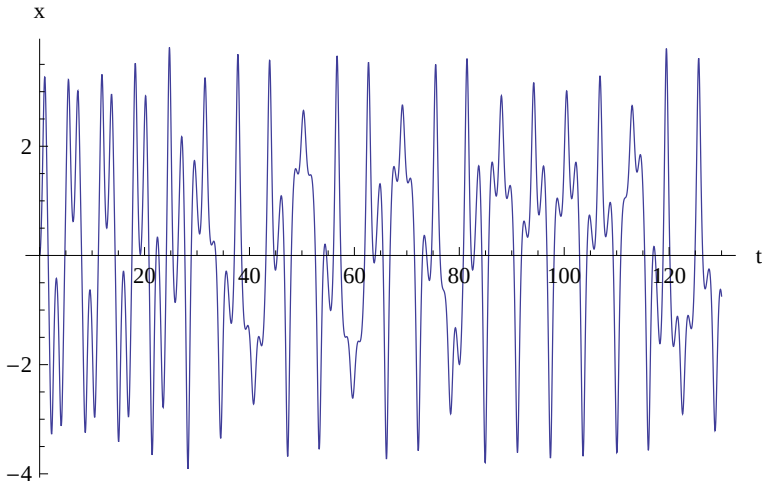

Рис. 12. Еще один тип хаотического сигнала.

При отрицательных значениях B можно наблюдать целый интервал значений этого параметра, при которых генерируется хаос. Это демонстрирует анимационный рис. 13.

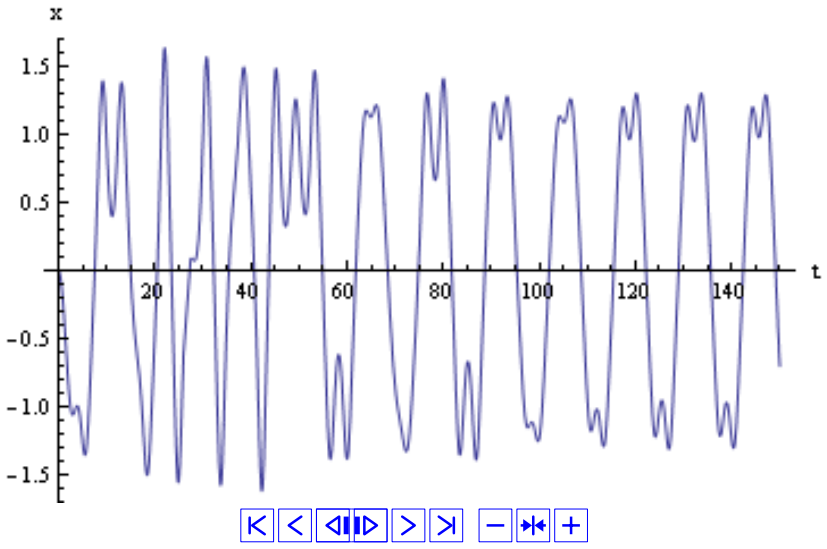

Рис. 13. Хаотическая динамика при $B < 0$.

Фактически изучение таких вот простых уравнений и устройств и привело к рождению сравнительно новой теории, называющейся хаотической динамикой. Впрочем, к нашему курсу она не имеет никакого отношения.

Имеют ли хаотические колебания, создаваемые осциллятором, какое-нибудь практическое значение? Есть мнение, что хаотический сигнал можно использовать для защиты (маскирования) информационного сигнала. Кроме того, хаотический генератор в силу своей высокой чувствительности способен служить детектором слабых сигналов.

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.* — М.: Наука, 1985, — с. 58-65.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* — М.: Рольф, 2000. Ч. 2. — с. 26-31.